ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

102

ΤΟΜΟΣ Β′

ΒΙΒΛΙΑ Β′ ΚΑΙ Γ′

ΥΠΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

ΤΕΧΝΙΚΟΝ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τῆς ἐκδόσεως τοῦ β΄ τόμου
ἐπεμελήθη
ΚΩΝ. Γ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

ΤΟΜΟΣ Β′

ΒΙΒΛΙΑ Β′ ΚΑΙ Γ′

ΥΠΟ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ

ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1976

X

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

τινὲς εἰς τὸ κείμενον τῶν β′ καὶ γ′ βιβλίων τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, ἐκδόσεως I. L. Heiberg, Lipsiae 1891.

Σελὶς 14,22. Ἀντὶ *Ἐὰν ὑπερβολῇ*, νὰ τεθῇ *Ἐὰν <ἐν> ὑπερβολῇ*

» 30,24. Ἀντὶ *τῇ τομῇ.*, νὰ τεθῇ *τῇ τομῇ <Α>.*

» 46,11. Ἀντὶ *Ἐὰν παραβολῇ*, νὰ τεθῇ *Ἐὰν <ἐν> παραβολῇ*

» 46,13. Ἀντὶ *περιέχηται, συμπεσοῦνται*, νὰ τεθῇ *περιέχηται, <ἐκβαλλόμεναι> συμπεσοῦνται*

» 48,2. Ἀντὶ *Ἐὰν ὑπερβολῇ*, νὰ τεθῇ *Ἐὰν <ἐν> ὑπερβολῇ*

» 48,4. Ἀντὶ *περιέχηται, συμπεσοῦνται*, νὰ τεθῇ *περιέχηται, <ἐκβαλλόμεναι> συμπεσοῦνται*

» 60. Ἀντὶ *ἀντικείμεναι τομαὶ καὶ τῶν ἀντικειμένων*, νὰ τεθῇ *ἀντικείμεναι τομαὶ <αἱ ΑΒ, ΓΔ> καὶ τῶν ἀντικειμένων*

» 60,2. Ἀντὶ *καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι ἤτοι*, νὰ τεθῇ *καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι <ἑκατέρας> ἤτοι*

» 120,4. Ἀντὶ *τῶν ἀξόνων ἡ ΑΒ* νὰ τεθῇ *τῶν ἀξόνων ὁ ΑΒ*

» 122,6. Ἀντὶ *ὡς τὸ ἀπὸ* $\underline{HKE}$ νὰ τεθῇ *ὡς τὸ ὑπὸ* $\overline{HKE}$

» 138,10. Ἀντὶ *περιφερείας* $\overline{\beta}$, νὰ τεθῇ *περιφερείας <κύκλου>* $\overline{\beta}$

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὅπως ἀναφέρεται εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ πρώτου τόμου τῶν Κωνικῶν, ἐκτὸς τοῦ ἀπολεσθέντος ὀγδόου βιβλίου τῶν Κωνικῶν, ἀπωλέσθησαν καὶ πολλαὶ ἄλλαι πραγματεῖαι τοῦ Ἀπολλωνίου, περὶ τῶν τίτλων τῶν ὁποίων λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ μεταγενεστέρων συγγραφέων. Διὰ τὴν ἀνεύρεσιν ἀπολεσθέντων ἔργων τοῦ Ἀπολλωνίου προέβημεν ἀπό τινων ἐτῶν εἰς ἐρεύνας εἰς τὰς βιβλιοθήκας τῶν Ἰνδιῶν καὶ τῆς Ἐγγὺς Ἀνατολῆς. Ἀτυχῶς, μέχρι τοῦδε οὐδεμία πληροφορία ἐλήφθη περὶ ἀνευρέσεως ἀραβικῶν χειρογράφων σχετικῶν πρὸς ἀπολεσθέντα ἔργα τοῦ Ἀπολλωνίου. Κατόπιν τούτου, ἀφοῦ εἰς τὸν Α΄ τόμον περιελήφθησαν αἱ μαρτυρίαι μεταγενεστέρων τοῦ Ἀπολλωνίου συγγραφέων καὶ τὸ πρῶτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν, ἡ ὑπόλοιπος ὕλη κατενεμήθη εἰς τρεῖς τόμους, ὡς ἑξῆς·

εἰς τὸν Β΄ τόμον περιελήφθησαν τὰ βιβλία 2 καὶ 3,

εἰς τὸν Γ΄ τόμον περιελήφθησαν τὰ βιβλία 4, 5, καὶ 6,

καὶ εἰς τὸν Δ΄ τόμον περιελήφθη τὸ βιβλίον 7, τὰ λήμματα τοῦ Πάππου καὶ τὰ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου.

Κατὰ Δεκέμβριον ὅμως ἐ. ἔ. ἔλαβον ἐπιστολήν, ἀπὸ 16 - 11 - 1975, παρὰ τοῦ ἐν Μόσχᾳ καθηγητοῦ κ. Boris Rosenfeld, ὅστις γράφει, ὅτι κατὰ τὴν ἐν Μόσχᾳ εἰς τὴν ῥωσικήν, ὑπ᾽ αὐτοῦ ἔκδοσιν τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου (Institute for History of Sciences and Technology), ἐλπίζει νὰ χρησιμοποιήσῃ τὴν ἡμετέραν ἔκδοσιν τῶν Κωνικῶν διὰ τὰ εἰς τὴν ἀραβικὴν σῳζόμενα βιβλία, καὶ ἐκτὸς τούτων τὴν ἔκδοσιν ἐν Κωνσταντινουπόλει τοῦ Τούρκου καθηγητοῦ Nazim Terriogly, τοῦ ὀγδόου βιβλίου τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀνακατασκευασθέντος εἰς τὴν ἀραβικὴν ὑπὸ τοῦ Ἄραβος Ibn Haitam (10ος αἰών), *Das achte Buch zu den Conica des Apollonios von Perge rekonstruiert von Ibn al-Haitam, Istanbul 1974».*

Κατόπιν τῆς ἀνωτέρω ἐπιστολῆς ἔγραψα τόσον εἰς τὸν κ. Rosenfeld, ὅσον καὶ εἰς τὸν κ. Terrioglu παρακαλῶν διὰ τὴν ἀποστολὴν τοῦ βιβλίου. Ἐὰν τοῦτο ληφθῇ ἐγκαίρως θὰ δημοσιευθῇ ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὸ 7ον βιβλίον.

Ἄς ἐπιτραπῇ νὰ ἐκφράσωμεν ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης τὰς εὐχαριστίας καὶ τὴν εὐγνωμοσύνην ἡμῶν πρὸς τὸν Πρόεδρον τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, πολιτικὸν μηχανικόν, πρώην Ὑπουργὸν τῶν Δημοσίων Ἔργων κ. Εὐάγγελον Κουλουμπῆν καὶ πρὸς τὰ μέλη τῆς Διοικούσης Ἐπιτροπῆς τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, διὰ τὸ ἐνδιαφέρον αὐτῶν πρὸς ἔκδοσιν τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου.

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ Δεκέμβριον 1975

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

H192 # ΚΩΝΙΚΩΝ β′

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

Εἰ ὑγιαίνεις, ἔχοι ἂν καλῶς· καὶ αὐτὸς δὲ μετρίως ἔχω. Ἀπολλώνιον τὸν υἱόν μου πέπομφα πρός σε κομίζοντά σοι τὸ β′ βιβλίον τῶν συντεταγμένων ἡμῖν κωνικῶν. δίελθε οὖν αὐτὸ ἐπιμελῶς καὶ τοῖς ἀξίοις τῶν τοιούτων κοινωνεῖν μεταδίδου· καὶ Φιλωνίδης δὲ ὁ γεωμέτρης, ὃν καὶ συνέστησά σοι ἐν Ἐφέσῳ, ἐάν ποτε ἐπιβαλῇ εἰς τοὺς κατὰ Πέργαμον τόπους, μεταδὸς αὐτῷ, καὶ σεαυτοῦ ἐπιμελοῦ, ἵνα ὑγιαίνῃς. εὐτύχει.

α′

Ἐὰν ὑπερβολῆς κατὰ κορυφὴν εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ἀπ᾽ αὐτῆς ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς διαμέτρου ἀποληφθῇ ἴση τῇ δυναμένῃ τὸ τέταρτον τοῦ εἴδους, αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

ἔστω ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΖ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς κατὰ τὸ Β ἡ ΔΕ, καὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒΖ εἴδους ἴσον ἔστω τὸ ἀφ᾽
H194 ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐκβεβλήσθωσαν. λέγω, ὅτι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω ἡ ΓΔ τῇ τομῇ κατὰ τὸ Η,

Σημ.: Ὅπου παραπλεύρως τοῦ ἀρχαίου κειμένου σημειοῦται Η, δηλοῦται ἡ σελὶς τῆς ἐκδόσεως Heiberg 1891 (Λειψίας).

ΚΩΝΙΚΩΝ

Βιβλίον 2ον

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

Ἐὰν ὑγιαίνεις ἂς εἶσαι καλά· καὶ ἐγὼ δὲ εἶμαι ἀρκετὰ καλά.

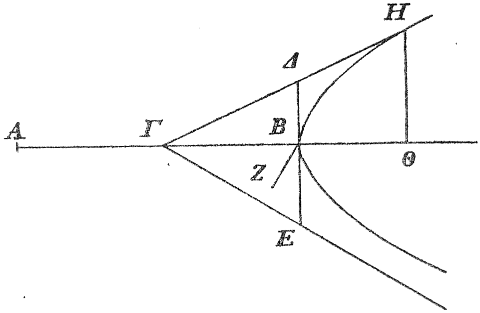
Ἀπέστειλα πρὸς σὲ τὸν υἱόν μου Ἀπολλώνιον φέροντα διὰ σὲ τὸ β′ βιβλίον τῶν κωνικῶν μου. Ἐξέτασέ το ἐπιμελῶς καὶ εἰς ὅσους εἶναι ἄξιοι πρὸς τοῦτο ἀνακοίνωσέ το· ἐὰν δὲ τυχὸν ὁ γεωμέτρης Φιλωνίδης φανῇ εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς Περγάμου, ἀνακοίνωσέ το καὶ εἰς αὐτόν, καὶ πρόσεχε τὸν ἑαυτόν σου, διὰ νὰ ὑγιαίνῃς. Εὐτύχει.

1

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται εἰς τὴν κορυφὴν ὑπερβολῆς καὶ ἐὰν ἀπ᾽ αὐτῆς, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς διαμέτρου ἀποληφθῇ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ἔχοντος μίαν πλευρὰν τὴν παράμετρον καὶ ἄλλην τὴν διάμετρον (πλάγιον ἄξονα), αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι δὲν θὰ συναντήσωσι τὴν τομήν.

Ἔστω ὑπερβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, παράμετρος δὲ ἡ ΒΖ, καὶ ἂς ἐφάπτηται τῆς τομῆς κατὰ τὸ Β ἡ ΔΕ, καὶ πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ τὴν παράμετρον ΒΖ, ἔστω ἴσον $ΒΔ^2 = ΒΕ^2$, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΔ, ΓΕ ἂς ἐκβληθῶσι. Λέγω, ὅτι δὲν θὰ συναντήσωσι τὴν τομήν.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς συναντήσῃ τὴν τομὴν ἡ ΓΔ *καὶ ἀπὸ τοῦ Η τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΔΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΖ, ἀλλὰ τοῦ μὲν ἀπὸ ΑΒ τέταρτον μέρος τὸ ἀπὸ ΓΒ, τοῦ δὲ ὑπὸ ΑΒΖ τέταρτον τὸ ἀπὸ ΒΔ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ, τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘΒ τῷ ἀπὸ ΓΘ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΔ συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΓΕ· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶ τῇ τομῇ αἱ ΓΔ, ΓΕ.*



β′

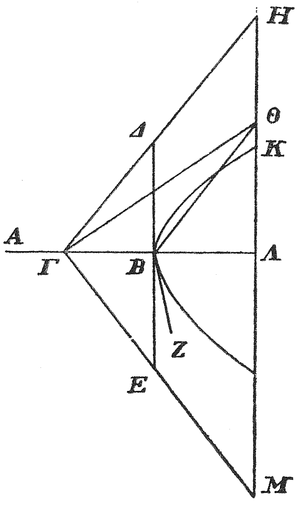
Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον, ὅτι ἑτέρα ἀσύμπτωτος οὐκ ἔστι τέμνουσα τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν ΔΓΕ.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ ΓΘ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΘ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΘ κατὰ τὸ Θ, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΔΗ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Κ, Λ, Μ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΒΘ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ ΔΒ, ΗΘ ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι.

κατὰ τὸ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΗΘ· εἶναι ἄρα παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ (1, 17). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς ἡ ΑΒ : ΒΖ = ΑΒ² : ΑΒ x ΒΖ, ἀλλὰ 1/4 ΑΒ² = ΓΒ², τοῦ δὲ 1/4 ΑΒ x ΒΖ = ΒΔ², θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ:ΒΖ = ΓΒ²:ΔΒ², τουτέστι = ΓΘ²:ΘΗ² (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΒ:ΒΖ = = ΑΘ x ΘΒ:ΘΗ² (1, 21)· ὡς ἄρα ΓΘ²:ΘΗ² = ΑΘ x ΘΒ:ΘΗ². Εἶναι ἄρα ΑΘ x ΘΒ = ΓΘ² (Εὐκλ. 5, 9)· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν θὰ συναντήσῃ ἄρα τὴν τομὴν ἡ ΓΔ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι, οὔτε ἡ ΓΕ θὰ τὴν συναντήσῃ· εἶναι ἄρα αἱ ΓΔ, ΓΕ πρὸς τὴν τομὴν ἀσύμπτωτοι.

2

Τῶν αὐτῶν δεδομένων (ὡς προηγουμένως), νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη ἀσύμπτωτος τέμνουσα τὴν γωνίαν ΔΓΕ.



Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἔστω, ὅτι ὑπάρχει ἡ ΓΘ, καὶ διὰ τοῦ Β πρὸς τὴν ΓΔ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΒΘ καὶ ἂς συναντήσῃ τὴν ΓΘ κατὰ τὸ Θ, καὶ ἂς ληφθῇ ΒΘ = ΔΗ καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΘ ἂς ἐκβληθῇ κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΒΘ, ΔΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, εἶναι καὶ αἱ ΔΒ, ΗΘ ἴσαι

καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ τις ἡ ΒΛ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ
H196 *ἀπὸ ΓΛ. ὁμοίως δὴ ἐπειδὴ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΜ τῇ ΔΕ, καὶ ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΛ τῇ ΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΔΒ, μείζων ἄρα ἡ ΗΚ τῆς ΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΜ τῆς ΒΕ μείζων, ἐπεὶ καὶ ἡ ΛΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΚΗ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΔΒΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΔΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΛΓ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΛΗ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΛΚ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΜΚΗ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΒ τῷ ὑπὸ ΜΚΗ· ὅπερ ἄτοπον· μεῖζον γὰρ αὐτοῦ δέδεικται. οὐκ ἄρα ἡ ΓΘ ἀσύμπτωτός ἐστι τῇ τομῇ.*

γ'

Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἁφήν, καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν τμημάτων αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἴδους πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ε καὶ ἀ-

καὶ παράλληλοι (Εὐκλ. 1, 33). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται εἰς αὐτὴν εὐθεῖά τις ἡ ΒΛ, θὰ εἶναι $ΑΛ \times ΛΒ + ΓΒ^2 = ΓΛ^2$ (Εὐκλ. 2, 6). Ὁμοίως λοιπόν, ἐπειδὴ ἡ ΗΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ εἶναι ἡ $ΔΒ = ΒΕ$, εἶναι ἄρα $ΗΛ = ΛΜ$ (Εὐκλ. 6, 1). Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΗΘ = ΔΒ$, εἶναι ἄρα ἡ $ΗΚ > ΔΒ$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ $ΚΜ > ΒΕ$, ἐπειδὴ εἶναι καὶ $ΛΜ > ΒΕ$· εἶναι ἄρα τὸ $ΜΚ \times ΚΗ > ΔΒ \times ΒΕ$, τουτέστι $> ΔΒ^2$ (θ. 1). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς ἡ $ΑΒ:ΒΖ = ΓΒ^2 : ΒΔ^2$, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΑΒ:ΒΖ = ΑΛ \times ΛΒ : ΛΚ^2$ (1, 21), ὡς δὲ τὸ $ΓΒ^2 : ΒΔ^2 = ΓΛ^2 : ΛΗ^2$ (Εὐκλ. 6, 4), καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΓΛ^2 : ΛΗ^2 = ΑΛ \times ΛΒ : ΛΚ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς ὅλον τὸ $ΛΓ^2$: ὅλον τὸ $ΛΗ^2$, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ $ΑΛ \times ΛΒ$: ἀφαιρεθὲν τὸ $ΛΚ^2$, εἶναι ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΓΒ^2$: τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΜΚ \times ΚΗ = ΓΛ^2 : ΛΗ^2$ (Εὐκλ. 5, 19) $= ΓΒ^2 : ΔΒ^2$. Εἶναι ἄρα τὸ $ΔΒ^2 = ΜΚ \times ΚΗ$ (Εὐκλ. 5, 9)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἀπεδείχθη, ὅτι εἶναι μεγαλύτερον. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΓΘ ἀσύμπτωτος πρὸς τὴν τομήν.

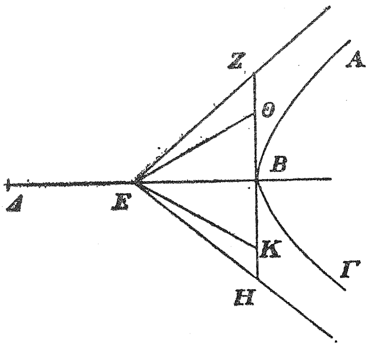
3

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται ὑπερβολῆς, θὰ συναντήσῃ ἑκατέραν τῶν ἀσυμπτώτων καὶ θὰ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὴν ἁφήν, καὶ τὸ τετράγωνον ἑκατέρου τῶν τμημάτων αὐτῆς θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν διὰ τῆς ἁφῆς διερχομένην διάμετρον καὶ τὴν παράμετρον τῆς ὑπερβολῆς.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ε καὶ ἀσύμ-

H198 σύμπτωτοι αἱ ΖΕ, ΕΗ, καὶ ἐφαπτέσθω τις αὐτῆς κατὰ τὸ Β ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη ἡ ΘΚ συμπεσεῖται ταῖς ΖΕ, ΕΗ.

εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΒ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΔ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ. κείσθω δὴ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους ἴσον τὸ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΘΒ, ΒΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΕΚ. ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσίν· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκεινται γὰρ αἱ ΖΕ, ΕΗ ἀσύμπτωτοι. ἡ ἄρα ΚΘ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ΕΖ, ΕΗ ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Ζ, Η.



λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΒΖ, ΒΗ ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους.

μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω τῷ τετάρτῳ τοῦ εἴδους ἴσον τὸ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΒΘ, ΒΚ. ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΘΕ, ΕΚ· ὅπερ ἄτοπον. τὸ ἄρα ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΖΒ, ΒΗ ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους.

δ′

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν γωνίαν περιεχουσῶν καὶ σημείου ἐντὸς τῆς γωνίας γράψαι διὰ τοῦ σημείου κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολήν, ὥστε ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἶναι τὰς δοθείσας εὐθείας.

πτωτοι αἱ ΖΕ, ΕΗ, καὶ ἂς ἐφάπτηται αὐτῆς εὐθεῖά τις ἡ ΘΚ κατὰ τὸ Β. Λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη ἡ ΘΚ θὰ συναντήσῃ τὰς ΖΕ, ΕΗ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς μὴ τὰς συναντήσῃ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΒ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΕ = ΕΔ· εἶναι ἄρα ἡ ΒΔ διάμετρος. Ἂς ληφθῇ τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν ΘΒ, ΒΚ ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ πρὸς τὴν ΒΔ σχήματος (τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν διάμετρον ΒΔ καὶ τὴν παράμετρον), καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΕΘ, ΕΚ. Εἶναι ἄρα αὗται ἀσύμπτωτοι (θ. 1)· ὅπερ ἄτοπον (θ. 2)· διότι ὑπετέθησαν ἀσύμπτωτοι αἱ ΖΕ, ΕΗ. Ἡ ΚΘ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὰς ἀσυμπτώτους ΕΖ, ΕΗ κατὰ τὰ σημεῖα Ζ, Η.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν ΒΖ, ΒΗ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ πρὸς τὴν ΒΔ σχήματος (ὀρθογ. πλευρῶν ΒΔ καὶ τῆς παραμέτρου).

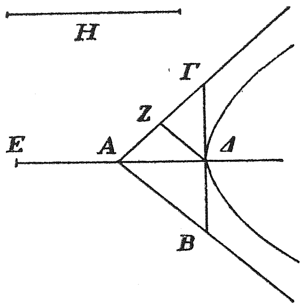
Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω, εἰ δυνατόν, τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν ΒΘ, ΒΚ ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ σχήματος. Εἶναι ἄρα αἱ ΘΕ, ΕΚ ἀσύμπτωτοι (θ. 1)· ὅπερ ἄτοπον. Εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν ΖΒ, ΒΗ ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν ΒΔ σχήματος.

4

Ἀφοῦ δοθῶσι δύο εὐθεῖαι σχηματίζουσαι γωνίαν καὶ σημεῖον ἐντὸς τῆς γωνίας νὰ γραφῇ διὰ τοῦ σημείου τομὴ κώνου καλουμένη ὑπερβολή, ὥστε αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι νὰ εἶναι ἀσύμπτωτοι αὐτῆς.

H200 ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΒ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ Α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ Δ, καὶ δέον ἔστω διὰ τοῦ Δ τὰς ΓΑΒ γράψαι εἰς ἀσυμπτώτους ὑπερβολήν.

ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ ΔΑ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ κείσθω τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΖΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον γεγονέτω τὸ ὑπὸ ΔΕ, Η, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΑΔ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ Δ ὑπερβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν Η ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΒΑ, καὶ ἴση ἡ ΓΖ τῇ ΖΑ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΔ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η· ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ ΓΔ, ΔΒ τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΔΕ, Η εἴδους. αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς γραφείσης ὑπερβολῆς.



ε′

Ἐὰν παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ, ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

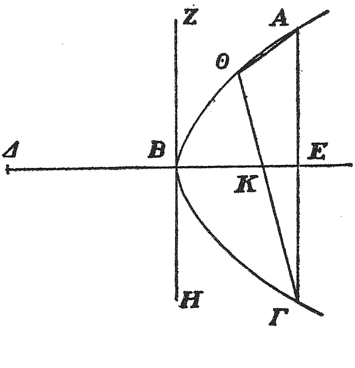
ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΖΒΗ, ἤχθω δέ τις εὐθεῖα

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΒ σχηματίζουσαι τυχοῦσαν γωνίαν μὲ κορυφὴν τὸ Α, καὶ ἂς δοθῇ σημεῖόν τι τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ νὰ γραφῇ ὑπερβολὴ μὲ ἀσυμπτώτους τὰς ΓΑΒ.

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΔ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἂς ληφθῇ ΔΑ = ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Δ πρὸς τὴν ΑΒ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΔΖ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΖ = ΖΓ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΔ ἂς ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Β καὶ ἂς γίνῃ $ΓΒ^2 = ΔΕ \times Η$, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ΑΔ ἂς γραφῇ περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ Δ ὑπερβολή, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καταγομένων νὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ παρὰ τὴν Η ὀρθογώνια ὑπερβάλλοντα κατὰ σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΔΕ \times Η$ (1, 53). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΑ καὶ εἶναι ΓΖ = ΖΑ, εἶναι ἄρα καὶ ΓΔ = ΔΒ (Εὐκλ. 6, 2)· ὥστε τὸ $ΓΒ^2 = 4ΓΔ^2$. Καὶ εἶναι $ΓΒ^2 = ΔΕ \times Η$· ἑκάτερον ἄρα τῶν $ΓΔ^2$, $ΔΒ^2$ εἶναι $= 1/4\ ΔΕ \times Η$ ὀρθογωνίου. Εἶναι ἄρα αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀσύμπτωτοι τῆς γραφείσης ὑπερβολῆς (θ. 1).

5

Ἐὰν ἡ διάμετρος παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς τέμνῃ εὐθεῖάν τινα εἰς τὸ μέσον, ἡ εἰς τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐφαπτομένη τῆς τομῆς θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εἰς τὸ μέσον τεμνομένην εὐθεῖαν.



Ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΔΒΕ, καὶ ἂς ἐφάπτηται τῆς *ἐν τῇ τομῇ ἡ ΑΕΓ ἴσην ποιοῦσα τὴν ΑΕ τῇ ΕΓ. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ.*

H202 *εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΖΗ παράλληλος ἡ ΓΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ. ἐπεὶ οὖν παραβολὴ ἢ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΔΕ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΖΗ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἡ ΓΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΘ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΕΑ. ἡ ἄρα ΑΘ τῇ ΚΕ παράλληλός ἐστιν· ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γὰρ ἐκβαλλομένη τῇ ΒΔ.*

ϛʹ

Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν, ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

ἔστω ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἡ ΑΒ τὴν ΓΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ε. λέγω, ὅτι ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ.

μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἡ ΔΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΖΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΗΕ· ὅπερ ἄτοπον. εἴτε γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς ΑΒ τομῆς, ἡ ΓΖ συμπεσεῖται τῇ ΑΒ, εἴτε μή ἐστιν, ὑποκείσθω τὸ Κ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΚ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω τομῆς ἡ ΖΒΗ, ἂς ἀχθῆ δὲ εὐθεῖά τις εἰς τὴν τομὴν ἡ ΑΕΓ σχηματίζουσα τὴν ΑΕ=ΕΓ. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῆ διὰ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ ἡ ΓΘ καὶ ἂς ἐπιζευχθῆ ἡ ΘΑ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒΓ εἶναι παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν εἶναι ἡ ΔΕ ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΖΗ, καὶ παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἡ ΓΘ, εἶναι ΓΚ=ΚΘ (1, 46 καὶ 47). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΕ=ΕΑ. Εἶναι ἄρα ἡ ΑΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΚΕ (Εὐκλ. 6, 2)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐκβαλλομένη συναντᾷ τὴν ΒΔ (1, 22).

6

Ἐὰν ἡ διάμετρος ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας τέμνῃ εὐθεῖάν τινα εἰς τὸ μέσον, μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, ἡ εἰς τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐφαπτομένη τῆς τομῆς θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εἰς τὸ μέσον τεμνομένην εὐθεῖαν.

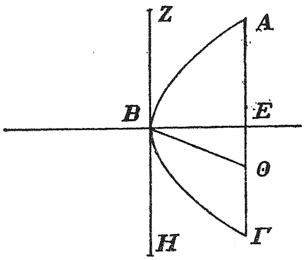
Ἔστω ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἡ ΑΒ ἂς τέμνῃ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε τὴν ΓΔ μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου. Λέγω, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ Α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, εἰ δυνατόν, ἔστω ἡ ΔΖ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Α· εἶναι ἄρα ΔΗ=ΖΗ (1,47). Εἶναι δὲ καὶ ΔΕ=ΕΓ· εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΗΕ (Εὐκλ. 6, 2)· ὅπερ ἄτοπον. Διότι εἴτε τὸ Η θὰ εἶναι κέντρον τῆς τομῆς ΑΒ, ὁπότε ἡ ΓΖ θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΒ (1, 23), εἴτε δὲν θὰ εἶναι, ὁπότε ἂς ληφθῆ τὸ Κ ὡς κέντρον, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῆ ἡ ΔΚ ἂς ἐκβληθῆ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῆ ἡ ΓΘ. Ἐ-

H204 ἡ ΓΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΘ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΘ τῇ ΑΒ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΖ· ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ.

ζ′

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ τομῇ καὶ δίχα τμηθῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

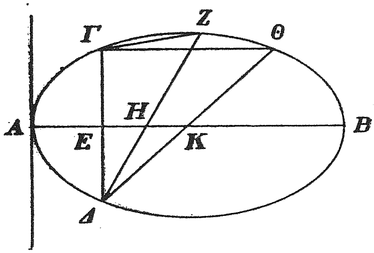


ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, ἐφαπτομένη δὲ αὐτῆς ἡ ΖΗ, καὶ τῇ ΖΗ παράλληλος ἡ ΑΓ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΒΕ διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

μὴ γάρ, ἀλλά, εἰ δυνατόν, ἔστω διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΒΘ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ· ὅπερ ἄτοπον· ἡ γὰρ ΑΕ τῇ ΕΓ ἴση ἐστίν. οὐκ ἄρα ἡ ΒΘ διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΕ.

η′

Ἐὰν ⟨ἐν⟩ ὑπερβολῇ εὐθεῖα συμπίπτῃ κατὰ δύο σημεῖα, ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις, καὶ πειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΚ = ΚΘ, εἶναι δὲ καὶ ἡ ΔΕ = ΕΓ, εἶναι ἄρα ἡ ΓΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ (Εὐκλ. 6, 2). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΖ εἶναι παράλληλος· ὅπερ ἄτοπον (Εὐκλ. 1, 30). Ἡ ἐφαπτομένη ἄρα εἰς τὸ Α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.



7

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται κώνου τομῆς ἢ περιφερείας κύκλου, καὶ πρὸς αὐτὴν ἀχθῇ παράλληλος εἰς τὴν τομὴν καὶ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς μέχρι τοῦ σημείου τῆς διχοτομίας ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα θὰ εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς.

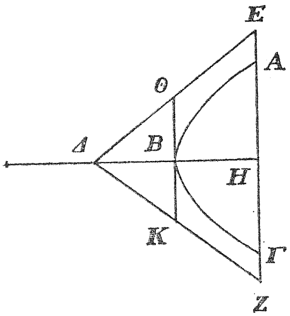
Ἔστω τομὴ κώνου ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒΓ, ἐφαπτομένη δὲ αὐτῆς ἡ ΖΗ, καὶ πρὸς τὴν ΖΗ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΑΓ καὶ ἂς ἔχῃ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΕ. Λέγω, ὅτι ἡ ΒΕ εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἀλλά, εἰ δυνατόν, ἔστω διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΒΘ. Εἶναι ἄρα ἡ ΑΘ = ΘΓ (1 ορισ. 4)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἡ ΑΕ = ΕΓ. Δὲν θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΒΘ διάμετρος τῆς τομῆς. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι οὔτε ἄλλη τις εἶναι πλὴν τῆς ΒΕ.

8

Ἐὰν εὐθεῖα συναντᾷ ὑπερβολὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη θὰ συναντήσῃ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ αἱ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῆς τομῆς πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΔ, ΔΖ, καὶ τῇ ΑΒΓ συμπιπτέτω τις ἡ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις.



τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ
H206 τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ. διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΓ. ἔστω οὖν ἐφαπτομένη ἡ ΘΒΚ· συμπεσεῖται δὴ ταῖς ΕΔ, ΔΖ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΚΘ, καὶ ἡ ΚΘ συμπίπτει ταῖς ΔΚ, ΔΘ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα συμπεσεῖται ταῖς ΔΕ, ΔΖ.

συμπιπτέτω κατὰ τὰ Ε, Ζ· καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΘΒ τῇ ΒΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. ὥστε καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΕ.

θʹ

Ἐὰν εὐθεῖα συμπίπτουσα ταῖς ἀσυμπτώτοις δίχα τέμνηται ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς, καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἅπτεται τῆς τομῆς.

εὐθεῖα γὰρ ἡ ΓΔ συμπίπτουσα ταῖς ΓΑΔ ἀσυμπτώτοις δίχα τεμνέσθω ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς κατὰ τὸ Ε σημεῖον. λέγω, ὅτι κατ' ἄλλο σημεῖον οὐχ ἅπτεται τῆς τομῆς.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἁπτέσθω κατὰ τὸ Β. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ἀπολαμβανόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς μέχρι τῶν ἀσυμπτώτων θὰ εἶναι ἴσαι.

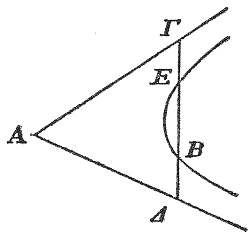
Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΔ, ΔΖ, καὶ ἂς συναντᾷ τὴν ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ. Λέγω, ὅτι αὕτη ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη θὰ συναντήσῃ τὰς ἀσυμπτώτους.

Ἂς τμηθῇ ἡ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Η, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΗ. Εἶναι ἄρα αὕτη διάμετρος τῆς τομῆς (θ. 7)· ἡ ἐφαπτομένη ἄρα τῆς τομῆς εἰς τὸ Β εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ (θ. 5 καὶ 6). Ἔστω λοιπὸν ἐφαπτομένη ἡ ΘΒΚ· θὰ συναντήσῃ λοιπὸν αὕτη τὰς ΕΔ, ΔΖ (θ. 3). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ ἡ ΚΘ συναντᾷ τὰς ΔΚ, ΚΘ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα θὰ συναντήσῃ τὰς ΔΕ, ΔΖ.

Ἂς τὰς συναντήσῃ κατὰ τὰ Ε, Ζ· καὶ εἶναι ἡ ΘΒ = ΒΚ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΖΗ = ΗΕ (Εὐκλ. 6, 4). Ὥστε καὶ ἡ ΓΖ = ΑΕ.

9

Ἐὰν εὐθεῖα συναντῶσα τὰς ἀσυμπτώτους τέμνηται εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς, ἐφάπτεται τῆς τομῆς εἰς ἓν μόνον σημεῖον.



Διότι εὐθεῖα ἡ ΓΔ συναντῶσα τὰς ἀσυμπτώτους ΓΑ, ΑΔ ἂς τέμνηται εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Ε. Λέγω, ὅτι εἰς ἄλλο σημεῖον δὲν ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς ἐφάπτηται κατὰ τὸ Β. Εἶναι

ΓΕ τῇ ΒΔ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἴση. οὐκ ἄρα καθ᾽ ἕτερον σημεῖον ἅπτεται τῆς τομῆς.

ι′

Ἐὰν εὐθεῖά τις τέμνουσα τὴν τομὴν συμπίπτῃ ἑκατέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς H208 *τομῆς ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἴδους πρὸς τῇ διχοτομούσῃ διαμέτρῳ τὰς ἀγομένας παρὰ τὴν ἠγμένην εὐθεῖαν.*

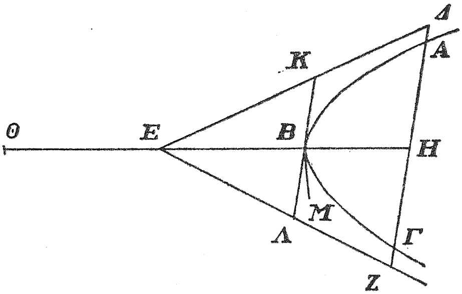
ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αὐτῆς αἱ ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἤχθω τις ἡ ΔΖ τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΘ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΘΕΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΜ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΘ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΜ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΔΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΜ, ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΖ.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΚΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΜ, τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΜ, τὸ ὑπὸ ΘΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τὸ ὑπὸ ΘΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΔΗ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΘΗΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΑΗ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς ἄρα ἡ ΓΕ = ΒΔ (θ. 8)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐλήφθη ΓΕ = ΕΔ. Δὲν θὰ ἐφάπτηται ἄρα τῆς τομῆς εἰς ἄλλο σημεῖον.

10

Ἐὰν εὐθεῖά τις τέμνουσα τὴν τομὴν συναντᾷ ἑκατέραν τῶν ἀσυμπτώτων, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον μίαν πλευρὰν τὴν μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος μίαν πλευρὰν τὴν διάμετρον τὴν διχοτομοῦσαν τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ἠγμένην εὐθεῖαν καὶ ἄλλην πλευρὰν τὴν παράμετρον τῆς ὑπερβολῆς.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αὐτῆς αἱ ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΔΖ τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Η, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΕ = ΕΘ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΕΒ ἡ ΒΜ· εἶναι ἄρα ἡ ΒΘ διάμετρος, (θ. 7), παράμετρος δὲ ἡ ΒΜ. Λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΔΑ x ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς 1/4 ΘΒ x ΒΜ, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΔΓ x ΓΖ.



Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΚΛ· εἶναι ἄρα αὕτη παράλληλος πρὸς τὴν ΔΖ (θ. 5). Καὶ ἐπειδὴ ἔχει ἀποδειχθῇ, ὡς ἡ ΘΒ:ΒΜ = $\mathrm{E}\mathrm{B}^2:\mathrm{B}\mathrm{K}^2$ (θ. 1) = $\mathrm{E}\mathrm{H}^2:\mathrm{H}\Delta^2$ (Εὐκλ. 6, 4), ὡς δὲ ΘΒ:ΒΜ = ΘΗ x ΗΒ:$\mathrm{H}\mathrm{A}^2$ (1, 21) εἶναι ἄρα $\mathrm{E}\mathrm{H}^2:\mathrm{H}\Delta^2$ = ΘΗ x ΗΒ:$\mathrm{H}\mathrm{A}^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς ὅλον τὸ $\mathrm{E}\mathrm{H}^2$: ὅλον τὸ $\Delta\mathrm{H}^2$, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΘΗ x ΗΒ : ἀφαιρεθὲν τὸ

H210 λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΔΑΖ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΑΔ τῷ ἀπὸ ΒΚ.

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ ΔΓΖ τῷ ἀπὸ ΒΛ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΚΒ τῷ ἀπὸ ΒΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΑΔ τῷ ὑπὸ ΖΓΔ.

ια΄

Ἐὰν ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν τέμνῃ τις εὐθεῖα, συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν καὶ τῆς τομῆς ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἡγμένης διαμέτρου παρὰ τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν.

ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ διά τινος σημείου τοῦ Ε διήχθω ἡ ΕΖ τέμνουσα τὰς ΕΑ, ΑΓ.

ὅτι μὲν οὖν συμπίπτει τῇ τομῇ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον, φανερόν· ἡ γὰρ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΖ παράλληλος ἀγομένη ὡς ἡ ΑΒ τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΓΑΔ γωνίαν καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ καὶ διάμετρος αὐτῆς ἔσται· ἡ ΕΖ ἄρα συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον.

συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η.

λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Η τεταγμένως ἡ ΘΗΛΚ· ἡ ἄρα διὰ
H212 τοῦ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΗΘ. ἔστω ἡ ΓΔ. ἐπεὶ

AH^2, θὰ εἶναι (Εὐκλ. 5, 19) καὶ τὸ ὑπόλοιπον EB^2 : τὸ ὑπόλοιπον $\Delta A \times AZ$ (Εὐκλ. 2, 5) $= EH^2 : H\Delta^2 = EB^2 : BK^2$. (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι ἄρα τὸ $ZA \times A\Delta = BK^2$ (Εὐκλ. 5, 9).

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $\Delta\Gamma \times \Gamma Z = B\Lambda^2$. Εἶναι δὲ $KB^2 = B\Lambda^2$ (θ. 3)· εἶναι ἄρα καὶ $ZA \times A\Delta = Z\Gamma \times \Gamma\Delta$.

11

Ἐὰν εὐθεῖά τις τέμνῃ ἑκατέραν τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς, θὰ συναντᾷ τὴν ὑπερβολὴν εἰς ἓν μόνον σημεῖον, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ἀπολαμβανομένας μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν καὶ τὴν τομὴν θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου τῆς ἀχθείσης παραλλήλως πρὸς τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἀσύμπτωτοι εἶναι αἱ ΓΑ, ΑΔ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ διά τινος σημείου τοῦ Ε ἂς διαχθῇ ἡ ΕΖ τέμνουσα τὰς ΕΑ, ΑΓ.

Ὅτι μὲν συναντᾷ αὕτη τὴν τομὴν εἰς ἓν μόνον σημεῖον, εἶναι φανερόν· διότι ἡ διὰ τοῦ Α ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ ὅπως ἡ ΑΒ θὰ τμήσῃ τὴν γωνίαν ΓΑΔ (θ. 2) καὶ θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν (θ. 2) καὶ θὰ εἶναι διάμετρος αὐτῆς (1, 51 πόρισ.)· ἡ ΕΖ ἄρα θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν εἰς ἓν μόνον σημεῖον (1, 26).

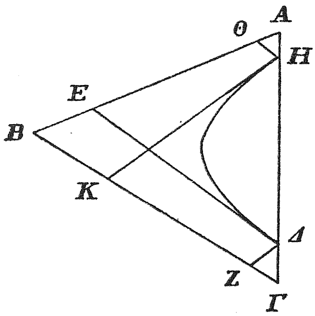
Ἔστω ὅτι τὴν συναντᾷ εἰς τὸ Η.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τὸ ὀρθογώνιον $EH \times HZ = AB^2$.

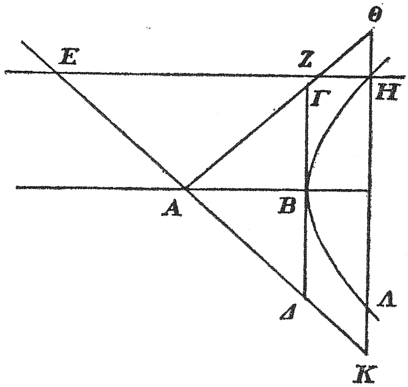
Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Η τεταγμένως ἡ ΘΗΛΚ· ἡ διὰ τοῦ Β ἄρα ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ (θ. 5). Ἔστω οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΓΒΔ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ καὶ τοῦ τῆς ΔΒ πρὸς ΒΑ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ, ἡ ΘΗ πρὸς ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, ἡ ΗΚ πρὸς ΗΕ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΘΗ πρὸς ΗΖ καὶ τῆς ΚΗ πρὸς ΗΕ. ἀλλὰ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ λόγος σύγκειται ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΕΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΚΗΘ τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐδείχθη· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΗΖ τῷ ἀπὸ ΑΒ.

ιβ′

Ἐὰν ἐπὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς β εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐν τυχούσαις γωνίαις, καὶ ταύταις παράλληλοι ἀχθῶσιν ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν, αἷς αἱ παράλληλοι ἤχθησαν.



ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ αὕτη ἡ ΓΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΒ = ΒΔ (θ. 3), εἶναι ἄρα $\Gamma B^2 : B A^2 = \Gamma B \times B\Delta : BA^2 = (\Gamma B : BA) \times (\Delta B : BA)$. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $\Gamma B : BA = \Theta H : HZ$, ὡς δὲ ἡ $\Delta B : BA = HK : HE$ (Εὐκλ. 6, 4)· ὁ λόγος ἄρα $\Gamma B^2 : BA^2 = (\Theta H : HZ) \times (KH : HE)$. Ἀλλὰ εἶναι καὶ $KH \times H\Theta : EH \times HZ = (\Theta H : HZ) \times (KH : HE)$· ὡς ἄρα $KH \times H\Theta : EH \times HZ = \Gamma B^2 : BA^2$. Ἐναλλὰξ εἶναι $KH \times H\Theta : \Gamma B^2 = EH \times HZ : AB^2$ (Εὐκλ. 5, 16).



Ἀπεδείχθη δὲ τὸ $KH \times \Theta H = \Gamma B^2$ (θ. 10)· εἶναι ἄρα τὸ $EH \times HZ = AB^2$ (Εὐκλ. 5, 14) (σημ. ἡ ΑΒ = 1/2 τῆς διαμέτρου).

12

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου τῆς τομῆς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὰς ἀσυμπτώτους σχηματίζουσαι τυχούσας γωνίας, καὶ ἀπὸ ἄλλου τυχόντος σημείου τῆς τομῆς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς ταύτας τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς πρώτας εὐθείας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ἀχθείσας πρὸς αὐτὰς παραλλήλους.

Ἔστω ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἀσύμπτωτοι εἶναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἂς

H214 τὰς ΑΒ, ΒΓ κατήχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἕτερον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η ταῖς ΕΔ, ΔΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΗΘ, ΗΚ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΗΚ.

ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΓ τῷ ὑπὸ ΑΗΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΑΔ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΑΔ, ἡ ΗΘ πρὸς ΕΔ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ, ἡ ΔΖ πρὸς ΗΚ· ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς ΔΕ, ἡ ΔΖ πρὸς ΗΚ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΗΚ.

ιγ'

Ἐὰν ἐν τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς παράλληλος ἀχθῇ τις εὐθεῖα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ε, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὰς ΓΑ, ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΗΓ, ΗΘ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓΗΘ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΑΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ παρὰ τὰς ΓΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΚΛ, ΚΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΚΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ ἴσον· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΚΛ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΚΛΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ·

καταχθῶσιν ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ αἱ ΔΕ, ΔΖ, ἂς ληφθῇ δὲ καὶ ἄλλο τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η ἂς ἀχθῶσιν πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΖ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΘΚ. Λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΕΔ x ΔΖ = ὀρθογώνιον ΘΗ x ΗΚ.

Διότι ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΗ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἐπὶ τὰ Α, Γ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΑΔ x ΔΓ = ΑΗ x ΗΓ (θ. 10), εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΗ:ΑΔ = ΔΓ:ΓΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ:ΑΔ = ΗΘ:ΕΔ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ:ΓΗ = ΔΖ:ΗΚ· ὡς ἄρα ἡ ΘΗ:ΔΕ = ΔΖ:ΗΚ. Εἶναι ἄρα τὸ ΕΔ x ΔΖ = ΘΗ x ΗΚ.

13

Ἐὰν εἰς τὸν ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς ἀφοριζόμενον τόπον ἀχθῇ εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην τῶν ἀσυμπτώτων, αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν εἰς ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστω ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἀσύμπτωτοι εἶναι αἱ ΓΑ, ΑΒ, καὶ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ δι' αὐτοῦ πρὸς τὴν ΑΒ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΕΖ. Λέγω, ὅτι αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς μὴ τὴν συναντήσῃ, καὶ ἂς ληφθῇ, σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η παραλλήλως πρὸς τὰς ΓΑ, ΑΒ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΗΓ, ΗΘ, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΓΗ x ΗΘ = ΑΕ x ΕΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΖ καὶ ἂς ἐκβληθῇ· αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν (θ. 2). Ἂς τὴν συναντήσῃ κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἂς ἀχθῶσι παραλλήλως πρὸς τὰς ΓΑ, ΑΒ αἱ ΚΛ, ΚΔ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΓΗ x ΗΘ = ΛΚ x ΚΔ (θ. 12). Εἶναι δὲ καὶ τὸ ΓΗ x ΗΘ = ΑΕ x ΕΖ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΔΚ x ΚΛ = ΚΛ x ΛΑ = ΑΕ x ΕΖ (Εὐκλ. 1,34)· ὅπερ ἀδύ-

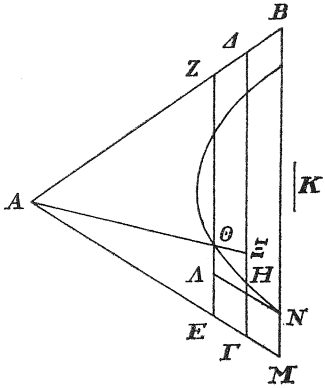
H216 ὅπερ ἀδύνατον· μείζων γάρ ἐστι καὶ ἡ ΚΛ τῆς ΕΖ καὶ ἡ ΛΑ τῆς ΑΕ. συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΕΖ τῇ τομῇ.

συμπιπτέτω κατὰ τὸ Μ.

λέγω δή, ὅτι κατ᾽ ἄλλο οὐ συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τῶν Μ, Ν τῇ ΓΑ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΜΞ, ΝΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΝΒ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα καθ᾽ ἕτερον σημεῖον συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

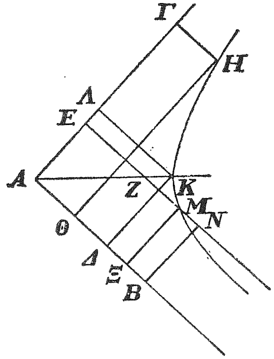
ιδʹ

Αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα.



ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΑΓ, δοθὲν δὲ διάστημα τὸ Κ. λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΑΓ καὶ ἡ τομὴ ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ εἰς ἔλασσον ἀφίξονται διάστημα τοῦ Κ.

ἤχθωσαν γὰρ τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλοι αἱ ΕΘΖ, ΓΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΓΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΘΕ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΗ πρὸς ΖΘ, ἡ ΘΕ πρὸς ΓΗ. μείζων δὲ ἡ ΔΗ τῆς ΖΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ νατον· διότι ἡ ΚΛ $>$ ΕΖ καὶ ἡ ΛΑ $>$ ΑΕ. Θὰ συναντήσῃ ἄρα ἡ ΕΖ τὴν τομήν.



Ἂς τὴν συναντήσῃ κατὰ τὸ Μ.

Λέγω τώρα, ὅτι κατ' ἄλλο σημεῖον δὲν θὰ τὴν συναντήσῃ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τὴν συναντήσῃ καὶ κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τῶν Μ, Ν ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὴν ΓΑ παράλληλοι αἱ ΜΞ, ΝΒ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΕΜ x ΜΞ εἶναι = ΕΝ x ΝΒ (θ. 12)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ συναντήσῃ λοιπὸν αὕτη κατ' ἄλλο σημεῖον τὴν τομήν.

14

Αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομὴ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον διαρκῶς πλησιάζουσι πρὸς ἀλλήλας καὶ φθάνουσιν εἰς ἀπόστασιν μεταξύ των μικροτέραν παντὸς δοθέντος μικροῦ διαστήματος.

Ἔστω ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἀσύμπτωτοι εἶναι αἱ ΑΒ, ΑΓ, δοθὲν δὲ διάστημα τὸ Κ. Λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΑΓ καὶ ἡ τομὴ ἐκβαλλόμεναι (εἰς ἄπειρον) πλησιάζουσι μεταξύ των καὶ θὰ φθάσωσιν εἰς ἀπόστασιν μικροτέραν τοῦ Κ.

Διότι ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην αἱ ΕΘΖ, ΓΗΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΘ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Ξ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΓΗ x ΗΔ = ΖΘ x ΘΕ (θ. 10), εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΔΗ : ΖΘ = ΘΕ : ΓΗ (Εὐκλ. 6, 16). Εἶναι δὲ ἡ ΔΗ $>$

τῆς *ΓΗ*. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἐλάττονές εἰσιν.

εἰλήφθω δὴ τοῦ *K* διαστήματος ἔλαττον τὸ *ΕΛ*, καὶ διὰ H218 τοῦ *Λ* τῇ *ΑΓ* παράλληλος ἤχθω ἡ *ΛΝ*· συμπεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ *N*, καὶ διὰ τοῦ *N* τῇ *ΕΖ* παράλληλος ἤχθω ἡ *ΜΝΒ*. ἡ ἄρα *ΜΝ* ἴση ἐστὶ τῇ *ΕΛ* καὶ διὰ τοῦτο ἐλάττων τῆς *K*.

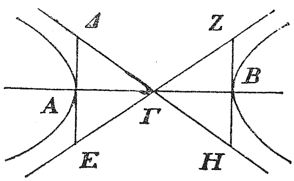
πόρισμα

ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πασῶν τῶν ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ ἔγγιόν εἰσιν αἱ *ΑΒ*, *ΑΓ*, καὶ ἡ ὑπὸ τῶν *ΒΑΓ* περιεχομένη γωνία ἐλάσσων ἐστὶ δηλαδὴ τῆς ὑπὸ ἑτέρων ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ περιεχομένης.

ιε′

Τῶν ἀντικειμένων τομῶν κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαί, ὧν διάμετρος ἡ *ΑΒ*, κέντρον δὲ τὸ *Γ*. λέγω, ὅτι τῶν *Α*, *Β* τομῶν κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.



ἤχθωσαν διὰ τῶν *Α*, *Β* σημείων ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ *ΔΑΕ*, *ΖΒΗ*· παράλληλοι ἄρα εἰσίν. ἀπειλήφθω δὴ ἑκάστη τῶν *ΔΑ*, *ΑΕ*, *ΖΒ*, *ΒΗ* ἴσον δυναμένη τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν *ΑΒ* εἴδους· ἴσαι ἄρα αἱ *ΔΑ*, *ΑΕ*, *ΖΒ*, *ΒΗ*. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ *ΓΔ*, *ΓΕ*, *ΓΖ*, *ΓΗ*. φανερὸν δή, ὅτι ἐπ᾽

ΖΘ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΕΘ $>$ ΓΗ (Εὐκλ. 5, 14). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ ἐν συνεχείᾳ λαμβανόμεναι ἀποστάσεις εἶναι μικρότεραι.

Ἄς ληφθῇ λοιπὸν τοῦ διαστήματος Κ μικρότερον τὸ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ΛΝ· θὰ συναντήσῃ ἄρα τὴν τομὴν (θ. 13). Ἄς τὴν συναντήσῃ εἰς τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ ἡ ΜΝΒ. Εἶναι ἄρα ΜΝ $=$ ΕΛ καὶ διὰ τοῦτο $<$ τῆς Κ.

Πόρισμα

Ἐκ τούτου λοιπὸν εἶναι φανερόν, ὅτι ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες δὲν συναντῶσι τὴν ὑπερβολὴν πλησιέστεραι εἶναι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἡ μικροτέρα πάσης γωνίας σχηματιζομένης ὑπὸ εὐθειῶν, αἵτινες δὲν συναντῶσι τὴν ὑπερβολήν.

15

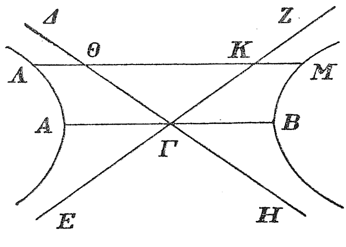
Τῶν ἀντικειμένων τομῶν αἱ ἀσύμπτωτοι εἶναι κοιναί.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαί, τῶν ὁποίων διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ. Λέγω, ὅτι τῶν τομῶν Α, Β αἱ ἀσύμπτωτοι εἶναι κοιναί.

Ἄς ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔΑΕ, ΖΒΗ· εἶναι ἄρα αὗται παράλληλοι (θ. 5). Ἄς ληφθῇ λοιπὸν τὸ τετράγωνον ἑκάστης τῶν ΔΑ, ΑΕ, ΖΒ, ΒΗ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $1/4$ τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν ΑΒ καὶ τὴν παράμετρον· εἶναι ἄρα ΔΑ $=$ ΑΕ $=$ ΖΒ $=$ ΒΗ. Ἄς ἐπιζευχθῶσι τώρα αἱ ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ. Εἶναι φανερὸν λοιπόν, εὐθείας ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΗ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΓΖ διὰ τὰς παραλλήλους. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΑ, ΑΕ δύναται τὸ τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους, ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΔΓ, ΓΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῇ Β ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΖΓ, ΓΗ. τῶν ἀντικειμένων ἄρα κοιναί εἰσιν ἀσύμπτωτοι.

H220 ιϛ′

Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν περιεχουσῶν τὰς τομάς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον, καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ᾽ αὐτῆς ὑπὸ τῶν τομῶν πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.



ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον μὲν τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΓΗ, ΕΓΖ, καὶ διήχθω τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τῶν ΔΓ, ΓΖ ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν καθ᾽ ἓν σημεῖον μόνον.

ἐπεὶ γὰρ τῆς Α τομῆς ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΔΓ, ΓΕ, καὶ διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΚ τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΔΓΖ, ἡ ΚΘ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ ⟨Α⟩. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ Β.

ὅτι εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΓ, ΓΗ καὶ αἱ ΓΕ, ΓΖ διὰ τὰς παραλλήλους (Εὐκλ. 1, 33). Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει ὑπερβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔΕ, καὶ τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν ΔΑ, ΑΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ 1/4 τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ τὴν παράμετρον, εἶναι ἄρα αἱ ΔΓ, ΓΕ ἀσύμπτωτοι (θ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ εἰς τὸν κλάδον Β αἱ ΖΓ, ΓΗ εἶναι ἀσύμπτωτοι.

16

Ἐὰν εἰς ἀντικειμένας (κλάδους τῆς ὑπερβολῆς) ἀχθῇ εὐθεῖά τις τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν περιεχουσῶν τὰς τομάς, θὰ συναντᾷ αὕτη ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων εἰς ἓν μόνον σημεῖον, καὶ τὰ τμήματα τὰ ἀπολαμβανόμενα ἀπ' αὐτῆς ἀπὸ τὰς τομὰς μέχρι τῶν ἀσυμπτώτων εἶναι ἴσα.

Διότι ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, τῶν ὁποίων κέντρον μὲν εἶναι τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΓΗ, ΕΓΖ, καὶ ἂς διαχθῇ εὐθεῖά τις τέμνουσα ἑκατέραν τῶν ΔΓ, ΓΖ ἡ ΘΚ. Λέγω, ὅτι αὕτη ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν εἰς ἓν μόνον σημεῖον.

Διότι, ἐπειδὴ τῆς τομῆς Α εἶναι ἀσύμπτωτοι αἱ ΔΓ, ΓΕ, καὶ ἔχει διαχθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΘΚ τέμνουσα ἑκατέραν πλευρὰν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων, τὴν ΔΓΖ, ἡ ΚΘ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν ⟨Α⟩ (θ. 11). Ἐπίσης καὶ τὴν Β.

συμπιπτέτω κατὰ τὰ Λ, Μ.

ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΛΜ παράλληλος ἡ ΑΓΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΚΛΘ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΚ τῷ ἀπὸ ΓΒ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΘ τῷ ὑπὸ ΘΜΚ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΚΜ.

ιζ´

Τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

ἔστωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι, ὧν αἱ διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε. λέγω, ὅτι κοιναὶ αὐτῶν εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

H222 ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων αἱ ΖΑΗ, ΗΔΘ, ΘΒΚ, ΚΓΖ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ. ἐπεζεύχθωσαν οὖν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ· εὐθεῖαι ἄρα εἰσὶ καὶ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ δίχα τέμνονται πᾶσαι κατὰ τὸ Ε σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τὸ πρὸς τῇ ΑΒ εἶδος ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ ἴση δὲ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ, ἕκαστον ἄρα τῶν ἀπὸ ΖΑ, ΑΗ, ΚΒ, ΒΘ τέταρτόν ἐστι τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους. ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶ τῶν Α, Β τομῶν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῶν Γ, Δ τομῶν αἱ αὐταί εἰσιν ἀσύμπτωτοι. τῶν ἄρα κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναί εἰσιν ἀσύμπτωτοι.

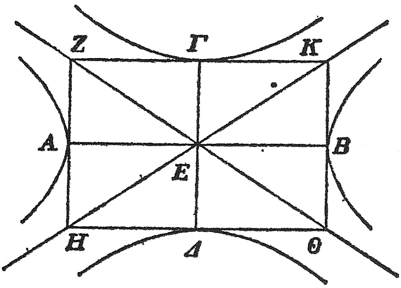
Ἂς τὰς συναντήσῃ κατὰ τὰ σημεῖα Λ, Μ.

Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΛΜ παράλληλος ἡ ΑΓΒ· εἶναι ἄρα τὸ μὲν ΚΛ x ΛΘ $=$ ΑΓ^2, τὸ δὲ ΘΜ x ΜΚ $=$ ΓΒ^2 (θ. 11). Ὥστε καὶ τὸ ΚΛ x ΛΘ $=$ ΘΜ x ΜΚ, καὶ ἡ ΛΘ $=$ ΚΜ.

17

Τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων αἱ ἀσύμπτωτοι εἶναι κοιναί.

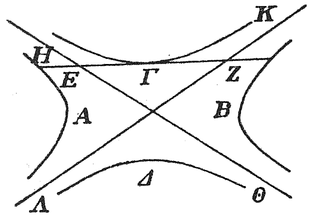
Ἔστωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων διάμετροι συζυγεῖς εἶναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε. Λέγω, ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι αὐτῶν εἶναι κοιναί.



Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων αἱ ΖΑΗ, ΗΔΘ, ΘΒΚ, ΚΓΖ· εἶναι ἄρα τὸ ΖΗΘΚ παραλληλόγραμμον (θ. 5). Ἂς ἐπιζευχθῶσι λοιπὸν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ· εἶναι ἄρα αὗται εὐθεῖαι καὶ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ ὅλαι τέμνονται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε (θ. 15). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ΑΒ καὶ τὴν παράμετρον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΓΔ^2 (1, 56), εἶναι δὲ ἡ ΓΕ $=$ ΕΔ, ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΑ^2, ΑΗ^2, ΚΒ^2, ΒΘ^2 εἶναι τὸ 1/4 τοῦ μνημονευθέντος ὀρθογωνίου (πλευρᾶς ΑΒ καὶ παραμέτρου). Εἶναι ἀσύμπτωτοι ἄρα τῶν τομῶν Α, Β αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ (θ. 1). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τῶν τομῶν Γ, Δ εἶναι αἱ αὐταὶ ἀσύμπτωτοι. Εἶναι ἄρα τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων (κλάδων) αἱ ἀσύμπτωτοι κοιναί.

ιη΄

Ἐὰν μιᾷ τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων συμπίπτουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον.



ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῇ Γ τις εὐθεῖα συμπιπτέτω ἡ ΕΖ καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν Α, Β τομῶν καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον.

ἔστωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΗΘ, ΚΛ. ἡ
H224 ΕΖ ἄρα συμπίπτει ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΚΛ. φανερὸν οὖν, ὡς καὶ ταῖς Α, Β τομαῖς συμπεσεῖται καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον.

ιθ΄

Ἐὰν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἐπιψαύουσα, ἧς ἔτυχε τῶν τομῶν, συμπεσεῖται ταῖς ἐφεξῆς τομαῖς καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἁφήν.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῆς Γ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΓΖ. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Γ.

ὅτι μὲν οὖν συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς, φανερόν· συμπιπτέτω κατὰ τὰ Η, Θ.

18

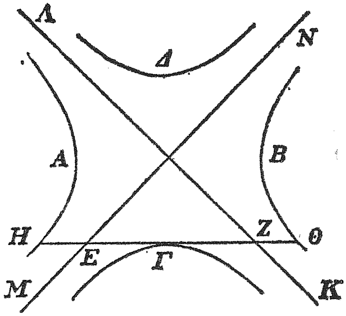
Ἐὰν εὐθεῖα συναντῶσα μίαν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη πίπτη ἐκτὸς τῆς τομῆς, θὰ συναντήση ἑκατέραν τῶν ἐφεξῆς τομῶν εἰς ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ εὐθεῖά τις ἂς συναντήση τὴν Γ ἡ ΕΖ καὶ ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἂς πέση ἐκτὸς τῆς τομῆς (Γ). Λέγω, ὅτι θὰ συναντήση ἑκατέραν τῶν τομῶν Α, Β εἰς ἓν μόνον σημεῖον.

Διότι ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΗΘ, ΚΛ. Ἡ ΕΖ ἄρα συναντᾷ ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΚΛ (θ. 3). Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι θὰ συναντήση καὶ τὰς τομὰς Α, Β εἰς ἓν μόνον σημεῖον.

19

Ἐὰν εὐθεῖά τις ἀχθῇ ἐφαπτομένη μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων, θὰ συναντήση τὰς ἐφεξῆς τομὰς καὶ θὰ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὴν ἁφήν.



Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἂς ἐφάπτηται τῆς Γ εὐθεῖά τις ἡ ΕΓΖ. Λέγω, ὅτι αὕτη ἐκβαλλομένη θὰ συναντήση τὰς τομὰς Α, Β καὶ θὰ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ.

Ὅτι μὲν λοιπὸν θὰ συναντήση τὰς τομὰς Α, Β εἶναι φανερὸν (θ. 18)· ἂς τὰς συναντήση κατὰ τὰ Η, Θ.

λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΓΘ.

ἤχθωσαν γὰρ αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΚΛ, ΜΝ. ἴση ἄρα ἡ ΕΗ τῇ ΖΘ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΓΖ, καὶ ὅλη ἡ ΓΗ τῇ ΓΘ ἐστιν ἴση.

κʹ

Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν διὰ τῆς ἁφῆς, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἕως οὗ συμπέσῃ μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν, ἡ κατὰ τὴν σύμπτωσιν ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ διὰ τῆς
H226 *ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ, αἱ δὲ διὰ τῶν ἁφῶν καὶ τοῦ κέντρου συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.*

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Χ, καὶ τῆς Α τομῆς ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ΓΧ κατὰ τὸ Τ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τοῦ Χ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΧΗ, καὶ διὰ τοῦ Η ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΘΗ. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΘΗ τῇ ΧΕ, αἱ δὲ ΗΟ, ΕΞ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.

ἤχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΚΕ, ΗΛ, ΓΡΠ, παρ᾽ ἃς δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι, ἔστωσαν αἱ ΑΜ, ΓΝ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΜ, ἡ ΝΓ πρὸς ΓΔ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΜ, τὸ ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ, ὡς δὲ ἡ ΝΓ πρὸς ΓΔ, τὸ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ, καὶ ὡς ἄρα

Λέγω, ὅτι ἡ ΓΗ = ΓΘ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΚΛ, ΜΝ. Εἶναι ἄρα ἡ ΕΗ = ΖΘ (θ. 16), καὶ ΓΕ = ΓΖ (θ. 3), καὶ ὅλη ἡ ΓΗ = ΓΘ.

20

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν νὰ διέρχηται διὰ τῆς ἁφῆς, ἡ δὲ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, μέχρις ὅτου συναντήσῃ μίαν τῶν ἐφεξῆς τομῶν, ἡ κατὰ τὸ σημεῖον συμπτώσεως ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εὐθεῖα θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διερχομένην διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ διερχόμεναι διὰ τῶν ἁφῶν καὶ τοῦ κέντρου θὰ εἶναι συζυγεῖς διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

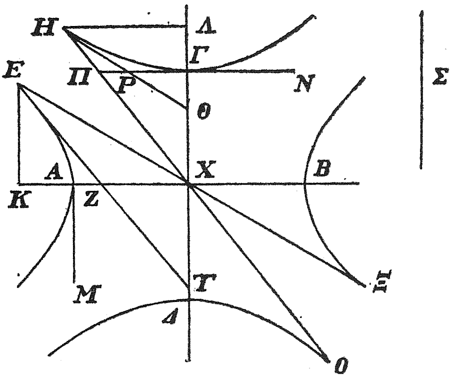
Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων διάμετροι συζυγεῖς εἶναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Χ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς Α ἡ ΕΖ καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ αὕτη ἂς συναντήσῃ τὴν ΓΧ κατὰ τὸ Τ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΧ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τοῦ Χ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΕΖ παράλληλος ἡ ΧΗ, καὶ διὰ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΘΗ. Λέγω, ὅτι ἡ ΘΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΧΕ, αἱ δὲ ΗΟ, ΕΞ εἶναι συζυγεῖς διάμετροι.

Διότι ἂς ἀχθῶσι τεταγμένως αἱ ΚΕ, ΗΛ, ΓΡΠ παράμετροι δὲ ἀντιστοίχως ἔστωσαν αἱ ΑΜ, ΓΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς: ἡ ΒΑ:ΑΜ = ΝΓ:ΓΔ (1, 56), ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ:ΑΜ = ΧΚ x ΚΖ: ΚΕ^2, ὡς δὲ ἡ ΝΓ:ΓΔ = ΗΛ^2:ΧΛ x ΛΘ (1, 37), καὶ ὡς ἄρα

τὸ ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΗΛ πρὸς ΛΧ, καὶ ἡ ΗΛ πρὸς ΛΘ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ καὶ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ ἐκ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΧ καὶ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΘ· ὧν ὁ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΧ λόγῳ· ἑκάστη γὰρ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΕ ἑκάστῃ τῶν ΧΛ, ΛΗ,
H228 ΗΧ παράλληλός ἐστι. λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΘ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Κ, Λ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΚΧ τρίγωνον τῷ ΗΘΛ καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΧΚ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΚΧΗ τῇ ὑπὸ ΛΗΧ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΧΗ τῇ ὑπὸ ΘΗΧ ἐστιν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ τῇ ΗΘ.

πεποιήσθω δή, ὡς ἡ ΠΗ πρὸς ΗΡ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς Σ· ἡ Σ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΗΟ διάμετρον καταγόμεναι ἐν ταῖς Γ, Δ τομαῖς. καὶ ἐπεὶ τῶν Α, Β τομῶν δευτέρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ΕΤ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΤΧ καὶ τῆς ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ· ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΚΧ παράλληλον ἄγωμεν, τὸ ὑπὸ τῆς ΤΧ καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ ΓΧ. διὰ δὲ τοῦτό ἐστιν, ὡς ἡ ΤΧ πρὸς ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΧΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΤΧ

$ΧΚ \times ΚΖ : ΕΚ^2 = ΗΛ^2 : ΧΛ \times ΛΘ$. Ἀλλὰ τὸ μὲν $ΧΚ \times ΚΖ : ΚΕ^2 = (ΧΚ:ΚΕ) \times (ΖΚ:ΚΕ)$, τὸ δὲ $ΗΛ^2 : ΧΛ \times ΛΘ = (ΗΛ:ΛΧ) \times (ΗΛ:ΛΘ)$· ὁ λόγος ἄρα $(ΧΚ:ΚΕ) \times (ΖΚ:ΚΕ) = (ΗΛ:ΛΧ) \times (ΗΛ:ΛΘ)$· τῶν ὁποίων λόγων ὁ $ΖΚ:ΚΕ = ΗΛ:ΛΧ$ (Εὐκλ. 1, 29 . 6,4)· διότι ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΕ εἶναι παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΧΛ, ΛΗ, ΗΧ (1 ὁρισ. 6). Ὁ ἄλλος ἄρα λόγος $ΧΚ:ΚΕ = ΗΛ:ΛΘ$. Καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς Κ, Λ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΚΧ ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΘΛ καὶ θὰ ἔχῃ τὰς ἀπέναντι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν γωνίας ἴσας (Εὐκλ. 6, 6). Εἶναι ἄρα ἡ γωνία



$ΕΧΚ =$ γωνίαν ΛΗΘ. Εἶναι δὲ καὶ ὅλη ἡ γωνία $ΚΧΗ = ΛΗΧ$ (Εὐκλ. 1, 29)· καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα γωνία $ΕΧΗ = ΘΗΧ$. Εἶναι ἄρα ἡ ΕΧ παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ (Εὐκλ. 1, 27).

Ἂς γίνῃ λοιπόν, ὡς $ΠΗ:ΗΡ = ΘΗ:Σ$· ἡ Σ ἄρα εἶναι τὸ 1/2 τῆς παραμέτρου τῶν τομῶν Γ, Δ (ὑπερβολῶν), ὅπου διάμετρος εἶναι ἡ ΗΟ (1, 51). Καὶ ἐπειδὴ τῶν τομῶν Α, Β δευτέρα διάμετρος εἶναι ἡ ΓΔ (1, 56), καὶ συναντᾷ αὕτη τὴν ΕΤ, θὰ εἶναι ἄρα $ΤΧ \times ΕΚ = ΓΧ^2$· διότι ἐὰν ἀπὸ τοῦ Ε φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΚΧ, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ΤΧ καὶ τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς παραλλήλου $= ΓΧ^2$ (1, 38). Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν εἶναι $ΤΧ:ΕΚ = ΤΧ^2:ΧΓ^2$ (Εὐκλ. 6, 17.

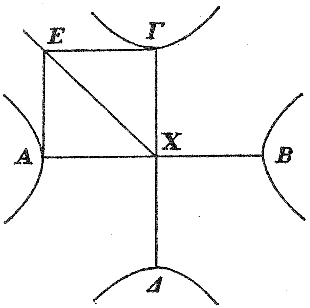
πρὸς ΕΚ, ἡ ΤΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστι τὸ ΤΧΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖΧ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΧ, τὸ ΧΤΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΧΓΠ, τουτέστι πρὸς τὸ ΗΘΧ. ὡς ἄρα τὸ ΤΧΖ πρὸς τὸ ΕΖΧ, τὸ ΤΖΧ πρὸς τὸ ΧΗΘ. ἴσον ἄρα τὸ ΗΘΧ τρίγωνον τῷ ΧΕΖ. ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ΘΗΧ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΧΕΖ γωνίᾳ ἴσην· παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ μὲν ΕΧ τῇ ΗΘ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΗΧ. ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αἱ πλευραὶ αἱ
H230 *περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΕΧ, ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΧ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ, ἡ ΡΗ πρὸς ΗΠ, ὡς δὲ ἡ ΡΗ πρὸς ΗΠ, ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ· παράλληλοι γάρ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ, ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Σ πρὸς ΘΗ, τῆς ΧΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης τὸ ὑπὸ Σ, ΧΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗΧ, ὡς δὲ ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΖ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Σ, ΧΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗΧ, τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΖ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ Σ, ΗΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΧ, τὸ ὑπὸ ΘΗΧ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΕΧ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Σ, ΗΧ τῷ ἀπὸ ΕΧ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ Σ, ΗΧ τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν ΗΟ εἴδους· ἥ τε γὰρ ΗΧ τῆς ΗΟ ἐστιν ἡμίσεια, καὶ ἡ Σ τῆς παρ' ἣν δύνανται· τὸ δὲ ἀπὸ ΕΧ τέταρτον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΞ· ἴση γὰρ ἡ ΕΧ τῇ ΧΞ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΞ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ ΗΟ εἴδει. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΗΟ δύναται τὸ παρὰ τὴν ΕΞ εἶδος. αἱ ἄρα ΕΞ, ΗΟ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν Α, Β, Γ, Δ ἀντικειμένων.*

5 όρισ. 9). Ἀλλ' ὡς μὲν ΤΧ:ΕΚ = ΤΖ:ΖΕ = τρίγωνον ΤΧΖ: τρίγωνον ΕΖΧ (Εὐκλ. 6, 1), ὡς δὲ $ΤΧ^2$:$ΓΧ^2$ = τρίγωνον ΧΤΖ: τρίγ. ΧΓΠ = ΧΤΖ:ΗΘΧ (1, 43). Ὡς ἄρα τὸ ΤΧΖ:ΕΖΧ = τὸ ΤΖΧ : τὸ ΧΗΘ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΗΘΧ = τρίγ. ΧΕΖ (Εὐκλ. 5, 9). Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΘΗΧ = γωνίαν ΧΕΖ (Εὐκλ. 1, 29)· διότι ἡ μὲν ΕΧ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ, ἡ δὲ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΧ. Αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας ἄρα πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι (Εὐκλ. 6, 15). Εἶναι ἄρα ΗΘ:ΕΧ = ΕΖ:ΗΧ (Εὐκλ. 6, 16)· εἶναι ἄρα ΘΗ x ΗΧ = ΧΕ x ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι Σ:ΘΗ = ΡΗ:ΗΠ καὶ ΡΗ:ΗΠ = ΧΕ:ΕΖ (Εὐκλ. 6, 4)· διότι εἶναι παράλληλοι· καὶ ὡς ἄρα ἡ Σ:ΘΗ = ΧΕ:ΕΖ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Σ:ΘΗ, τῆς ΧΗ λαμβανομένης ὡς κοινοῦ ὕψους = Σ x ΧΗ : ΘΗ x ΗΧ, ὡς δὲ ἡ ΧΕ:ΕΖ = $ΧΕ^2$:ΧΕ x ΕΖ. Καὶ ὡς ἄρα τὸ Σ x ΧΗ:ΘΗ x ΗΧ = $ΧΕ^2$:ΧΕ x ΕΖ. Ἐναλλὰξ εἶναι, ὡς τὸ Σ x ΗΧ:$ΕΧ^2$ = ΘΗ x ΗΧ : ΖΕ x ΕΧ (Εὐκλ. 5, 16). Εἶναι δὲ τὸ ΘΗ x ΗΧ = ΧΕ x ΕΖ· εἶναι ἄρα τὸ Σ x ΗΧ = $ΕΧ^2$ (Εὐκλ. 5, 14). Καὶ εἶναι τὸ μὲν Σ x ΗΧ = 1/4 τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν ΗΟ καὶ τὴν παράμετρον· διότι καὶ ἡ ΗΧ = 1/2ΗΟ (1, 30) καὶ ἡ Σ = 1/2 τῆς παραμέτρου· τὸ δὲ $ΕΧ^2$ = 1/4$ΕΞ^2$· διότι ἡ ΕΧ = ΧΞ (1, 30). Εἶναι ἄρα τὸ $ΕΞ^2$ = τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ΗΟ καὶ τὴν παράμετρον. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ $ΗΟ^2$ = πρὸς ὀρθογώνιον ἔχον πλευρὰς τὴν ΕΞ καὶ τὴν παράμετρον. Εἶναι ἄρα αἱ ΕΞ, ΗΟ συζυγεῖς διάμετροι τῶν ἀντικειμένων Α, Β, Γ, Δ (1, 56).

κα'

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων δεικτέον, ὅτι ἡ σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων πρὸς μίαν τῶν ἀσυμπτώτων ἐστίν.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαί, ὧν αἱ διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ. λέγω, ὅτι τὸ Ε σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.



H232 *ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους, τῷ δὲ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους. ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ· ἀσύμπτωτος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ. τὸ ἄρα Ε σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.*

κβ'

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καὶ ταῖς ἀσυμπτώτοις, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων τῶν γινομένων μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῶν ἀσυμπτώτων ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνῳ.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἀσύμπτωτοι δὲ τῶν τομῶν ἔστωσαν αἱ ΧΕΖ, ΧΗΘ,

21

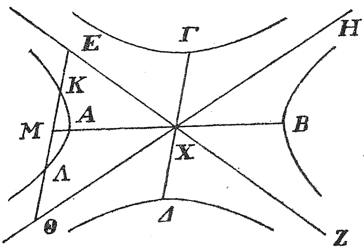
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο ἐφαπτομένων κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαί, τῶν ὁποίων αἱ διάμετροι εἶναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕ, ΕΓ. Λέγω, ὅτι τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτου.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΓΧ^2 = 1/4$ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΒ καὶ τῆς παραμέτρου (1, 56), πρὸς δὲ τὸ $ΓΧ^2 = ΑΕ^2$, εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΑΕ^2 = 1/4$ τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου (τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ). Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΧ· εἶναι ἄρα ἀσύμπτωτος ἡ ΕΧ (θ. 1). Τὸ σημεῖον Ε ἄρα κεῖται ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτου.

22

Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἀχθῇ εὐθεῖά τις πρὸς οἱανδήποτε τῶν τομῶν, καὶ πρὸς ταύτην ἀχθῇ παράλληλος συναντῶσα μίαν τῶν ἐφεξῆς τομῶν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῶν ἀσυμπτώτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἀχθείσης.



Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἀσύμπτωτοι δὲ τῶν τομῶν ἔστωσαν αἱ ΧΕΖ, ΧΗΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Χ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΧΓΔ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω τέμνουσα τήν τε ἐφεξῆς τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἡ ΘΕ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΕΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ.

τετμήσθω δίχα ἡ ΚΛ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΧ ἐκβεβλήσθω· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῶν Α, Β τομῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΘ, ἡ ἄρα ΕΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως ἐστὶ κατηγμένη. καὶ κέντρον τὸ Χ· αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴ-
H234 δους. τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ· καὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ.

κγʹ

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου τις ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα ταῖς ἐφεξῆς τρισὶ τομαῖς, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων τῶν γινομένων μεταξὺ τῶν τριῶν τομῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνου.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, κέντρον δὲ τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἀπὸ τοῦ Χ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν προσπιπτέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΧ, καὶ τῇ ΓΧ παράλληλος ἤχθω τέμνουσα τὰς ἐφεξῆς τρεῖς τομὰς ἡ ΚΛ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ.

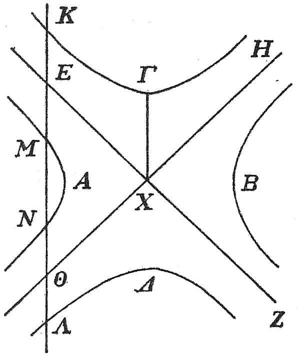
κέντρου τοῦ Χ ἃς διαχθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΧΓΔ, καὶ πρὸς αὐτὴν ἃς ἀχθῇ παράλληλος τέμνουσα καὶ τὴν ἐφεξῆς τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἡ ΘΕ. Λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΕΚ x ΚΘ $=$ ΓΧ².

Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΚΛ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΜΧ ἃς ἐκβληθῇ· εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ διάμετρος τῶν τομῶν Α, Β (1, 51 πόρισ.). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΘ (θ. 5), ἡ ΕΘ ἄρα εἶναι ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως κατηγμένη. Καὶ τὸ Χ εἶναι κέντρον· εἶναι ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ συζυγεῖς διάμετροι (1 ὁρισ. 6). Εἶναι ἄρα τὸ ΓΧ² $=1/4$ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΒ καὶ τῆς παραμέτρου (1, 56). Πρὸς τὸ $1/4$ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου $=$ τὸ ΘΚ x ΚΕ (θ. 10)· εἶναι ἄρα ΘΚ x ΚΕ $=$ ΓΧ².

23

Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἀχθῇ εὐθεῖά τις πρὸς οἱανδήποτε τῶν τομῶν, καὶ πρὸς ταύτην ἀχθῇ παράλληλος συναντῶσα τὰς ἐφεξῆς τρεῖς τομάς, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰ τμήματα τῆς ἀχθείσης τὰ μεταξὺ τῶν τριῶν τομῶν εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἀγομένης εὐθείας.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, κέντρον δὲ τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἀπὸ τοῦ Χ ἃς προσπέσῃ πρὸς οἱανδήποτε τῶν τομῶν εὐθεῖά τις ἡ ΓΧ, καὶ πρὸς τὴν ΓΧ ἃς ἀχθῇ παράλληλος τέμνουσα τὰς ἐφεξῆς τρεῖς τομὰς ἡ ΚΛ. Λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΚΜ x ΜΛ $=2$ΓΧ².



ἤχθωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶν ἑκατέρῳ τῶν ὑπὸ ΘΜΕ, ΘΚΕ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ διὰ τὸ τὰς ἄκρας ἴσας εἶναι. καὶ τὸ ὑπὸ ΛΜΚ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ.

κδʹ

Ἐὰν ⟨ἐν⟩ παραβολῇ δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσιν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιέχηται, ⟨ἐκβαλλόμεναι⟩ συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι ἐκτὸς τῆς τομῆς.

ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒΓΔ, καὶ τῇ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι συμπιπτέτωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμ-
H236 πτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιεχέσθω. λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις.

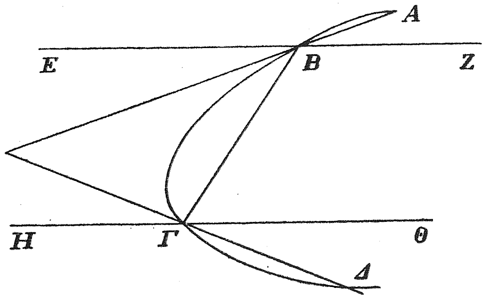
ἤχθωσαν διὰ τῶν Β, Γ διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΕΒΖ, ΗΓΘ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶ καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἑκατέρα τὴν τομὴν τέμνει. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΒΓ, ΒΓΗ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ δὲ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι ἐλάττονας ποιοῦσι δύο ὀρθῶν. συμπεσοῦνται ἄρα ἀλλήλαις ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Ἂς ἀχθῶσιν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ· εἶναι ἄρα τὸ $\Gamma X^2 = \Theta M \times ME$ (θ. 22) καὶ $= \Theta K \times KE$ (θ. 11). Εἶναι δὲ τὸ $\Theta M \times ME + \Theta K \times KE = \Lambda M \times MK$, διότι τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν εἶναι ἴσα (θ. 8 καὶ 16). Εἶναι ἄρα τὸ $\Lambda M \times MK = 2\Gamma X^2$.

24

Ἐὰν ἑκατέρα ἐκ δύο εὐθειῶν τέμνῃ παραβολὴν κατὰ δύο σημεῖα, τὰ σημεῖα δὲ τομῶν τῆς μιᾶς νὰ μὴ συμπίπτωσι πρὸς τὰ σημεῖα τομῶν τῆς ἄλλης, αὗται ⟨ἐκβαλλόμεναι⟩ θὰ συναντηθῶσι μεταξύ των ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒΓΔ καὶ ἂς συναντῶσι τὴν παραβολὴν ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, τὰ σημεῖα δὲ τομῆς τῆς μιᾶς εὐθείας νὰ μὴ συμπίπτωσι πρὸς τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ἄλλης. Λέγω, ὅτι αὗται ἐκβαλλόμεναι θὰ συναντηθῶσι μεταξύ των.



Ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν Β, Γ διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΕΒΖ, ΗΓΘ· εἶναι ἄρα αὗται παράλληλοι (1, 51 πόρ.) καὶ ἑκατέρα τέμνει τὴν τομὴν μόνον εἰς ἓν σημεῖον (1, 26). Ἂς ἐπιζευχθῇ τώρα ἡ ΒΓ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν ΕΒΓ, ΒΓΗ = 2 ὀρθὰς (1, 29), αἱ δὲ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι σχηματίζουσι γωνίαν μικροτέραν τῶν 2 ὀρθῶν. Θὰ συναντηθῶσιν ἄρα μεταξύ των ἐκτὸς τῆς τομῆς (Εὐκλ. 1, αἴτημα 5).

κε΄

Ἐὰν ⟨ἐν⟩ ὑπερβολῇ δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσιν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιέχηται, ⟨ἐκβαλλόμεναι⟩ συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ AB, $A\Gamma$, καὶ τεμνέτωσαν δύο εὐθεῖαι τὴν τομὴν αἱ EZ, $H\Theta$, καὶ μηδετέρας αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας περιεχέσθω. λέγω, ὅτι αἱ EZ, $H\Theta$ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ ΓAB γωνίας.

ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ AZ, $A\Theta$ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $Z\Theta$. καὶ ἐπεὶ αἱ EZ, $H\Theta$ ἐκβαλλόμεναι τέμνουσι τὰς ὑπὸ $AZ\Theta$, $A\Theta Z$ γωνίας, εἰσὶ δὲ αἱ εἰρημέναι γωνίαι H238 δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, αἱ EZ, $H\Theta$ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνίας.

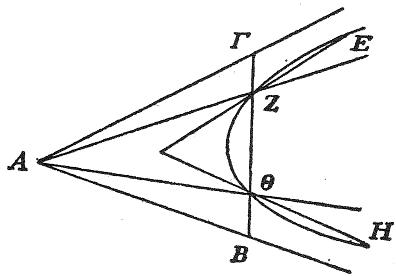
ὁμοίως δὴ δείξομεν, κἂν ἐφαπτόμεναι ὦσι τῶν τομῶν αἱ EZ, $H\Theta$.

κϛ΄

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι , οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

25

Ἐὰν ἑκατέρα ἐκ δύο εὐθειῶν τέμνῃ ὑπερβολὴν κατὰ δύο σημεῖα, τὰ σημεῖα δὲ τομῶν τῆς μιᾶς νὰ μὴ συμπίπτωσι πρὸς τὰ σημεῖα τομῶν τῆς ἄλλης, αὗται ⟨ἐκβαλλόμεναι⟩ θὰ συναντηθῶσιν ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς γωνίας τῆς περιεχούσης τὴν τομήν.



Ἔστω ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἀσύμπτωτοι εἶναι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἂς τέμνωσι τὴν τομὴν δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΗΘ, νὰ μὴ συμπίπτωσι δὲ τὰ σημεῖα τῶν τομῶν τῆς μιᾶς πρὸς τὰ σημεῖα τῶν τομῶν τῆς ἄλλης. Λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι θὰ συμπέσωσι μὲν ἐκτὸς τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς γωνίας ΓΑΒ.

Διότι ἀφοῦ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΑΘ ἂς ἐκβληθῶσι, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΘ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι τέμνουσι τὰς γωνίας ΑΖΘ, ΑΘΖ, εἶναι δὲ αἱ εἰρημέναι γωνίαι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν (Εὐκλ. 1, 17), αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι θὰ συναντηθῶσι μεταξύ των ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἂν αἱ ΕΖ, ΗΘ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν.

26

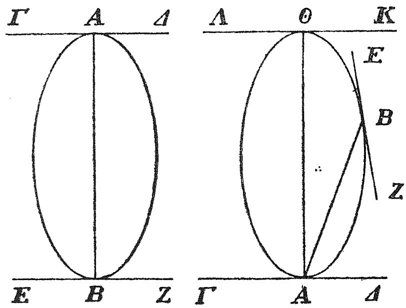
Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν ἢ περιφέρειαν κύκλου δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΕΖ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Β.

ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τὴν ΕΖ δίχα τέμνουσα, ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῇ ΓΔ. ὥστε καὶ ἡ ΕΖ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ΓΔ, ΕΖ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

κζʹ

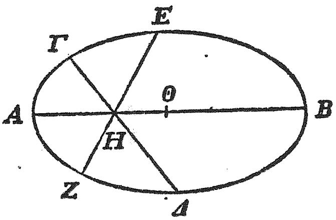
Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύωσιν, ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ᾖ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι, ἐὰν δὲ μή, συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου.



ἔστω ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῆς αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ, καὶ
H240 ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ.

ἐπεὶ γὰρ διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς τομῆς, καὶ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Α ἡ ΓΔ, ἡ ΓΔ ἄρα παράλληλός ἐστι ταῖς

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΕΖ εἰς ἔλλειψιν ἢ περιφέρειαν κύκλου, μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, ἂς τέμνωνται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον εἰς τὸ σημεῖον Η, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Θ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΘ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τῶν σημείων Α, Β.



Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος τέμνουσα τὴν ΕΖ εἰς τὸ μέσον, ἡ ἐφαπτομένη ἄρα εἰς τὸ Α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ (θ. 6). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΓΔ. Ὥστε καὶ ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (Εὐκλ. 1, 30)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν τέμνονται ἄρα εἰς τὸ μέσον μεταξύ των αἱ ΓΔ, ΕΖ.

27

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας, ἐὰν μὲν ἡ ἑνοῦσα τὰς ἁφὰς διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, αἱ ἐφαπτόμεναι θὰ εἶναι παράλληλοι , ἐὰν δὲ ὄχι, θὰ συναντηθῶσι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου.

Ἔστω ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒ, καὶ ἂς ἐφάπτωνται αὐτῆς αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἂς διέρχηται πρότερον διὰ τοῦ κέντρου. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς, καὶ ἡ ΓΔ ἐφάπτεται εἰς τὸ Α, ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ἐπὶ τὴν *ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως κατηγμέναις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΖ παράλληλός ἐστι ταῖς αὐταῖς. καὶ ἡ ΓΔ ἄρα τῇ ΕΖ παράλληλός ἐστι.*

μὴ ἐρχέσθω δὴ ἡ ΑΒ διὰ τοῦ κέντρου, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἤχθω διάμετρος ἡ ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη ἡ ΚΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΓΔ. ἡ ἄρα ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΓΔ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου, ἐν οἷς ἐστιν ἡ ΑΒ.

κη'

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖά τις δίχα τέμνῃ, διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

ἐν γὰρ κώνου τομῇ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Ε, Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΖ ἐκβεβλήσθω. λέγω, ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΗΖΘ. ἡ ἄρα κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΒ. ὥστε ἡ αὐτὴ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ. καὶ ἔστι διάμετρος ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΓΘ τῇ ΘΔ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἴση.
H242 *οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΗΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΕΖ. ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.*

κθ'

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν

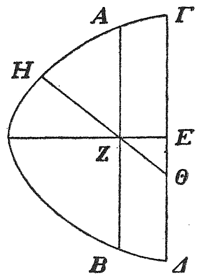
ΑΒ κατηγμένας τεταγμένως (1, 17). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΒΖ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτάς. Καὶ ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ (Εὐκλ. 1, 30).

Ἀλλ' ἂς μὴ διέρχηται ἡ ΑΒ διὰ τοῦ κέντρου, ὅπως εἶναι εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, καὶ ἂς ἀχθῇ διάμετρος ἡ ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη ἡ ΚΘΛ· εἶναι ἄρα ἡ ΚΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ. Ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν ΓΔ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου, πρὸς τὰ ὁποῖα εἶναι ἡ ΑΒ.

28

Ἐὰν εἰς κώνου τομὴν ἢ περιφέρειαν κύκλου εὐθεῖά τις τέμνῃ δύο παραλλήλους εὐθείας, αὕτη θὰ εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς.

Διότι, ἂς τμηθῶσιν εἰς τὸ μέσον εἰς τομὴν κώνου, δύο παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΖ ἂς ἐκβληθῇ. Λέγω, ὅτι αὕτη εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς.



Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι διάμετρος ἡ ΗΖΘ. Ἡ ἐφαπτομένη ἄρα εἰς τὸ Η εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ (θ. 5 καὶ 6). Ὥστε ἡ αὐτὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (Εὐκλ. 1, 30). Καὶ ἡ ΗΘ εἶναι διάμετρος· εἶναι ἄρα ΓΘ = ΘΔ (1 ὁρισ. 4)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐλήφθη ΓΕ = ΕΔ. Δὲν εἶναι ἄρα διάμετρος ἡ ΗΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις εἶναι διάμετρος πλὴν τῆς ΕΖ. Ἡ ΕΖ ἄρα θὰ εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς.

29

Ἐὰν εἰς κώνου τομὴν ἢ κύκλου περιφέρειαν δύο ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι συναντῶνται, ἡ ἀγομένη εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ σημείου συνανἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

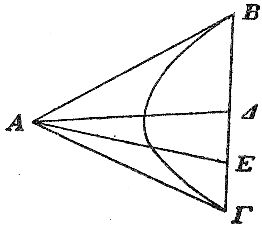
ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι ἤχθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Α, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΓ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω διάμετρος ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ· τεμεῖ δὴ τὴν τομήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ τῇ ΓΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ, ἴση καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΒΓ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΒΓ παράλληλος, καὶ ἡ ΖΗ ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ. ἴση ἄρα ἡ ΖΘ τῇ ΘΚ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ.

H244

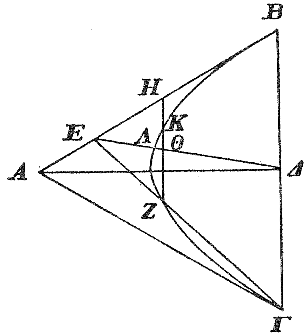
λʹ

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη διάμετρος δίχα τεμεῖ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.



ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς τήσεως (τομῆς) μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἑνούσης τὰς ἁφὰς εὐθείας εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς.

Ἔστω κώνου τομὴ ἢ περιφέρεια κύκλου, εἰς τὴν ὁποίαν ἃς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ συναντώμεναι εἰς τὸ Α, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῆ ἡ ΒΓ ἂς τμηθῆ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῆ ἡ ΑΔ. Λέγω, ὅτι αὕτη εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς.



Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω διάμετρος ἡ ΔΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῆ ἡ ΕΓ· αὕτη λοιπὸν θὰ τμήσῃ τὴν τομὴν (θ. 1, 35 - 36). Ἂς τὴν τμήσῃ εἰς τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῆ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔΒ ἡ ΖΚΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΔ =ΔΒ, εἶναι καὶ ἡ ΖΘ =ΘΗ (Εὐκλ. 6, 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εἰς τὸ Λ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ (θ. 5 καὶ 6), εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Λ. Εἶναι ἄρα ἡ ΖΘ =ΘΚ (θ. 1, 46 - 47)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΔΕ διάμετρος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι οὔτε ἄλλη τις εἶναι διάμετρος πλὴν τῆς ΑΔ.

30

Ἐὰν τομῆς κώνου ἢ περιφερείας κύκλου δύο ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι συναντῶνται, ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως ἀγομένη διάμετρος θὰ τμήσῃ εἰς τὸ μέσον τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰς δύο ἁφάς.

Ἔστω τομὴ κώνου ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΒΓ, καὶ ἂς ἀδύο ἐφαπτόμεναι αἱ ΒΑ, ΑΓ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Α διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΔΓ.

μὴ γάρ, ἀλλʼ εἰ δυνατόν, ἔστω ἴση ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· ἡ ΑΕ ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΔ· ὅπερ ἄτοπον. εἴτε γὰρ ἔλλειψίς ἐστιν ἡ τομή, τὸ Α, καθʼ ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι, κέντρον ἔσται τῆς τομῆς ἐκτός· ὅπερ ἀδύνατον· εἴτε παραβολή ἐστιν ἡ τομή, συμπίπτουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι· εἴτε ὑπερβολή ἐστι, καὶ συμπίπτουσι τῇ τομῇ αἱ ΒΑ, ΑΓ μὴ περιέχουσαι τὰς ἑαυτῶν συμπτώσεις, ἐντός ἐστι τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν γωνίας· ἀλλὰ καὶ ἐπʼ αὐτῆς· κέντρον γὰρ ὑπόκειται διαμέτρων οὐσῶν τῶν ΔΑ, ΑΕ· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ ἐστὶν ἴση.

λαʹ

Ἐὰν ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται, H246 ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου πίπτῃ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι, ἐὰν δὲ μή, συμπεσοῦνται ἐπὶ ταὐτὰ τῷ κέντρῳ.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ κατὰ τὰ Α, Β, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη πιπτέτω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ.

ἐπεὶ γὰρ ἀντικείμεναί εἰσι τομαί, ὧν διάμετρός ἐστιν χθῶσι δύο ἐφαπτόμεναι αὐτῆς αἱ ΒΑ, ΑΓ συναντώμεναι εἰς τὸ Α, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΓ καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Α διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΑΔ. Λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ = ΔΓ.

Διότι ἔστω ὅτι δὲν εἶναι, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἡ ΒΕ = ΕΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΕ· ἡ ΑΕ ἄρα εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς (θ. 29). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΔ· ὅπερ ἄτοπον. Διότι, ἐὰν ἡ τομὴ εἶναι ἔλλειψις, τὸ Α, ὅπου συναντῶνται μεταξύ των αἱ διάμετροι, θὰ εἶναι τὸ κέντρον καὶ θὰ ἔκειτο ἐκτὸς τῆς τομῆς· ὅπερ ἀδύνατον· ἐὰν ἡ τομὴ εἶναι παραβολή, αἱ διάμετροι θὰ συναντηθῶσι μεταξύ των (ὅπερ ἀδύνατον) (θ. 1, 51, πόρισ.)· ἐὰν εἶναι ὑπερβολή, καὶ συναντῶσι τὴν τομὴν αἱ ΒΑ, ΑΓ χωρὶς νὰ περιέχωσι τὰ σημεῖα συναντήσεώς των τῆς τομῆς, τὸ σημεῖον Α θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ἐντὸς τῆς γωνίας τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν (2,25)· ἀλλὰ καὶ ἐπ' αὐτῆς· διότι ὑπετέθη ὡς κέντρον τῆς ὑπερβολῆς, ἐνῷ αἱ ΔΑ, ΑΕ εἶναι διάμετροι· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΒΕ = ΕΓ.

31

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων, ἐὰν μὲν ἡ ἑνοῦσα τὰς ἁφὰς διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου, αἱ ἐφαπτόμεναι θὰ εἶναι παράλληλοι, ἐὰν δὲ ὄχι, θὰ συναντηθῶσι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη ὅπου εἶναι τὸ κέντρον.

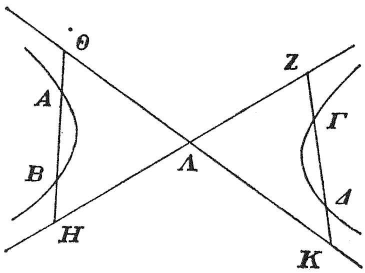
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β ἔστωσαν αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ, ἡ δὲ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ Α, Β ἂς διέρχηται πρῶτον διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ τομαὶ εἶναι ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων διά-ἡ AB, καὶ μιᾶς αὐτῶν ἐφάπτεται ἡ $ΓΔ$ κατὰ τὸ A, ἡ ἄρα διὰ τοῦ B τῇ $ΓΔ$ παράλληλος ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ἐφάπτεται δὲ καὶ ἡ EZ· παράλληλός ἐστιν ἄρα ἡ $ΓΔ$ τῇ EZ.

μὴ ἔστω δὴ ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν, καὶ ἤχθω διάμετρος τῶν τομῶν ἡ AH, καὶ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ $ΘK$· ἡ $ΘK$ ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ $ΓΔ$. καὶ ἐπεὶ ὑπερβολῆς εὐθεῖαι ἐφάπτονται αἱ EZ, $ΘK$, συμπεσοῦνται ἄρα. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ $ΘK$ τῇ $ΓΔ$· καὶ αἱ $ΓΔ, EZ$ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. καὶ φανερόν, ὅτι ἐπὶ ταὐτὰ τῷ κέντρῳ.

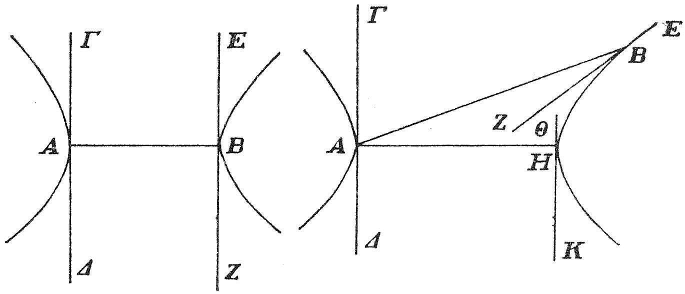
λβ′

Ἐὰν ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι συμπίπτωσι καθ᾽ ἓν ἐφαπτόμεναι ἢ κατὰ δύο τέμνουσαι, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ εὐθεῖαι συμπίπτωσιν, ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.



μετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ μιᾶς αὐτῶν ἐφάπτεται εἰς τὸ σημεῖον Α ἡ ΓΔ, ἡ ἀγομένη ἄρα διὰ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἐφάπτεται τῆς τομῆς (1, 44). Ἐφάπτεται δὲ καὶ ἡ ΕΖ· εἶναι ἄρα ἡ ΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ.

Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ διέρχηται ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν, καὶ ἂς ἀχθῇ διάμετρος τῶν τομῶν ἡ ΑΗ,



καὶ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΚ· ἡ ΘΚ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΘΚ ἐφάπτονται ὑπερβολῆς κατ' ἀνάγκην θὰ συναντηθῶσι (θ. 25). Καὶ εἶναι παράλληλος ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΓΔ· ἑπομένως καὶ αἱ ΓΔ, ΕΖ ἐκβαλλόμεναι θὰ συναντηθῶσι. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ συναντηθῶσι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη ὅπου εἶναι τὸ κέντρον.

32

Ἐὰν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι εἰς ἓν σημεῖον ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων ἢ τέμνουσαι ἑκατέραν εἰς δύο σημεῖα, ἐκβληθεῖσαι συναντῶνται, ἡ συνάντησις αὐτῶν θὰ γίνῃ εἰς τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ ⟨ αἱ ΑΒ, ΓΔ ⟩ καὶ τῶν ἀντι-
κειμένων ἤτοι καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι ⟨ ἑκατέρας ⟩ ἤτοι κατὰ
δύο τέμνουσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐκβαλλόμεναι συμ-
H248 πιπτέτωσαν. λέγω, ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ
ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΘΚ· ἡ ΑΒ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, Η. καὶ ἐπεὶ ὑπόκεινται συμπίπτουσαι αἱ ΖΚ, ΘΗ, φανερόν, ὅτι ἤτοι ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ΘΛΖ γωνίαν τόπῳ συμπεσοῦνται ἢ ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ΚΛΗ. ὁμοίως δὲ καί, ἐὰν ἐφάπτωνται.

λγ'

Ἐὰν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα συμπίπτουσα ἐκβληθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τομῇ, ἀλλὰ πεσεῖται διὰ τῶν τριῶν τόπων, ὧν ἐστιν εἷς μὲν ὁ ὑπὸ τὴν περιέχουσαν γωνίαν τὴν τομήν, δύο δὲ οἱ ὑπὸ τὰς γωνίας τὰς ἐφεξῆς τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τὴν Α τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ οὐ συμπίπτει τῇ Β τομῇ.

ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ·
H250 ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ ⟨αἱ ΑΒ, ΓΔ⟩ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ἐφαπτόμεναι ⟨ἑκατέρας⟩ κατὰ ἓν σημεῖον ἢ τέμνουσαι ἑκατέραν εἰς δύο σημεῖα, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἂς συναντῶνται. Λέγω, ὅτι ἡ συνάντησις αὐτῶν θὰ γίνῃ εἰς τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

Ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΘΚ· ἡ ΑΒ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὰς ἀσυμπτώτους (θ. 8). Ἂς τὰς συναντήσῃ εἰς τὰ σημεῖα Θ, Η. Καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθησαν συναντώμεναι αἱ ΖΚ, ΘΗ, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ συναντῶνται ἢ εἰς τὸν τόπον τῆς γωνίας ΘΛΖ ἢ εἰς τὸν τόπον τῆς ΚΛΗ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἐὰν ἐφάπτωνται.

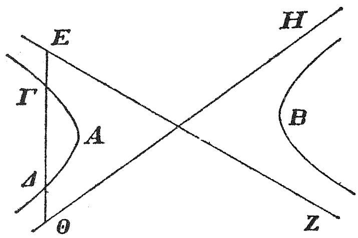
33

Ἐὰν εὐθεῖα συναντῶσα μίαν τῶν ἀντικειμένων, ἐκβληθεῖσα καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη πίπτῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς, δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην τομήν, ἀλλὰ θὰ διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν τόπων, τῶν ὁποίων ὁ εἷς μὲν εἶναι ὁ τῆς γωνίας τῆς περιεχούσης τὴν τομήν, οἱ ἄλλοι δὲ δύο οἱ ἀνήκοντες εἰς τὰς ἐφεξῆς γωνίας, τῆς περιεχούσης τὴν τομήν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἂς τέμνῃ τὴν Α εὐθεῖά τις ἡ ΓΔ καὶ ἐκβαλλομένη αὕτη πρὸς τὰ δύο μέρη ἂς πίπτῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν Β.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὰς ἀσυμπτώτους (θ. 8).

οὐ συμπίπτει δὲ κατ' ἄλλα ἢ τὰ Ε, Θ. ὥστε οὐ συμπεσεῖται οὐδὲ τῇ Β τομῇ.



καὶ φανερόν, ὅτι διὰ τῶν τριῶν τόπων πεσεῖται. ἐὰν γὰρ ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ τις εὐθεῖα, οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα. εἰ γὰρ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα, διὰ τὸ προδεδειγμένον τῇ ἑτέρᾳ τομῇ οὐ συμπεσεῖται.

λδ'

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖά τις ἐπιψαύῃ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ μέσην τὴν παράλληλον ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ μιᾶς αὐτῶν τῆς Α ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Α, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΗ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.

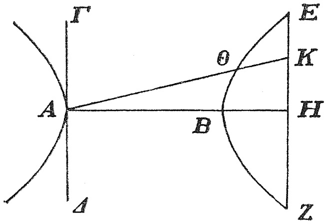
εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ ΑΘΚ. ἡ ἄρα κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ· καὶ ἡ κατὰ τὸ Θ ἄρα ἐφαπτομένη παράλλη-

Δὲν συναντᾷ δὲ αὐτὰς εἰς ἄλλα σημεῖα ἢ εἰς τὰ Ε, Θ. Ὥστε δὲν θὰ συναντήσῃ οὔτε τὴν τομὴν Β.

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν τόπων. Διότι, ἐὰν εὐθεῖά τις συναντᾷ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων, δὲν θὰ συναντήσῃ εἰς δύο σημεῖα καμμίαν τῶν ἀντικειμένων. Διότι, ἐὰν τὰς συναντήσῃ εἰς δύο σημεῖα, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην τομήν.

34

Ἐὰν εὐθεῖά τις ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων καὶ ἀχθῇ εἰς τὴν ἄλλην τομὴν παράλληλος πρὸς ταύτην, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εἰς τὸ μέσον τῆς παραλλήλου ἀγομένη εὐθεῖα θὰ εἶναι διάμετρος τῶν ἀντικειμένων.



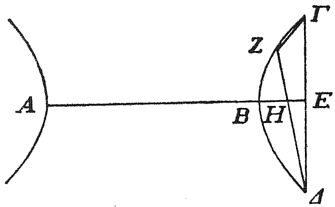
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἂς ἐφάπτηται μιᾶς αὐτῶν τῆς Α εὐθεῖά τις ἡ ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς τὴν ἄλλην τομὴν πρὸς τὴν ΓΔ παράλληλος ἡ ΕΖ, καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη εἰς τὸ μέσον εἰς τὸ σημεῖον Η, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΗ. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΗ εἶναι διάμετρος τῶν ἀντικειμένων.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι ἡ ΑΘΚ. Ἡ ἐφαπτομένη ἄρα εἰς τὸ Θ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (θ. 31). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ εἰς τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ (Εὐκλ. 1, 30). Εἶναι λός ἐστι τῇ ΕΖ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΖ· ὅπερ ἀδύνατον· ἡ γὰρ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση. οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΘ τῶν ἀντικειμένων. ἡ ΑΒ ἄρα.

λε′

Ἐὰν ἡ διάμετρος ἐν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖάν τινα
H252 δίχα τέμνῃ, ἡ ἐπιψαύουσα τῆς ἑτέρας τομῆς κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, ἡ δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ ΑΒ τεμνέτω ἐν τῇ Β τομῇ δίχα τὴν ΓΔ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Ε. λέγω, ὅτι ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ.



εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς παράλληλος ἡ ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΗΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΕΗ· ὅπερ ἀδύνατον· ἐκβαλλομένη γὰρ αὐτῇ συμπίπτει. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΓΔ.

λϛ′

Ἐὰν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι ἀχθῶσι παράλληλοι οὖσαι, ἡ τὰς διχοτομίας αὐτῶν ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

ἄρα ἡ ΕΚ = ΚΖ (1, 47)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἡ ΕΗ = ΗΖ. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΑΘ διάμετρος τῶν ἀντικειμένων. Εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ.

35

Ἐὰν ἡ διάμετρος εἰς μίαν τῶν ἀντικειμένων τέμνῃ εὐθεῖάν τινα εἰς τὸ μέσον, ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ πέρας τῆς διαμέτρου τῆς ἄλλης τομῆς θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εἰς τὸ μέσον τεμνομένην εὐθεῖαν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β ἡ δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ ΑΒ ἃς τέμνῃ εἰς τὴν τομὴν Β τὴν εὐθεῖαν ΓΔ εἰς τὸ μέσον, εἰς τὸ σημεῖον Ε. Λέγω, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ Α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς εἰς τὸ Α παράλληλος ἡ ΔΖ· εἶναι ἄρα ἡ ΔΗ = ΗΖ (1, 48). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΔΕ = ΕΓ. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ (Εὐκλ. 6, 2)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι προεκτεινομένη θὰ τὴν συναντήσῃ (1, 22). Δὲν εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς τομῆς οὔτε ἄλλη καμμία ἐκτὸς τῆς ΓΔ.

36

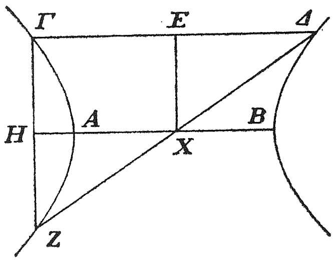
Ἐὰν εἰς ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παράλληλοι ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα αὐτῶν θὰ εἶναι διάμετρος τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ ἐν ἑκατέρᾳ αὐτῶν ἤχθωσαν εὐθεῖαι αἱ $ΓΔ$, EZ, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι, καὶ τετμήσθω ἑκατέρα αὐτῶν δίχα κατὰ τὰ H, $Θ$ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $HΘ$. λέγω, ὅτι ἡ $HΘ$ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.

εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ HK. ἡ ἄρα κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ $ΓΔ$· ὥστε καὶ τῇ EZ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ H254 EK τῇ KZ· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ καὶ ἡ $EΘ$ τῇ $ΘZ$ ἐστιν ἴση. οὐκ ἄρα ἡ HK διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων. ἡ $HΘ$ ἄρα.

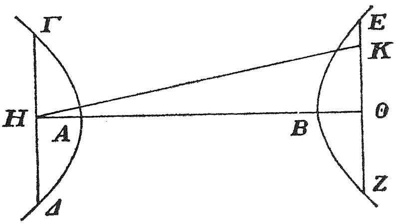
λζ'

Ἐὰν ἀντικειμένας εὐθεῖα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος τῇ δίχα τεμνομένῃ.



ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ τὰς A, B τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ $ΓΔ$ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσα καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ E, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ X, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ XE, καὶ διὰ τοῦ X τῇ $ΓΔ$ παράλληλος ἤχθω ἡ AB. λέγω, ὅτι αἱ AB, EX συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν τομῶν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ εἰς ἑκατέραν αὐτῶν ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΕΖ, καὶ ἔστωσαν αὗται παράλληλοι, καὶ ἂς τμηθῇ ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τὸ μέσον εἰς τὰ σημεῖα Η, Θ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΘ. Λέγω, ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι διάμετρος τῶν ἀντικειμένων.



Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι ἡ ΗΚ. Ἡ ἐφαπτομένη ἄρα εἰς τὸ Α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (θ. 5)· ὥστε εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΕΖ (Εὐκλ. 1, 30). Εἶναι ἄρα ἡ ΕΚ = ΚΖ (1, 48)· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΕΘ = ΘΖ. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΗΚ διάμετρος τῶν ἀντικειμένων. Εἶναι ἄρα ἡ ΗΘ.

37

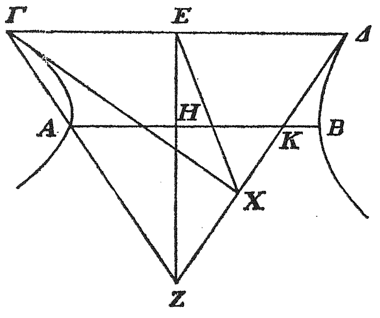
Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ ἀντικειμένας μὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ἀπὸ τοῦ μέσου αὐτῆς πρὸς τὸ κέντρον ἀγομένη εὐθεῖα εἶναι διάμετρος τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία διάμετρος (ὀρθὸς ἄξων), πλαγία δὲ (πλάγιος ἄξων) συζυγὴς πρὸς αὐτὴν εἶναι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν εἰς τὸ μέσον τεμνομένην.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τὰς Α, Β ἂς τέμνῃ εὐθεῖά τις ἡ ΓΔ μὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη εἰς τὸ μέσον εἰς τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τῶν τομῶν τὸ Χ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΧΕ, καὶ διὰ τοῦ Χ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΑΒ. Λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΕΧ εἶναι συζυγεῖς διάμετροι τῶν τομῶν.

ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΧ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΧ τῇ ΧΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ τῇ ΖΓ. ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Η. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΧ τῇ ΧΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΧ τῇ ΖΗ· ὥστε καὶ ἡ ΓΗ ἴση τῇ ΖΗ. ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΖ· ὥστε καὶ τῇ ΕΧ. αἱ ΕΧ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.

λη΄

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύωσι συμπίπτουσαι, ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ
H256 μέσην τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένη παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν.



ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ τῶν τομῶν αἱ ΓΧ, ΧΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΧ διάμετρός ἐστιν ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη.

ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, διάμετρος ἡ ΕΖ, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔΧ τῇ ΕΖ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ· συμβαλεῖ ἄρα

Διότι ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΧ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΖ. Εἶναι ἄρα ἡ ΔΧ=ΧΖ (1, 30). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΔΕ=ΕΓ· εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ ΕΧ πρὸς τὴν ΖΓ (Εὐκλ. 6, 4 καὶ 5, 14). Ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Η. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΧ=ΧΖ, εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΕΧ=ΖΗ (Εὐκλ. 5, 14 . 6, 4)· ὥστε καὶ ἡ ΓΗ=ΖΗ (Εὐκλ. 1, 34). Εἶναι ἄρα ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Α παράλληλος πρὸς τὴν ΓΖ (θ. 5)· ὥστε εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΕΧ (Εὐκλ. 1, 30). Εἶναι ἄρα αἱ ΕΧ, ΑΒ συζυγεῖς διάμετροι.

38

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται τῶν ἀντικειμένων συναντώμεναι, ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως ἐπιζευγνυμένη εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰς ἁφὰς θὰ εἶναι διάμετρος τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία διάμετρος (ὀρθὸς ἄξων), πλαγία δὲ (πλάγιος ἄξων) συζυγὴς πρὸς αὐτὴν θὰ εἶναι ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰς ἁφάς.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ τῶν τομῶν αἱ ΓΧ, ΧΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔ καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη εἰς τὸ μέσον, εἰς τὸ Ε, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΧ. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΧ εἶναι διάμετρος ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς πρὸς αὐτὴν εἶναι ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, διάμετρος ἡ ΕΖ, καὶ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ· θὰ συναντήσῃ ἄρα ἡ ΔΧ τὴν ΕΖ. Ἂς τὴν συναντήσῃ εἰς τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΖ· θὰ συναντήσῃ ἄρα ἡ ΓΖ τὴν ἡ ΓΖ τῇ τομῇ. συμβαλέτω κατὰ τὸ Α, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΒ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ, καὶ τὴν ΓΔ δίχα τέμνει, καὶ τὰς παραλλήλους αὐτῇ δίχα τέμνει. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ, καὶ ἔστιν ἐν τριγώνῳ τῷ ΓΖΔ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΚ. ὥστε καὶ ἡ ΗΚ τῇ ΗΒ ἐστιν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΕΖ διάμετρος ἔσται.

λθ′

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται συμπίπτουσαι, ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀγομένη δίχα τέμνει τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐπε-
H258 ζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διάμετρος ἤχθω ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΖΔ.

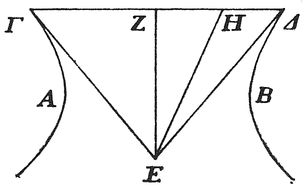
εἰ γὰρ μή, τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΕ· ἡ ΗΕ ἄρα διάμετρός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΖ· κέντρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ε. ἡ ἄρα σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων ἐπὶ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῶν τομῶν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΖΔ. ἴση ἄρα.

μ′

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως εὐθεῖα ἀχθῇ παρὰ τὴν τομὴν (1, 32). Ἂς τὴν συναντήσῃ εἰς τὸ Α, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΑΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΕΖ εἶναι διάμετρος, καὶ τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν ΓΔ, θὰ τέμνῃ εἰς τὸ μέσον καὶ τὰς παραλλήλους πρὸς αὐτὴν (1 ὁρισ. 4). Εἶναι ἄρα ἡ ΑΗ = ΗΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΕ = ΕΔ καὶ εὑρίσκεται εἰς τὸ τρίγωνον τὸ ΓΖΔ, εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΑΗ = ΗΚ (Εὐκλ. 6, 4). Ὥστε καὶ ἡ ΗΚ = ΗΒ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΕΖ διάμετρος.

39

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται τῶν ἀντικειμένων συναντώμεναι, ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀγομένη εὐθεῖα τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰς ἁφάς.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἂς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν Α, Β αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ διάμετρος ἡ ΕΖ. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ = ΖΔ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΓΔ εἰς τὸ Η, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΕ· ἡ ΗΕ ἄρα εἶναι διάμετρος (θ. 38). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΕΖ· εἶναι ἄρα τὸ Ε κέντρον. Ἡ συνάντησις ἄρα τῶν ἐφαπτομένων γίνεται εἰς τὸ κέντρον τῶν τομῶν· ὅπερ ἄτοπον (θ. 32). Δὲν εἶναι ἄρα ἄνισος ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Εἶναι ἄρα ἴση.

40

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀντικειμένων συναντῶνται, καὶ διὰ τοῦ σημείου συναντήσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ταῖς τομαῖς, αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀγόμεναι ἐπὶ μέσην τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἐφάπτονται τῶν τομῶν.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΕΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΘ, ΘΗ. λέγω, ὅτι αἱ ΖΘ, ΘΗ ἐφάπτονται τῶν τομῶν.

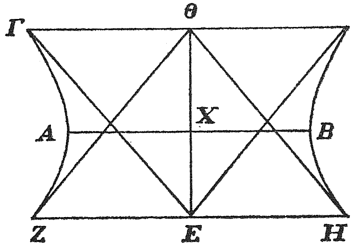
ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλ-
H260 ληλος ἀγομένη. εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Χ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΧΒ· αἱ ΘΕ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. καὶ τεταγμένως ἦκται ἡ ΓΘ ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἡ ΓΕ συμπίπτουσα τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΧΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους. καὶ ἐπεὶ τεταγμένως μὲν ἦκται ἡ ΖΕ, ἐπέζευκται δὲ ἡ ΖΘ, διὰ τοῦτο ἐφάπτεται ἡ ΖΘ τῆς Α τομῆς. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΗΘ ἐφάπτεται τῆς Β τομῆς. αἱ ΖΘ, ΘΗ ἄρα ἐφάπτονται τῶν Α, Β τομῶν.

μα'

Ἐὰν ἐν ταῖς ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰς ἁφὰς συναντῶσα τὰς τομάς, αἱ ἀπὸ τῶν σημείων συναντήσεως ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὸ μέσον τῆς ἑνούσης τὰς ἁφὰς ἐφάπτονται τῶν τομῶν.

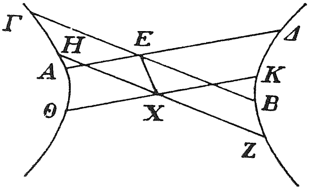
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἂς ἀχθῶσιν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν Α, Β αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΖΕΗ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΓΔ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Θ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΖΘ, ΘΗ. Λέγω, ὅτι αἱ ΖΘ, ΘΗ ἐφάπτονται τῶν τομῶν.



Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΘ· εἶναι ἄρα ἡ ΕΘ ὀρθία διάμετρος, πλαγία δὲ διάμετρος συζυγὴς πρὸς αὐτὴν εἶναι ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (θ. 38). Ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τὸ Χ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΧΒ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ· εἶναι ἄρα αἱ ΘΕ, ΑΒ συζυγεῖς διάμετροι. Καὶ ἡ ΓΘ ἔχει ἀχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἡ ΓΕ συναντῶσα τὴν δευτέραν διάμετρον. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΕΧ x ΧΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι πρὸς τὸ 1/4 τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν ΑΒ καὶ τὴν παράμετρον (1, 38 καὶ 1 ὁρισμοὶ πρῶτοι 3). Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΖΕ ἔχει ἀχθῇ τεταγμένως, ἔχει δὲ ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΘ, διὰ τοῦτο ἡ ΖΘ ἐφάπτεται τῆς τομῆς Α (1, 38). Ὁμοίως λοιπὸν καὶ ἡ ΗΘ ἐφάπτεται τῆς τομῆς Β. Αἱ ΖΘ, ΘΗ ἄρα ἐφάπτονται τῶν τομῶν Α, Β.

41

Ἐὰν μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, δὲν τέμνονται εἰς τὸ ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ ἐν ταῖς A, B δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ $ΓB$, $AΔ$ κατὰ τὸ E μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι. λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ X, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EX· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EX. ἤχθω διὰ τοῦ X τῇ $BΓ$ παράλληλος ἡ XZ· ἡ XZ ἄρα διάμετρός ἐστι καὶ συζυγὴς τῇ EX. ἡ ἄρα κατὰ τὸ Z ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ EX. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ παραλλήλου ἀχθείσης τῆς $ΘK$ τῇ $AΔ$ ἡ κατὰ τὸ $Θ$ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ EX· ὥστε καὶ ἡ κατὰ τὸ Z ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ κατὰ τὸ $Θ$ ἐφαπτομένῃ· ὅπερ ἄτοπον·
H262 ἐδείχθη γὰρ καὶ συμπίπτουσα. οὐκ ἄρα αἱ $ΓB$, $AΔ$ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

μβ′

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, $Γ$, $Δ$, καὶ ἐν ταῖς A, B, $Γ$, $Δ$ τομαῖς δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ EZ, $HΘ$ κατὰ τὸ K μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι. λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

μέσον.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β καὶ μεταξὺ τῶν τομῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΒ, ΑΔ ἃς τέμνωνται μεταξύ των εἰς τὸ Ε μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου. Λέγω, ὅτι δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον.

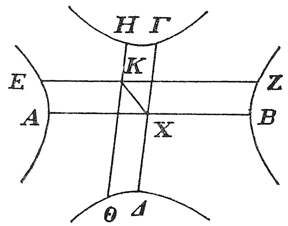
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τέμνωνται, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τῶν τομῶν τὸ Χ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΧ· εἶναι ἄρα ἡ ΕΧ διάμετρος (θ. 37). Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Χ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἡ ΧΖ· ἡ ΧΖ ἄρα εἶναι διάμετρος καὶ συζυγὴς πρὸς τὴν ΕΧ (θ. 37). Ἡ ἐφαπτομένη ἄρα εἰς τὸ Ζ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΧ (1 ὁρισ. 6). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΘΚ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Θ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΧ· ὥστε καὶ ἡ εἰς τὸ Ζ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Θ· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐδείχθη ὅτι εἶναι καὶ συμπίπτουσα (θ. 31). Αἱ ἄρα ΓΒ, ΑΔ μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον.

42

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εὑρισκόμεναι εἰς τὰς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένας τέμνωνται μεταξύ των μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ εἰς τὰς τομὰς Α, Β, Γ, Δ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΗΘ ἃς τέμνωνται μεταξύ των εἰς τὸ σημεῖον Κ μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου. Λέγω, ὅτι αὗται δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον.

εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ τῇ μὲν ΕΖ ἤχθω παράλληλος ἡ ΑΒ, τῇ δὲ ΘΗ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΧ· αἱ ΚΧ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. ὁμοίως καὶ αἱ ΧΚ, ΓΔ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. ὥστε καὶ ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῇ κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένῃ παράλληλός ἐστιν· ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γάρ, ἐπειδὴ ἡ μὲν κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένη τέμνει τὰς Α, Β τομάς, ἡ δὲ κατὰ τὸ Α τὰς Δ, Γ, καὶ φανερόν, ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ΑΧΓ γωνίαν τόπῳ ἐστίν. οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



μγ′

Ἐὰν μίαν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα
H264 τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἡ μὲν ἐπὶ μέσην τὴν τέμνουσαν ἀχθῇ, ἡ δὲ παρὰ τὴν τέμνουσαν, συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τεμνέτω τὴν Α εὐθεῖά τις κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Ζ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΕ τῷ Η, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΗ, παράλληλος δὲ ἤχθω τῇ ΕΖ ἡ ΓΧ. λέγω, ὅτι αἱ ΑΧ, ΧΓ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.

ἐπεὶ γὰρ διάμετρος ἡ ΑΧ, καὶ τὴν ΕΖ δίχα τέμνει, ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ· ὥστε

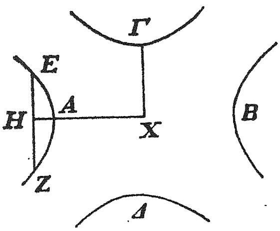
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τέμνωνται, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ πρὸς μὲν τὴν ΕΖ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΑΒ, πρὸς δὲ τὴν ΘΗ παράλληλος ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΧ· αἱ ΚΧ, ΑΒ ἄρα εἶναι συζυγεῖς διάμετροι (θ. 37). Ὁμοίως καὶ αἱ ΧΚ, ΓΔ εἶναι συζυγεῖς διάμετροι. Ὥστε καὶ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Γ (1 ὁρισ. 6. Εὐκλ. 1, 30)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι τὴν συναντᾷ, ἐπειδὴ ἡ μὲν ἐφαπτομένη εἰς τὸ Γ τέμνει τὰς τομὰς Α, Β, ἡ δὲ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Α τέμνει τὰς τομὰς Δ, Γ (θ. 19), καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ συνάντησις αὐτῶν γίνεται εἰς τὸν χῶρον τῆς γωνίας ΑΧΓ (θ. 21). Αἱ ΕΖ, ΗΘ ἄρα μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον.

43

Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ μίαν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εἰς δύο σημεῖα, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἀχθῇ ἡ μὲν εἰς τὸ μέσον τῆς τεμνούσης, ἡ δὲ παράλληλος πρὸς τὴν τέμνουσαν, αἱ διάμετροι τῶν ἀντικειμένων θὰ εἶναι συζυγεῖς.

Ἔστωσαν τομαὶ ἀντικείμεναι κατὰ συζυγίαν αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἂς τέμνῃ τὴν τομὴν Α εὐθεῖά τις εἰς δύο σημεῖα τὰ Ε, Ζ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΖΕ εἰς τὸ Η, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Χ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΧΗ, ἂς ἀχθῇ δὲ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ ἡ ΓΧ. Λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΧ, ΧΓ εἶναι συζυγεῖς διάμετροι.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΧ εἶναι διάμετρος καὶ τέμνει τὴν ΕΖ εἰς τὸ μέσον, ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ καὶ τῇ ΓΧ. ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσι τομαί, καὶ μιᾶς αὐτῶν



τῆς Α ἦκται ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Α, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ Χ ἡ μὲν ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζεύγνυται ἡ ΧΑ, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην ἦκται ἡ ΓΧ, αἱ ΧΑ, ΓΧ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· τοῦτο γὰρ προδέδεικται.

μδʹ

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὴν διάμετρον εὑρεῖν.

ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομή, ἐφʼ ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεῖα. δεῖ δὴ αὐτῆς τὴν διάμετρον εὑρεῖν.

γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΘ. ἀχθεισῶν δὴ τεταγμένως τῶν ΔΖ, ΕΘ καὶ ἐκβληθεισῶν ἔσται ἴση ἡ μὲν ΔΖ τῇ ΖΒ, ἡ δὲ ΕΘ τῇ ΘΑ. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὰς ΒΔ, ΕΑ θέσει οὔσας παραλλήλους, ἔσται δοθέντα τὰ Θ, Ζ σημεῖα. ὥστε θέσει ἔσται ἡ ΘΖΓ.

H266 συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομή, ἐφʼ ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΒΔ, ΑΕ καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ζ, Θ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΘ διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἀπείρους εὑρήσομεν διαμέτρους.

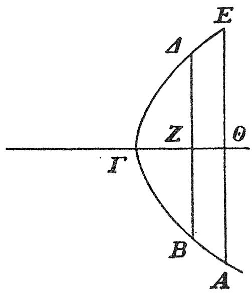
(θ. 5)· ὥστε εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΓΧ (Εὐκλ. 1, 30). Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσιν ἀντικείμεναι τομαί, καὶ ἔχει ἀχθῇ μιᾶς ἐξ αὐτῶν τῆς Α ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Α, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ Χ ἡ μὲν μία εὐθεῖα ἡ ΧΑ ἔχει ἐπιζευχθῇ εἰς τὴν ἁφήν, ἡ δὲ ΓΧ ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, εἶναι ἄρα αἱ ΧΑ, ΓΧ συζυγεῖς διάμετροι· διότι τοῦτο ἔχει προαποδειχθῇ.

44

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομή, ὅπου τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε. Πρέπει τῆς τομῆς αὐτῆς νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος.

[Ἀνάλυσις]. Ἔστω, ὅτι εὑρέθη, καὶ ὅτι εἶναι ἡ ΓΘ. Ἀφοῦ δὲ ἀχθῶσι τεταγμένως αἱ ΔΖ, ΕΘ καὶ προεκβληθῶσι θὰ εἶναι ἡ μὲν ΔΖ = ΖΒ, ἡ δὲ ΕΘ = ΘΑ (1 ὁρισ. 4). Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ὑπ' ὄψει, ὅτι αἱ ΒΔ, ΕΑ εἶναι ἀπὸ ἀπόψεως θέσεως παράλληλοι, τὰ σημεῖα Θ, Ζ θὰ εἶναι δοθέντα. Ὥστε κατὰ τὴν θέσιν εἶναι δοθεῖσα ἡ ΘΖΓ.

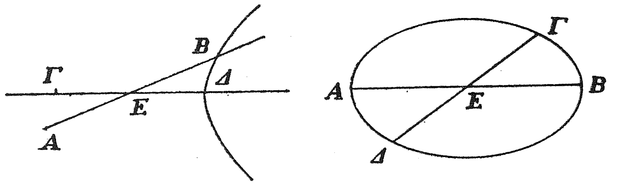


[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα δὲ θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομή, ὅπου ὑπάρχουσι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι αἱ ΒΔ, ΑΕ καὶ ἂς τμηθῶσιν αὗται εἰς τὸ μέσον, εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Θ. Καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΘ θὰ εἶναι αὕτη διάμετρος τῆς τομῆς (1, ὁρισ. 4). Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν καὶ ἀπείρους διαμέτρους.

με΄

Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον εὑρεῖν.

τοῦτο δὲ φανερόν· ἐὰν γὰρ διαχθῶσι δύο διάμετροι τῆς



τομῆς αἱ ΑΒ, ΓΔ, καθʼ ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας, ἔσται τῆς τομῆς τὸ κέντρον, ὡς ὑπόκειται.

μϛ΄

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἐφʼ ἧς τὰ Ζ, Γ, Ε. δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

ἤχθω γὰρ αὐτῆς διάμετρος ἡ ΑΒ. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΒ ἄξων ἐστί, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὔ, γεγονέτω, καὶ ἔστω ἄξων ὁ ΓΔ· ὁ ΓΔ ἄρα ἄξων παράλληλός ἐστι τῇ ΑΒ καὶ τὰς ἀγομένας ἐπʼ αὐτὴν καθέτους δίχα τέμνει. αἱ δὲ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετοι καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετοί εἰσιν· ὥστε ἡ ΓΔ τὰς ἐπὶ τὴν ΑΒ καθέτους δίχα τέμνει. ἐὰν οὖν τάξω τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἔσται θέσει, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. διὰ δεδομένου ἄρα τοῦ Δ παρὰ θέσει τὴν ΑΒ ἦκται ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

H268 συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα παραβολή, ἐφʼ

45

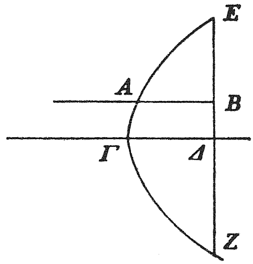
Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον. Τοῦτο δὲ εἶναι φανερόν· διότι, ἐὰν διαχθῶσι δύο διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΑΒ, ΓΔ (θ. 44), τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται μεταξύ των, θὰ εἶναι τὸ κέντρον τῆς τομῆς, ὡς ὑπετέθη.

46

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄξων.

Ἔστω προηγουμένως ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ παραβολή, ὅπου τὰ σημεῖα Ζ, Γ, Ε. Πρέπει λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄξων αὐτῆς.

Διότι ἂς ἀχθῇ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΑΒ (θ. 44). Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι ἄξων, τὸ ἐπιταχθὲν θὰ εἶναι γεγονός· ἐὰν δὲ δὲν εἶναι, ἂς γίνῃ (ἀνάλυσις), καὶ ἔστω ἄξων ὁ ΓΔ· ὁ ἄξων ἄρα ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ (1, 51 πόρισ.) καὶ τὰς ἀγομένας ἐπ' αὐτὴν καθέτους τὰς τέμνει εἰς τὸ μέσον (1 ὁρισ. 7). Αἱ δὲ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ· ὥστε ἡ ΓΔ τὰς ἐπὶ τὴν ΑΒ καθέτους τὰς τέμνει εἰς τὸ μέσον. Ἐὰν λοιπὸν θεωρήσω τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι αὕτη δοθεῖσα κατὰ τὴν θέσιν (Εὐκλ. Δεδομένα 30), καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΕΔ = ΔΖ· εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον Δ δοθέν. Διὰ τοῦ δεδομένου ἄρα σημείου τοῦ Δ ἔχει ἀχθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ τὴν θέσιν ΑΒ ἡ ΓΔ· ἔχει δοθῇ ἄρα κατὰ τὴν θέσιν ἡ ΓΔ (Εὐκλ. Δεδομένα 28).



[Σύνθεσις]. Ἡ σύνθεσις δὲ τοῦ προβλήματος ἔχει ὡς ἑξῆς·

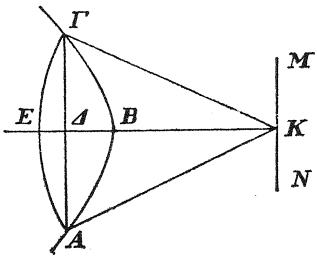
ἧς τὰ Z, E, A, καὶ ἤχθω αὐτῆς διάμετρος ἡ AB, καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ BE καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Z. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ EB τῇ BZ, φανερόν, ὅτι ἡ AB ἄξων ἐστίν· εἰ δὲ οὔ, τετμήσθω ἡ EZ δίχα τῷ Δ, καὶ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ $\Gamma\Delta$. φανερὸν δή, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς. παράλληλος γὰρ οὖσα τῇ διαμέτρῳ, τουτέστι διάμετρος οὖσα, τὴν EZ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. τῆς ἄρα δοθείσης παραβολῆς ὁ ἄξων ηὕρηται ὁ $\Gamma\Delta$.

καὶ φανερόν, ὅτι εἷς ἄξων ἐστὶ τῆς παραβολῆς. εἰ γὰρ ἄλλος ἔσται ὡς ὁ AB, ἔσται τῇ $\Gamma\Delta$ παράλληλος. καὶ τὴν EZ τέμνει· ὥστε καὶ δίχα. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ BE τῇ BZ· ὅπερ ἄτοπον.

μζ'

Τῆς δοθείσης ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ $AB\Gamma$· δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.



εὑρήσθω καὶ ἔστω ὁ $K\Delta$, κέντρον δὲ τῆς τομῆς τὸ K· ἡ ἄρα $K\Delta$ τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως καταγομένας δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.

ἤχθω κάθετος ἡ $\Gamma\Delta A$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KA, $K\Gamma$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ ΔA, ἴση ἄρα ἡ ΓK τῇ KA.

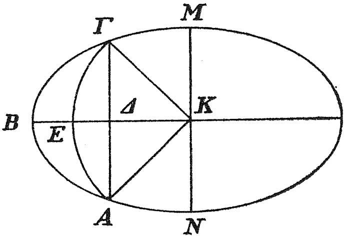
ἔστω ἡ δοθεῖσα παραβολή, ὅπου τὰ σημεῖα Ζ, Ε, Α, καὶ ἂς ἀχθῇ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΑΒ (θ. 44), καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΒΕ καὶ ἂς προεκβληθῇ αὕτη ἐπὶ τὸ Ζ. Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ ΕΒ = ΒΖ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι ἄξων (1 ὁρισ. 7)· ἐὰν δὲ δὲν εἶναι, ἂς τμηθῇ ἡ ΕΖ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΓΔ. Εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἄξων τῆς τομῆς· διότι αὕτη ἐνῷ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, τουτέστι διάμετρος οὖσα (1, 51 πόρισ.), τέμνει τὴν ΕΖ εἰς τὸ μέσον καὶ καθέτως (1 ὁρισ. 7). Τῆς δοθείσης ἄρα παραβολῆς εὑρέθη ὁ ἄξων ὁ ΓΔ.

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ὑπάρχει μόνον εἷς ἄξων τῆς παραβολῆς. Διότι, ἐὰν ὑπάρχῃ καὶ ἄλλος ὡς ὁ ΑΒ, θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (1, 51 πόρισ.). Καὶ θὰ τέμνῃ τὴν ΕΖ· ὥστε θὰ τέμνῃ αὐτὴν καὶ εἰς τὸ μέσον (1 ὁρισ. 4). Εἶναι ἄρα ἡ ΒΕ = ΒΖ· ὅπερ ἄτοπον.

47

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄξων τῆς δοθείσης ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ· πρέπει λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄξων αὐτῆς.



[Ἀνάλυσις]. Ἂς ἔχῃ εὑρεθῇ καὶ ἔστω ὁ ΚΔ, κέντρον δὲ τῆς τομῆς ἔστω τὸ Κ· ἡ ΚΔ ἄρα τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως καταγομένας τὰς τέμνει εἰς τὸ μέσον καὶ καθέτως (1 ὁρισ. 7).

Ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΓΔΑ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΚΑ, ΚΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΔ = ΔΑ θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΓΚ = ΚΑ (Εὐκλ.

H270 *ἐὰν οὖν τάξωμεν δοθὲν τὸ Γ, ἔσται δοθεῖσα ἡ ΓΚ. ὥστε ὁ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Α καὶ ἔσται θέσει δεδομένος. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ τομὴ δοθεῖσα θέσει· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα τῇ θέσει ἡ ΔΚ.*

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω αὐτῆς κέντρον τὸ Κ· εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ, καὶ διήχθω ἡ ΚΔ ἐπὶ τὸ Β.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΚ, δύο ἄρα αἱ ΓΔΚ δύο ταῖς ΑΔΚ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΚΑ τῇ ΚΓ ἴση. ἡ ἄρα ΚΒΔ τὴν ΑΔΓ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. ἄξων ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΔ.

ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΑ παράλληλος ἡ ΜΚΝ· ἡ ἄρα ΜΝ ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς συζυγὴς τῇ ΒΚ.

μη'

Δεδειγμένων δὴ τούτων ἑξῆς ἔστω δεῖξαι, ὅτι ἄλλοι ἄξονες τῶν αὐτῶν τομῶν οὐκ εἰσίν.

1, 4). Ἐὰν λοιπὸν τάξωμεν τὸ Γ δοθέν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΚ δοθεῖσα (Εὐκλ. Δεδομένα 26). Ὥστε ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΓ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Α καὶ θὰ εἶναι κατὰ τὴν θέσιν δεδομένος (Εὐκλ. Δεδομένα ὁρισ. 6). Εἶναι δὲ καὶ ἡ τομὴ ΑΒΓ κατὰ τὴν θέσιν δεδομένη· εἶναι ἄρα τὸ Α δοθέν. Εἶναι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν· εἶναι ἄρα ἡ ΓΑ κατὰ τὴν θέσιν δοθεῖσα (Εὐκλ. Δεδομένα 26). Καὶ εἶναι ἡ ΓΔ =ΔΑ· εἶναι ἄρα τὸ Δ δοθὲν (Εὐκλ. Δεδ. 7). Ἀλλὰ καὶ τὸ Κ εἶναι δοθέν· εἶναι ἄρα δοθεῖσα κατὰ τὴν θέσιν ἡ ΔΚ (Εὐκλ. Δεδ. 26).

[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα δὲ θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἔστω ἡ δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ κέντρον αὐτῆς τὸ Κ (θ. 45)· ἂς ληφθῇ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Κ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΚΓ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΓΕΑ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΑ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ, καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΚΔ μέχρι τοῦ Β.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΔ =ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΚ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΓΔ, ΔΚ ἴσαι πρὸς δύο ἀντιστοίχως τὰς ΑΔ, ΔΚ, καὶ ἡ βάσις ΚΑ= βάσιν ΚΓ (Εὐκλ. 1, 4). Ἡ ΚΒΔ ἄρα τέμνει τὴν ΑΔΓ εἰς τὸ μέσον καὶ καθέτως. Εἶναι ἄρα ἄξων ἡ ΚΔ (1 ὁρισ. 7).

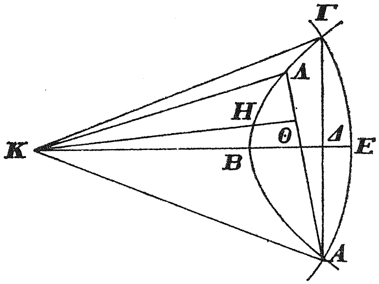
Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Κ ἡ ΜΚΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΑ· ἡ ΜΝ ἄρα εἶναι ἄξων τῆς τομῆς συζυγὴς πρὸς τὴν ΒΚ.

48

Ἀφοῦ λοιπὸν ταῦτα ἀπεδείχθησαν νὰ δειχθῇ, ὅτι ἄλλοι ἄξονες τῶν αὐτῶν τομῶν δὲν ὑπάρχουσι.

H272 *εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω καὶ ἕτερος ἄξων ὁ ΚΗ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς ἔμπροσθεν ἀχθείσης καθέτου τῆς ΑΘ ἴση ἔσται ἡ ΑΘ τῇ ΘΛ· ὥστε καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΚΛ. ἀλλὰ καὶ τῇ ΚΓ· ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΚΓ· ὅπερ ἄτοπον.*

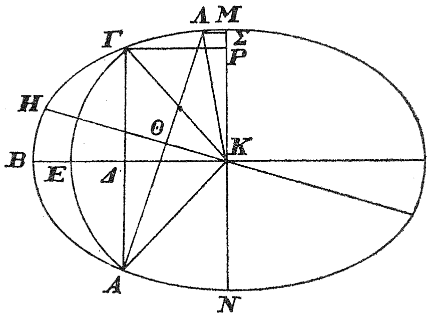
ὅτι μὲν οὖν καὶ ὁ ΑΕΓ κύκλος κατ' ἄλλο σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Β, Γ οὐ συμβάλλει τῇ τομῇ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς φανερόν· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΓΡ, ΛΣ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΚΛ· ἐκ κέντρου γάρ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ ΓΚ τῷ ἀπὸ ΚΛ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΓΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΡΚ, τῷ δὲ ἀπὸ ΛΚ ἴσα τὰ ἀπὸ ΚΣ, ΣΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΓΡ, ΡΚ τοῖς ἀπὸ ΛΣ, ΣΚ ἐστὶν ἴσα. ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΛΣ, τούτῳ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ. πάλιν



ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΜΡΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΜ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΣΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΚ ἴσον τῷ ἀπὸ ΚΜ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΡΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΣΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΚ. ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ. ἐδείχθη δέ, ὅτι, ᾧ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ, τούτῳ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΛΣ· ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΣΛ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ. καὶ ἐπεὶ κατηγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΡ, ΛΣ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΡΝ, τὸ ἀπὸ ΛΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣΝ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλος ἄξων ὁ ΚΗ. Ὅπως λοιπὸν εἰς τὰ προηγούμενα, ἀφοῦ ἀχθῇ κάθετος ἡ ΑΘ θὰ εἶναι ἡ ΑΘ $=$ ΘΛ (1 ὁρισ. 4)· ὥστε εἶναι καὶ ἡ ΑΚ $=$ ΚΛ (Εὐκλ. 1, 4). Ἀλλ' εἶναι καὶ ΑΚ $=$ ΚΓ (Εὐκλ. 1, 4)· εἶναι ἄρα ἡ ΚΛ $=$ ΚΓ· ὅπερ ἄτοπον.

Ὅτι μὲν λοιπὸν καὶ ὁ κύκλος ΑΕΓ κατ' ἄλλο σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Β, Γ δὲν συναντᾷ τὴν τομήν, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς εἶναι φανερόν· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἂς ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΓΡ, ΛΣ. Ἐπειδὴ



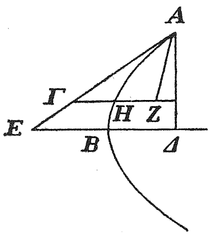
λοιπὸν ἡ ΚΓ $=$ ΚΛ· διότι εἶναι ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἑπομένως εἶναι καὶ $ΚΓ^2 = ΚΛ^2$. Ἀλλὰ $ΓΚ^2 = ΓΡ^2 + ΡΚ^2$, καὶ $ΛΚ^2 = ΚΣ^2 + ΣΛ^2$ (Εὐκλ. 1, 47)· εἶναι ἄρα $ΓΡ^2 + ΡΚ^2 = ΛΣ^2 + ΣΚ^2$. Ἡ διαφορὰ λοιπὸν $ΓΡ^2 - ΛΣ^2 = ΣΚ^2 - ΚΡ^2$. Πάλιν ἐπειδὴ $ΜΡ \times ΡΝ + ΡΚ^2 = ΚΜ^2$ (Εὐκλείδης 2, 5), εἶναι δὲ καὶ $ΜΣ \times ΣΝ + ΣΚ^2 = ΚΜ^2$ (Εὐκλ. 2, 5), εἶναι ἄρα $ΜΡ \times ΡΝ + ΡΚ^2 = ΜΣ \times ΣΝ + ΣΚ^2$. Ἡ διαφορὰ ἄρα $ΣΚ^2 - ΚΡ^2 = ΜΡ \times ΡΝ - ΜΣ \times ΣΝ$. Ἐδείχθη δέ, ὅτι ἡ διαφορὰ $ΣΚ^2 - ΚΡ^2 = ΓΡ^2 - ΛΣ^2$· ἡ διαφορὰ ἄρα $ΓΡ^2 - ΣΛ^2 = ΜΡ \times ΡΝ - ΜΣ \times ΣΝ$. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΓΡ, ΛΣ εἶναι κατηγμέναι, εἶναι ὡς $ΓΡ^2 : ΜΡ \times ΡΝ = ΛΣ^2 : ΜΣ \times ΣΝ$ (1,

ἐδείχθη δὲ καὶ ἐν ἀμφοτέροις ἡ αὐτὴ ὑπεροχή· ἴσον ἄρα τὸ
H274 μὲν ἀπὸ ΓΡ τῷ ὑπὸ ΜΡΝ, τὸ δὲ ἀπὸ ΛΣ τῷ ὑπὸ ΜΣΝ. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΓΜ γραμμή· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἔλλειψις.

μθ′

Κώνου τομῆς δοθείσης καὶ σημείου μὴ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ σημείου εὐθεῖαν καθ᾽ ἓν ἐπιψαύουσαν τῆς τομῆς.

ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΒΔ. δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐντὸς τῆς τομῆς, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν, ὡς πρόκειται.



τὸ δὴ δοθὲν σημεῖον ἤτοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐστιν ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐν τῷ λοιπῷ ἐκτὸς τόπῳ.

ἔστω οὖν ἐπὶ τῆς γραμμῆς, καὶ ἔστω τὸ Α, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΑΕ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ θέσει. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΔ· καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ. καὶ ἔστι τὸ Β δοθέν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΔ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. φανερὸν δή, ὅτι ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ἔστω πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Ε, καὶ

21). Ἐδείχθη δὲ καὶ εἰς τὰς δύο σχέσεις ἡ αὐτὴ διαφορά· εἶναι ἄρα τὸ μὲν $ΓΡ^2 = ΜΡ \times ΡΝ$, τὸ δὲ $ΛΣ^2 = ΜΣ \times ΣΝ$ (Εὐκλ. 5, 16, 17, 9). Εἶναι ἄρα ἡ γραμμὴ ΛΓΜ κύκλος (1, 5)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ὑπετέθη ἔλλειψις.

49

Δοθείσης κώνου τομῆς καὶ σημείου μὴ εὑρισκομένου ἐντὸς τῆς τομῆς νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου εὐθεῖα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς ἓν σημεῖον.

Ἔστω προηγουμένως ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ παραβολή, τῆς ὁποίας ἄξων ἔστω ὁ ΒΔ. Πρέπει λοιπὸν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τὸ ὁποῖον δὲν εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς τομῆς, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, ὡς προϋπετέθη.

Τὸ δοθὲν λοιπὸν σημεῖον ἢ θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ εἰς τὸν ἐκτὸς ὑπόλοιπον τόπον.

[Ἀνάλυσις]. Ἔστω λοιπὸν ἐπὶ τῆς γραμμῆς, καὶ ἔστω τὸ Α, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΑΕ, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΑΔ· θὰ εἶναι λοιπὸν αὕτη δεδομένη κατὰ τὴν θέσιν (Εὐκλ. Δεδομένα 30). Καὶ εἶναι ἡ ΒΕ = ΒΔ (1, 35)· καὶ εἶναι δοθεῖσα ἡ ΒΔ· εἶναι ἄρα δοθεῖσα καὶ ἡ ΒΕ. Καὶ εἶναι τὸ Β δοθέν· εἶναι ἄρα δοθὲν καὶ τὸ Ε (Εὐκλ. Δεδομ. 27). Ἀλλὰ καὶ τὸ Α εἶναι δοθέν· εἶναι ἄρα ἡ ΑΕ θέσει δοθεῖσα.

[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ καὶ ἂς ληφθῇ ΒΔ = ΒΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΕ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι αὕτη ἐφάπτεται τῆς τομῆς (1, 35).

[Ἀνάλυσις]. Ἔστω πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΑΕ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΔ. καὶ δοθεῖσα ἡ ΒΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΒΔ. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Β· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Δ. H276 καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἡ ΔΑ. δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ε· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΔ ὀρθὴ ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. φανερὸν δή, ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΑΕ.

φανερὸν δέ, ὅτι καὶ ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ αὐτὸ ᾖ τῷ Β, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ὀρθὴ ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ἔστω δὴ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΑ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῷ ἄξονι, τουτέστι τῇ ΒΔ, παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΖ τεταγμένως ἤχθω ἡ ΑΖ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΓΗ τῇ ΖΗ. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Η· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. καὶ ἀνῆκται ἡ ΖΑ τεταγμένως, τουτέστι παράλληλος τῇ κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένῃ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΑ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Α· ἀλλὰ καὶ τὸ Γ. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ.

συντεθήσεται οὕτως· ἤχθω διὰ τοῦ Γ παράλληλος τῇ ΒΔ ἡ ΓΖ, καὶ κείσθω τῇ ΓΗ ἡ ΖΗ ἴση, καὶ τῇ κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. φανερὸν δή, ὅτι ποιήσει τὸ πρόβλημα.

Ἔστω πάλιν ὑπερβολή, ἧς ἄξων ὁ ΔΒΓ, κέντρον δὲ τὸ τὸ Ε, καὶ ἂς γίνῃ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη ἡ ΑΕ, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΑΔ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΒΕ = ΒΔ (1, 35). Καὶ εἶναι δοθεῖσα ἡ ΒΕ· εἶναι ἄρα δοθεῖσα καὶ ἡ ΒΔ. Καὶ εἶναι δοθὲν τὸ Β· εἶναι ἄρα δοθὲν καὶ τὸ Δ (Εὐκλ. Δεδομ. 27). Καὶ εἶναι κάθετος ἡ ΔΑ· εἶναι θέσει δοθεῖσα ἡ ΔΑ (Εὐκλ. Δεδομ. 29). Εἶναι ἄρα δοθὲν τὸ Α (Εὐκλ. Δεδομ. 25). Ἀλλὰ καὶ τὸ Ε εἶναι δεδομένον· εἶναι ἄρα ἡ ΑΕ θέσει δοθεῖσα (Εὐκλ. Δεδομ. 26).

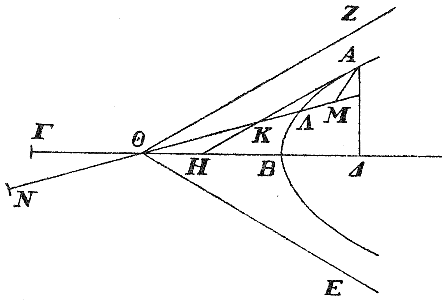
[Σύνθεσις]. Ἡ σύνθεσις θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς· ἂς ληφθῇ ΒΕ = ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΕΔ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΔΑ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΕ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΑΕ ἐφάπτεται.

Εἶναι δὲ ἀκόμη φανερόν, ὅτι καὶ ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ Β, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἀγομένη κάθετος ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

[Ἀνάλυσις]. Ἔστω τώρα τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἂς γίνῃ (τὸ ἐπίταγμα), καὶ ἔστω ἡ ΓΑ, καὶ διὰ τοῦ Γ πρὸς τὸν ἄξονα, τουτέστι τὴν ΒΔ, ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΓΖ· εἶναι ἄρα δεδομένη κατὰ τὴν θέσιν ἡ ΓΖ. Καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΖ ἂς ἀχθῇ τεταγμένως ἡ ΑΖ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΓΗ = ΖΗ. Καὶ εἶναι δοθὲν τὸ Η· εἶναι ἄρα δοθὲν καὶ τὸ Ζ. Καὶ ἀνήχθη τεταγμένως ἡ ΖΑ, τουτέστι παράλληλος πρὸς τὴν κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένην· εἶναι ἄρα δεδομένη κατὰ τὴν θέσιν ἡ ΖΑ. Εἶναι ἄρα δοθὲν καὶ τὸ Α (Εὐκλ. Δεδομ. 25)· ἀλλὰ εἶναι καὶ τὸ Γ. Εἶναι ἄρα δεδομένη κατὰ τὴν θέσιν ἡ ΓΑ.

[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΓΖ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΖΗ = ΓΗ καὶ πρὸς τὴν κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένην ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΖΑ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΓ. Εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι πληροῖ αὕτη τὸ πρόβλημα (ὅτι δηλ. εἶναι ἐφαπτομένη) (1, 35).

Ἔστω πάλιν ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ὁ ΔΒΓ, *Θ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΘΕ, ΘΖ. τὸ δὴ διδόμενον σημεῖον ἤτοι ἐπὶ τῆς τομῆς δοθήσεται ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ΕΘΖ γωνίας ἢ ἐν τῷ ἐφεξῆς τόπῳ ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν ἢ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ὑπὸ ΖΘΕ γωνίας.*



H278 *ἔστω πρότερον ἐπὶ τῆς τομῆς ὡς τὸ Α, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΑΗ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἔστω ἡ ΒΓ· ἔσται δή, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ. λόγος δὲ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Η. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΗ.*

συντεθήσεται οὕτως· ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

πάλιν δὴ ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Η, καὶ γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἡ ΑΗ ἐφαπτομένη, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται, ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Η· θέσει ἄρα ἐστὶν κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΘΕ, ΘΖ. Τὸ διδόμενον τώρα σημεῖον ἢ θὰ δοθῇ ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐντὸς τῆς γωνίας ΕΘΖ ἢ εἰς τὸν ἐφεξῆς τόπον ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν ἢ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῶν περιεχουσῶν τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας ΖΘΕ.

[᾿Ανάλυσις]. ῎Εστω προηγουμένως, ὅτι τὸ σημεῖον εἶναι ἐπὶ τῆς τομῆς ὅπως τὸ Α, καὶ ἂς γίνῃ ἡ κατασκευή, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΑΗ, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΑΔ, πλάγιος δὲ ἄξων τῆς ὑπερβολῆς ἔστω ἡ ΒΓ (ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο ἀντικειμένων)· θὰ εἶναι λοιπόν, ὡς ἡ ΓΔ:ΔΒ = ΓΗ:ΗΒ (1, 36). Εἶναι δὲ ὁ λόγος τῆς ΓΔ:ΔΒ δοθεὶς (Εὐκλ. Δεδομ. 1)· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι δοθεῖσα· ὁ λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ:ΗΒ εἶναι δοθείς. Καὶ ἡ ΒΓ εἶναι δοθεῖσα· εἶναι ἄρα δοθὲν τὸ Η (Εὐκλ. Δεδομ. 7). ᾿Αλλὰ εἶναι δοθὲν καὶ τὸ Α· ἡ ΑΗ ἄρα εἶναι θέσει δοθεῖσα (Εὐκλ. Δεδομ. 26).

[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα δὲ θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ καὶ ἔστω ὁ λόγος ΓΔ:ΔΒ = ΓΗ:ΗΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΗ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

[᾿Ανάλυσις]. Πάλιν τώρα ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον Η ἐπὶ τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς γίνῃ ἡ κατασκευή, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΗ ἐφαπτομένη, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ κάθετος. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους θὰ εἶναι, ὡς ἡ ΓΗ:ΗΒ = ΓΔ:ΔΒ (1, 36). Καὶ εἶναι δοθεῖσα ἡ ΒΓ· εἶναι ἄρα δοθὲν τὸ Δ (Εὐκλ. Δεδομ. 7). Καὶ εἶναι κάθετος ἡ ΔΑ· ἡ ΔΑ ἄρα εἶναι θέσει δοθεῖσα (Εὐκλ. Δεδομ. 29). Εἶναι δὲ θέσει δοθεῖσα καὶ ἡ τομή· εἶναι ἄρα τὸ Α δοθὲν (Εὐκλ. Δεδομ. 25). ᾿Αλλὰ καὶ τὸ Η εἶναι δοθέν· εἶναι ἄρα ἡ ΑΗ θέσει δοθεῖσα (Εὐκλ.

ἡ ΑΗ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, καὶ τῷ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ, καὶ ὀρθὴ ἤχθω ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΑΗ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ Η ἀχθήσεται ἑτέρα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

H280 τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ΕΘΖ γωνίας τόπῳ τὸ Κ, καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ ΛΘ ἴση ἡ ΘΝ· πάντα ἄρα δοθέντα. ἔσται δὴ καὶ ἡ ΛΝ δοθεῖσα. ἤχθω δὴ τεταγμένως ἡ ΑΜ ἐπὶ τὴν ΜΝ· ἔσται δὴ καί, ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΛ. λόγος δὲ τῆς ΝΚ πρὸς ΚΛ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς ΜΛ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Λ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Μ. καὶ [παρατεταγμένως] ἀνῆκται ἡ ΜΑ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ παράλληλος· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΛΒ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΑΚ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ ΘΛ ἴση κείσθω ἡ ΘΝ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ, καὶ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ· ἡ ΚΑ ἄρα ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Δεδομένα 26).

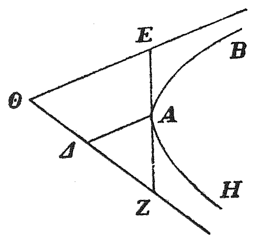
[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα δὲ θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἂς ληφθῶσι τὰ μὲν ἄλλα ὡς προηγουμένως, καὶ ἂς γίνῃ ΓΗ:ΗΒ=ΓΔ:ΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΔΑ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΗ. Εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι ἡ ΑΗ πληροῖ τὸ πρόβλημα (1, 34), καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ Η θὰ ἀχθῇ ἄλλη ἐφαπτομένη τῆς τομῆς πρὸς τὰ ἄλλα μέρη.

[Ἀνάλυσις]. Τῶν αὐτῶν δεδομένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, εἰς τὸν τόπον τὸν ἐντὸς τῆς γωνίας ΕΘΖ, καὶ ὅτι πρέπει ἀπὸ τοῦ Κ νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς. Ἂς ἀχθῇ (ἀνάλυσις), καὶ ἔστω ὅτι εἶναι ἡ ΚΑ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΘ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΘΝ=ΛΘ· εἶναι ἄρα ὅλα δοθέντα. Θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ ΛΝ δοθεῖσα. Ἂς ἀχθῇ τώρα ἡ ΑΜ τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΜΝ· θὰ εἶναι λοιπὸν καί, ὡς ἡ ΝΚ:ΚΛ=ΜΝ:ΜΛ (1, 36). Εἶναι δὲ ὁ λόγος ΝΚ:ΚΛ δοθεὶς (Εὐκλ. Δεδομ. 1)· καὶ ὁ λόγος ἄρα τῆς ΝΜ:ΜΛ εἶναι δοθείς. Καὶ εἶναι δοθὲν τὸ Λ (Εὐκλ. Δεδομ. 25)· εἶναι ἄρα δοθὲν καὶ τὸ Μ (Εὐκλ. Δεδομ. 27). Καὶ ἔχει ἀναχθῇ ἡ ΜΑ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Λ· εἶναι ἄρα ἡ ΜΑ θέσει δοθεῖσα (Εὐκλ. Δεδομ. 28). Εἶναι δὲ καὶ ἡ τομὴ ΑΛΒ θέσει δοθεῖσα· εἶναι ἄρα τὸ Α δοθὲν (Εὐκλ. Δεδ. 25). Ἀλλὰ καὶ τὸ Κ εἶναι δοθέν· εἶναι ἄρα ἡ ΑΚ δοθεῖσα (Εὐκλ. Δεδ. 26).

[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα δὲ θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἂς ληφθῶσι τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΘ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΘΝ=ΘΛ, καὶ ἂς γίνῃ ὡς ἡ ΝΚ:ΚΛ=ΝΜ:ΜΛ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΜΑ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Λ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΑ· ἡ ΚΑ ἄρα ἐφάπτεται τῆς τομῆς (1, 34).

καὶ φανερόν, ὅτι καὶ ἑτέρα ἀχθήσεται ἀπὸ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν τὸ Ζ, καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. καὶ γεγο-
H282 *νέτω, καὶ ἔστω ἡ ΖΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΔΘ τῇ ΔΖ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΑΕ ἴση ἐστί. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΖΘ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καὶ διὰ δεδομένου τοῦ Δ παρὰ θέσει τὴν ΕΘ παράλληλος ἦκται ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ζ· θέσει ἄρα ἡ ΖΑΕ.*



συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ τομὴ ἡ ΑΒ, καὶ αἱ ΕΘ, ΘΖ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν τὸ Ζ, καὶ τετμήσθω ἡ ΖΘ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΘΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΔΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΑΕ. ὥστε διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ ΖΑΕ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ἑξῆς τόπῳ τῶν περιεχουσῶν τὴν τομήν, καὶ ἔστω τὸ Κ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω· ἔσται δὴ θέσει. ἐὰν δὴ ἐπὶ τῆς τομῆς

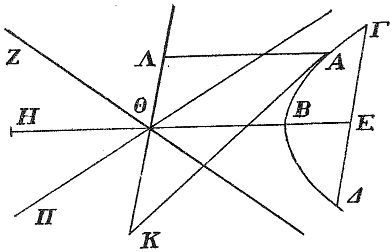
Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ἄλλη ἐφαπτομένη τῆς τομῆς θὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς τὰ ἄλλα μέρη.

Τῶν αὐτῶν δεδομένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν τὸ Ζ, καὶ ἔστω ὅτι πρέπει νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς. Καὶ ἂς ἀχθῇ (ἀνάλυσις), καὶ ἔστω ἡ ΖΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΘ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΔΘ = ΔΖ (Εὐκλ. 6, 1), ἐπειδὴ καὶ ἡ ΖΑ = ΑΕ (θ. 3). Καὶ εἶναι δοθεῖσα ἡ ΖΘ· εἶναι ἄρα τὸ Δ δοθὲν (Εὐκλ. Δεδομ. 7). Καὶ διὰ δεδομένου τοῦ Δ ἤχθη πρὸς τὴν θέσει δοθεῖσαν τὴν ΕΘ παράλληλος ἡ ΔΑ· εἶναι ἄρα θέσει δοθεῖσα ἡ ΔΑ (Εὐκλ. Δεδομ. 28). Εἶναι δὲ καὶ ἡ τομὴ θέσει δοθεῖσα· εἶναι ἄρα τὸ Α δοθὲν (Εὐκλ. Δεδομ. 25). Ἀλλὰ καὶ τὸ Ζ εἶναι δοθέν· εἶναι ἄρα θέσει δοθεῖσα ἡ ΖΑΕ (Εὐκλ. Δεδομ. 26).

[Σύνθεσις]. Θὰ συντεθῇ δὲ τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς· ἔστω ἡ τομὴ ἡ ΑΒ, καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι ΕΘ, ΘΖ, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν τὸ Ζ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΖΘ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ καὶ διὰ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΘΕ ἡ ΔΑ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΑ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΔ = ΔΘ εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΖΑ = ΑΕ (Εὐκλ. 6, 2). Ὥστε κατὰ τὰ προαποδεδειγμένα ἡ ΖΑΕ ἐφάπτεται τῆς τομῆς (θ. 9).

Τῶν αὐτῶν δεδομένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον εἰς τὸν τόπον τῆς ἐφεξῆς γωνίας (τῶν ἀσυμπτώτων) τῶν περιεχουσῶν τὴν τομήν, καὶ ἔστω τὸ Κ· πρέπει λοιπὸν ἀπὸ τοῦ Κ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. Καὶ ἂς γίνῃ ἡ κατασκευὴ (ἀνάλυσις), καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΚΑ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΘ ἂς ἐκ-

ληφθῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΚΘ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΓΔ, ἔσται θέσει. καὶ ἐὰν τμηθῇ ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΕ ἐκβληθῇ, ἔσται θέσει διάμετρος οὖσα συζυγὴς τῇ ΚΘ. κείσθω δὴ τῇ ΒΘ ἴση ἡ ΘΗ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΒΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· ἔσται δὴ διὰ τὸ εἶναι τὰς ΚΛ, ΒΗ συζυγεῖς διαμέτρους καὶ ἐφαπτομένην τὴν ΑΚ καὶ τὴν ΑΛ ἀχθεῖσαν παρὰ τὴν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘΛ
H284 ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΒΗ εἴδους. δοθὲν ἄρα



τὸ ὑπὸ ΚΘΛ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΚΘ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΘΛ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Θ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Λ. καὶ διὰ τοῦ Λ παρὰ θέσει τὴν ΒΗ ἦκται ἡ ΛΑ· θέσει ἄρα ἡ ΛΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ ΑΚ.

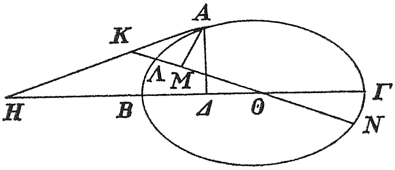
συντεθήσεται δὴ οὕτως· ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ ἐν τῷ προειρημένῳ τόπῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Γ, καὶ τῇ ΚΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα τῷ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΘΗ· ἡ ἄρα ΗΒ πλαγία διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ ΚΘΛ. κείσθω δὴ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΒΗ βληθῇ· θὰ εἶναι λοιπὸν αὕτη θέσει δεδομένη (Εὐκλ. Δεδομ. 26). Ἐὰν τώρα ληφθῇ ἐπὶ τῆς τομῆς δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἀχθῇ πρὸς τὴν ΚΘ παράλληλος ἡ ΓΔ, θὰ εἶναι αὕτη θέσει δεδομένη (Εὐκλ. Δεδομ. 28). Καὶ ἐὰν τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΓΔ εἰς τὸ Ε, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΕ ἐκβληθῇ, θὰ εἶναι αὕτη θέσει δοθεῖσα διάμετρος (Εὐκλ. Δεδομ. 26), ἐνῷ εἶναι συζυγὴς πρὸς τὴν ΚΘ (1 ὁρισ. 6). Ἄς ληφθῇ τώρα ἡ ΘΗ = ΒΘ, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΘ· θὰ εἶναι λοιπόν, ἐπειδὴ αἱ ΚΛ, ΒΗ εἶναι συζυγεῖς διάμετροι, καὶ ἡ ΑΚ εἶναι ἐφαπτομένη, καὶ ἡ ΑΛ ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΗ, καὶ τὸ ΚΘ x ΘΛ = 1/4 τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν ΒΗ καὶ τὴν παράμετρον (1, 38. Ὁρισμ. πρῶτοι 3). Εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΚΘ x ΘΛ δοθέν· καὶ εἶναι δοθεῖσα ἡ ΚΘ (Εὐκλ. Δεδομ. 26)· εἶναι ἄρα δοθεῖσα καὶ ἡ ΘΛ (Εὐκλ. Δεδομ. 57). Ἀλλ᾽ αὕτη εἶναι δοθεῖσα καὶ θέσει· καὶ εἶναι δοθὲν τὸ Θ· εἶναι ἄρα δοθὲν καὶ τὸ Λ (Εὐκλ. Δεδομ. 27). Καὶ διὰ τοῦ Λ πρὸς τὴν θέσει δοθεῖσαν τὴν ΒΗ ἔχει ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΛΑ· εἶναι ἄρα θέσει δοθεῖσα ἡ ΛΑ (Εὐκλ. Δεδομ. 28). Εἶναι δὲ θέσει δοθεῖσα καὶ ἡ τομή· εἶναι ἄρα τὸ Α δοθὲν (Εὐκλ. Δεδομ. 25). Ἀλλὰ καὶ τὸ Κ εἶναι δοθέν· εἶναι ἄρα θέσει δοθεῖσα ἡ ΑΚ (Εὐκλ. Δεδομ. 26).

[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα δὲ θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἂς ληφθῶσιν τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ εἰς τὸν προειρημένον τόπον, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΘ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι τὸ Γ, καὶ πρὸς τὴν ΚΘ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΓΔ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΓΔ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΘ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΘΗ = ΒΘ· ἡ ΗΒ ἄρα εἶναι πλαγία συζυγὴς διάμετρος πρὸς τὴν ΚΘΛ (1 ὁρισ. 6).

εἴδους ἴσον τὸ ὑπὸ ΚΘΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ· φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΚΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ θεωρήματος.

ἐὰν δὲ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν ΖΘΠ δοθῇ, ἀδύνατον ἔσται τὸ πρόβλημα. ἡ γὰρ ἐφαπτομένη τεμεῖ τὴν ΗΘ. ὥστε συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘΠ· ὅπερ ἀδύνατον διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ λα′ τοῦ πρώτου καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τούτου τοῦ βιβλίου.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ἡ τομὴ ἔλλειψις, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Α, καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Α ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ



ΑΗ, καὶ τεταγμένως ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸν ΒΓ ἄξονα ἤχθω H286 ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ δοθὲν τὸ Δ, καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ. καὶ ἔστι λόγος τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ δοθείς. δοθὲν ἄρα τὸ Η. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται, ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς.

ἔστω δὴ πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΛΘ ἐπὶ τὸ Θ κέντρον ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ν·

Ἂς ληφθῇ πρὸς τὸ 1/4 τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν ΒΗ καὶ τὴν παράμετρον ἴσον τὸ ὀρθογώνιον ΚΘ x ΘΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ ἡ ΛΑ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΗ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΑ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΚΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς διὰ τὸ ἀντίστροφον τοῦ (1, 38) θεωρήματος.

Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον δοθῇ εἰς τὸν τόπον τὸν μεταξὺ τῶν ΖΘ, ΘΠ, τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι ἀδύνατον. Διότι ἡ ἐφαπτομένη θὰ τέμνῃ τὴν ΗΘ. Ὥστε θὰ συναντήσῃ ἑκατέραν τῶν ΖΘ, ΘΠ· ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὰς ἀποδείξεις τοῦ 31 θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου καὶ τοῦ τρίτου θεωρήματος τούτου τοῦ βιβλίου.

Τῶν αὐτῶν δεδομένων ἔστω, ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἔλλειψις, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Α, καὶ ἔστω, ὅτι πρέπει ἀπὸ τοῦ Α νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς. Ἂς τὴν φέρωμεν (ἀνάλυσις) καὶ ἔστω ἡ ΑΗ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΓ τεταγμένως ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΔ· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ δοθὲν (Εὐκλ. Δεδομ. 25, 28), καὶ θὰ εἶναι ὡς ἡ ΓΔ:ΔΒ = ΓΗ:ΗΒ (1, 36). Καὶ εἶναι ὁ λόγος ΓΔ:ΔΒ δοθεὶς (Εὐκλ. Δεδομ. 1)· ἑπομένως καὶ ὁ λόγος ΓΗ:ΗΒ εἶναι δοθείς. Εἶναι ἄρα τὸ Η δοθέν. Ἀλλὰ καὶ τὸ Α εἶναι δοθέν· εἶναι ἄρα ἡ ΑΗ θέσει δοθεῖσα (Εὐκλ. Δεδομ. 26).

[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα δὲ θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ κάθετος, καὶ ἔστω ΓΔ:ΔΒ = ΓΗ:ΗΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΗ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται, ὅπως καὶ εἰς τὴν ὑπερβολὴν (1, 34).

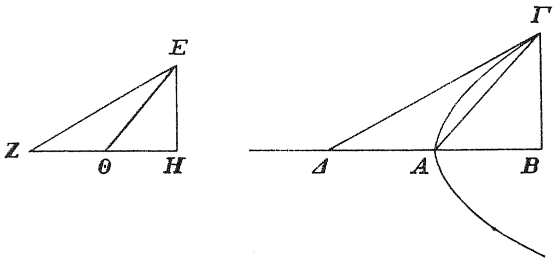
Ἔστω τώρα πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἔστω ὅτι πρέπει νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην. Ἂς τὴν φέρωμεν (ἀνάλυσις), καὶ ἔστω ἡ ΚΛ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΛΘ μέχρι τοῦ κέντρου Θ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Ν· θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦτο θέσει δοθὲν ἔσται δὴ θέσει. καὶ ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΜ τεταγμένως, ἔσται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ. λόγος δὲ τῆς ΚΝ πρὸς ΚΛ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΜΝ πρὸς ΛΜ δοθεὶς. δοθὲν ἄρα τὸ Μ. καὶ ἀνῆκται ἡ ΜΑ· παράλληλος γάρ ἐστι τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ· θέσει ἄρα ἡ ΜΑ. δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ ΚΑ.

ἡ δὲ σύνθεσις ἡ αὐτὴ τῇ πρὸ αὐτοῦ.

ν'

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι γωνίαν ποιήσει ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

H288 ἔστω κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ ΑΒ ἄξονι



γωνίαν ποιήσει ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ.

γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία. ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ· ἔστι δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Β δοθεῖσα. λόγος ἄρα τῆς ΔΒ πρὸς ΒΓ δοθείς. τῆς δὲ ΒΔ πρὸς ΒΑ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία· δοθεῖσα

(Εὐκλ. Δεδομ. 26). Καὶ ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΜ τεταγμένως, θὰ εἶναι, ὡς ἡ ΝΚ:ΚΛ = ΝΜ:ΜΛ (1, 36). Εἶναι δὲ ὁ λόγος ΚΝ:ΚΛ δοθεὶς (Εὐκλ. Δεδομ. 1)· εἶναι ἄρα καὶ ὁ λόγος ΜΝ:ΛΜ δοθείς. Εἶναι ἄρα τὸ Μ δοθέν. Καὶ ἡ ΜΑ ἔχει ἀναχθῇ (τεταγμένως)· διότι εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Λ· εἶναι ἄρα ἡ ΜΑ θέσει δοθεῖσα (Εὐκλ. Δεδομ. 29). Δοθὲν ἄρα τὸ Α (Εὐκλ. Δεδομ. 25). Ἀλλὰ καὶ τὸ Κ εἶναι δοθέν· εἶναι ἄρα ἡ ΚΑ θέσει δοθεῖσα.

Ἡ δὲ σύνθεσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ αὐτὴ ὅπως τοῦ προηγουμένου.

50

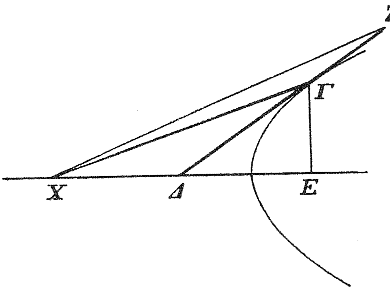
Εἰς δοθεῖσαν κώνου τομὴν νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην, ἡ ὁποία μετὰ τοῦ ἄξονος καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς τομῆς νὰ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην πρὸς δοθεῖσαν ὀξεῖαν γωνίαν.

Ἔστω πρῶτον ἡ τομὴ τοῦ κώνου παραβολή, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ὁ ΑΒ· πρέπει λοιπὸν νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς, ἡ ὁποία μετὰ τοῦ ἄξονος ΑΒ νὰ σχηματίσῃ γωνίαν πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς τομῆς ἴσην πρὸς δοθεῖσαν ὀξεῖαν γωνίαν.

[Ἀνάλυσις]. Ἂς γίνῃ ἡ κατασκευὴ καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· εἶναι ἄρα δοθεῖσα ἡ γωνία ΒΔΓ. Ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΒΓ· τώρα εἶναι καὶ ἡ παρὰ τὸ Β γωνία δοθεῖσα. Ὁ λόγος ἄρα ΔΒ:ΒΓ εἶναι δοθεὶς (Εὐκλ. Δεδομ. 40). Εἶναι δὲ δοθεὶς καὶ ὁ λόγος ΒΔ:ΒΑ (Εὐκλ. Δεδομ. 1)· εἶναι ἄρα καὶ ὁ λόγος ΑΒ:ΒΓ δοθεὶς (Εὐκλ. Δεδομ. 8). Καὶ εἶναι ἡ παρὰ τὸ Β γωνία δοθεῖσα·

ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. καὶ ἔστι πρὸς θέσει τῇ ΒΑ καὶ δοθέντι τῷ Α· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ ἐφάπτεται ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ, καὶ εἰλήφθω σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΖ τὸ Ε, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΗ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΗ τῷ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΕ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΘΕ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ, καὶ τῇ ΒΑ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ. ἐφαπτομένη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς τομῆς.



λέγω δή, ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖΗ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν,
H290 ΒΓ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Η,Β γωνίαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Δ γωνίᾳ.

Ἔστω ἡ τομὴ ὑπερβολή, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΧ καὶ κάθετος ἡ ΓΕ· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ δοθείς· ὁ αὐτὸς γάρ ἐστι τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν. τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ (Εὐκλ. Δεδομ. 41). Καὶ ἡ γωνία αὐτὴ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς δοθείσης κατὰ τὴν θέσιν ΒΑ καὶ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Α· εἶναι ἄρα ἡ ΓΑ θέσει δοθεῖσα (Εὐκλ. Δεδομ. 29). Εἶναι δὲ θέσει δοθεῖσα καὶ ἡ τομή· εἶναι ἄρα τὸ Γ δοθὲν (Εὐκλ. Δεδομ. 25). Καὶ ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ ΓΔ· εἶναι ἄρα ἡ ΓΔ θέσει δοθεῖσα.

[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα δὲ θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἔστω πρῶτον ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ παραβολή, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ ΕΖΗ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΕΖ σημεῖον τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΕΗ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΖΗ κατὰ τὸ Θ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΕ, καὶ πρὸς τὴν γωνίαν ΗΘΕ ἂς κατασκευασθῇ ἴση ἡ ΒΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ = ΒΑ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΔ. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς (1, 35).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΓΔΒ = γων. ΕΖΗ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΖΗ:ΗΘ = ΔΒ:ΒΑ (Εὐκλ. 6, 2), εἶναι δὲ καὶ ΘΗ:ΗΕ = ΑΒ:ΒΓ, δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι ΖΗ:ΗΕ = ΔΒ:ΒΓ (Εὐκλ. 5, 20). Καὶ εἶναι ὀρθαὶ αἱ παρὰ τὰ Η καὶ Β γωνίαι· εἶναι ἄρα ἡ γωνία Ζ = γων.Δ (Εὐκλ. 6, 16).

[Ἀνάλυσις]. Ἔστω ἡ τομὴ ὑπερβολή, καὶ ἂς γίνῃ ἡ κατασκευή, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΧ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΕ· εἶναι ἄρα ὁ λόγος τοῦ ΧΕ x ΕΔ : ΕΓ^2 δοθείς· διότι εἶναι ὁ αὐτὸς λόγος πρὸς τὸν λόγον τοῦ πλαγίου ἄξονος πρὸς τὴν παράμετρον (1, 37). Ὁ δὲ λόγος ΓΕ^2 : ΕΔ^2 εἶναι δοθεὶς (Εὐκλ. Δεδομ.

ἀπὸ τῆς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΕ, ΔΕΓ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΧΕ πρὸς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθεῖσα ἡ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Χ. πρὸς δὴ θέσει εὐθείᾳ τῇ ΧΕ καὶ δοθέντι τῷ Χ διῆκταί τις ἡ ΓΧ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ· θέσει ἄρα ἡ ΓΧ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ διῆκται ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ.

ἤχθω ἀσύμπτωτος τῆς τομῆς ἡ ΖΧ· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἀσυμπτώτῳ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ. μείζων ἄρα ἔσται ἡ ὑπὸ ΖΔΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΖΧΔ. δεήσει ἄρα εἰς τὴν σύνθεσιν τὴν δεδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων.

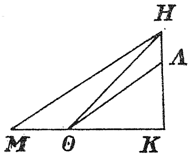
συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΧΖ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ τῶν ΑΧΖ ἡ ὑπὸ ΚΘΗ, καὶ ἔστω τῇ ὑπὸ τῶν ΑΧΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΛ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΖ, εἰλήφθω δέ τι
H292 σημεῖον ἐπὶ τῆς ΗΘ τὸ Η, καὶ ἤχθω ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΘΚ κάθετος ἡ ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΧΑ τῇ ὑπὸ ΛΘΚ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Κ γωνίαι ὀρθαί, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΧΑ πρὸς ΑΖ, ἡ ΘΚ πρὸς ΚΛ. ἡ δὲ ΘΚ πρὸς ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΗΚ· καὶ ἡ ΧΑ πρὸς ΑΖ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΚ πρὸς ΚΗ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ἡ πλαγία ἄρα πρὸς τὴν ὀρθίαν

40 . 50)· εἶναι ἄρα δοθεῖσα ἑκατέρα τῶν ΓΔΕ, ΔΕΓ. Ὁ λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΧΕ x ΕΔ : ΕΔ² εἶναι δοθεὶς (Εὐκλ. Δεδομ. 8)· ὥστε εἶναι δοθεὶς καὶ ὁ λόγος τῆς ΧΕ : ΕΔ (Εὐκλ. 6, 1). Καὶ εἶναι δοθεῖσα ἡ γωνία παρὰ τὸ Ε· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ γωνία παρὰ τὸ Χ (Εὐκλ. Δεδομ. 8 . 41). Πρὸς τὴν θέσει δὲ δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΧΕ καὶ ἐνῷ ἐδόθη τὸ Χ διήχθη εὐθεῖά τις ἡ ΓΧ εἰς δεδομένην γωνίαν· εἶναι ἄρα ἡ ΓΧ θέσει δεδομένη (Εὐκλ. Δεδομ. 29). Εἶναι δὲ καὶ ἡ τομὴ θέσει δεδομένη· δοθὲν ἄρα τὸ σημεῖον Γ (Εὐκλ. Δεδομ. 29). Καὶ ἔχει ἀχθῆ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· εἶναι ἄρα θέσει δεδομένη ἡ ΓΔ.

Ἄς ἀχθῆ ἀσύμπτωτος τῆς τομῆς ἡ ΖΧ· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβληθεῖσα θὰ συναντήσῃ τὴν ἀσύμπτωτον (θ. 3). Ἄς τὴν συναντήσῃ εἰς τὸ Ζ. Θὰ εἶναι ἡ γωνία ΖΔΕ ⟩ γων. ΖΧΔ (Εὐκλ. 1, 16). Θὰ πρέπει ἄρα κατὰ τὴν σύνθεσιν ἡ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς γωνίας τῶν ἀσυμπτώτων.

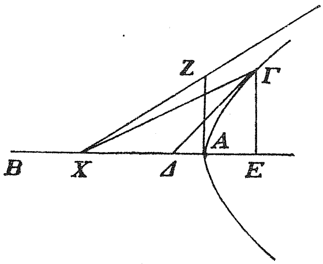
[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα τώρα θὰ συντεθῆ ὡς ἑξῆς· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα κωνικὴ γραμμὴ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ὁ ΑΒ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΧΖ (θ. 3), ἡ δὲ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ ΚΘΗ ⟩ γων. ΑΧΖ, καὶ ἔστω γων. ΑΧΖ = γων. ΚΘΛ, καὶ ἂς ἀχθῆ ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἂς ληφθῆ δὲ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς ΗΘ τὸ Η, καὶ ἂς ἀχθῆ ἀπ' αὐτοῦ ἡ ΗΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν γων. ΖΧΑ = γων. ΛΘΚ, εἶναι δὲ καὶ αἱ παρὰ τὰ γράμματα Α, Κ γωνίαι ὀρθαί, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΧΑ:ΑΖ = ΘΚ:ΚΛ (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι δὲ ΘΚ:ΚΛ ⟩ ΘΚ:ΗΚ (Εὐκλ. 5, 8)· εἶναι ἄρα καὶ ΧΑ:ΑΖ ⟩ ΘΚ : ΚΗ (Εὐκλ. 5, 8). Ὥστε καὶ ΧΑ² : ΑΖ² ⟩ ΘΚ² : ΚΗ². Εἶναι δὲ ΧΑ² : ΑΖ² = πλάγιος ἄξων : παράμετρον (θ. 1)· εἶναι ἄρα πλάγιος ἄξων :

μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ἐὰν δὴ ποιήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, μεῖζον ἔσται τοῦ ἀπὸ ΘΚ. ἔστω τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΜΚ τοῦ ὑπὸ ΜΚΘ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΜΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλαττον τοῦ ἀπὸ ΑΖ· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ὅμοια ποιήσει τὰ τρίγωνα, καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΧΑ τῆς ὑπὸ ΗΜΚ. κείσθω δὴ τῇ ὑπὸ ΗΜΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΧΓ· ἡ ἄρα ΧΓ



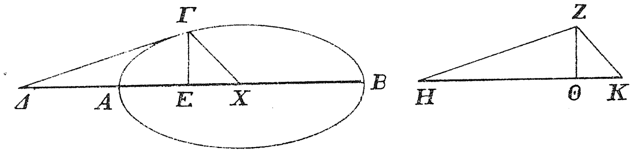
τεμεῖ τὴν τομήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἡ ΓΕ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΧΕ τρίγωνον τῷ ΗΜΚ. ἔστιν ἄρα, ὡς
H294 τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τό τε ὑπὸ ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΘ. ἦν δὲ καί, ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΧ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΜ· δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Κ γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΘΚ.

Ἔστω ἡ τομὴ ἔλλειψις, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ. δεῖ δὴ ἐφαπτοπαράμετρος $> \Theta K^2 : KH^2$. Ἐὰν δὲ κατασκευάσωμεν $XA^2 : AZ^2 =$ ἄλλο τι $: KH^2$, θὰ εἶναι τὸ ἄλλο τι $> \Theta K^2$ (Εὐκλ. 5, 8)· ἔστω τὸ $MK \times K\Theta$· καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν $MK^2 > MK \times K\Theta$, εἶναι ἄρα $MK^2 : KH^2 > MK \times K\Theta : KH^2$, τουτέστι $MK^2 : KH^2 > XA^2 : AZ^2$. Καὶ ἐὰν κατασκευάσωμεν, ὡς $MK^2 : KH^2 = XA^2 :$ ἄλλο τι, θὰ εἶναι τὸ ἄλλο τι μικρότερον τοῦ AZ^2 (Εὐκλ. 5, 8)· καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Χ μέχρι τοῦ ληφθέντος σημείου θὰ σχηματίσῃ ὅμοια τρίγωνα (Εὐκλ. 6, 6) καὶ διὰ τοῦτο εἶναι γων. ΖΧΑ $>$ γων. ΗΜΚ. Ἂς ληφθῇ τώρα γων. ΗΜΚ $=$ γων. ΑΧΓ· ἡ ΧΓ ἄρα θὰ τμήσῃ τὴν τομὴν (θ. 2). Ἂς τὴν τμήσῃ εἰς τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ (θ. 49), καὶ ἡ ΓΕ κάθετος· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΧΕ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγ. ΗΜΚ. Εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $XE^2 : E\Gamma^2 = MK^2 : KH^2$ (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι δὲ καί, ὡς ὁ πλάγιος ἄξων : παράμετρον $=$ καὶ τὸ $XE \times E\Delta : E\Gamma^2$ (θ. 1, 37) καὶ τὸ $MK \times K\Theta : KH^2$. Καὶ ἀνάπαλιν εἶναι ὡς $\Gamma E^2 : XE \times E\Delta = HK^2 : MK \times K\Theta$ (Εὐκλ. 5, 7 πόρ.)· δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι $XE^2 : XE \times E\Delta = MK^2 : MK \times K\Theta$. Καὶ ὡς ἄρα ἡ $XE : E\Delta = MK : K\Theta$. Ἦτο δὲ καί, ὡς ἡ $\Gamma E : EX = HK : KM$. Δι' ἴσου ἄρα (διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι, ὡς $\Gamma E : E\Delta = HK : K\Theta$. Καὶ εἶναι ὀρθαὶ αἱ παρὰ τὰ Ε, Κ γωνίαι· εἶναι ἄρα γων. Δ (δηλ. ΓΔΕ) $=$ γων. ΗΘΚ (Εὐκλ. 6, 16).



Ἔστω ἡ τομὴ ἔλλειψις, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ὁ ΑΒ. Πρέπει μένην ἀγαγεῖν τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην γωνίαν περιέξει τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΑ γωνία. ἤχθω κάθετος ἡ ΓΕ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ δοθείς. ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΧ. τοῦ δὴ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὁ γὰρ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος
H296 ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΔΕ πρὸς ΕΓ· καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς ΕΧ



λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα ἡ πρὸς τῷ Χ γωνία. καὶ ἔστι πρὸς θέσει καὶ δοθέντι σημείῳ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον. καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ.

συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΖΗ τὸ Ζ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΖ, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΚΖ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΑΧΓ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ.

λοιπὸν νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς, ἡ ὁποία μετὰ τοῦ ἄξονος, πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς τομῆς νὰ σχηματίσῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὀξεῖαν γωνίαν.

[Ἀνάλυσις]. Ἂς γίνῃ ἡ κατασκευή, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· εἶναι ἄρα δοθεῖσα ἡ γωνία ΓΔΑ. Ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΓΕ· ὁ λόγος ἄρα $ΔΕ^2 : ΕΓ^2$ εἶναι δοθεὶς (Εὐκλ. Δεδομ. 1). Ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΧ. Εἶναι λοιπὸν ὁ λόγος $ΓΕ^2 : ΔΕ \times ΕΧ$ δοθείς· διότι εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τῆς παραμέτρου : τὸν πλάγιον ἄξονα (1, 37)· εἶναι ἄρα καὶ ὁ λόγος $ΔΕ^2 : ΔΕ \times ΕΧ$ δοθεὶς (Εὐκλ. Δεδομ. 8)· καὶ ὁ λόγος ἄρα ΔΕ : ΕΧ εἶναι δοθείς. Ἐπίσης ὁ λόγος ΔΕ : ΕΓ· εἶναι ἄρα καὶ ὁ λόγος ΓΕ : ΕΧ δοθεὶς (Εὐκλ. Δεδομ. 8). Καὶ εἶναι ἡ παρὰ τὸ Ε γωνία ὀρθή· εἶναι ἄρα δοθεῖσα ἡ παρὰ τὸ Χ γωνία (Εὐκλ. Δεδομ. 41). Καὶ εἶναι δοθεῖσα ὡς πρὸς τὴν θέσιν καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον· εἶναι ἄρα δοθὲν τὸ σημεῖον Γ (Εὐκλ. Δεδομ. 29 . 25). Καὶ ἀπὸ τοῦ δεδομένου σημείου τοῦ Γ εἶναι δοθεῖσα ἡ ἐφαπτομένη ΓΔ· εἶναι ἄρα θέσει δοθεῖσα ἡ ΓΔ.

[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα τώρα θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ ΖΗΘ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΖΗ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΖΘ, καὶ ἂς γίνῃ, ὡς ἡ παράμετρος πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα $= ΖΘ^2 : ΗΘ \times ΘΚ$, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΖ, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ πρὸς τὴν γωνίαν ΗΚΖ ἂς κατασκευασθῇ ἴση ἡ γωνία ΑΧΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ (θ. 49). Λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ πληροῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν ὅτι γων. ΓΔΕ = γων. ΖΗΘ.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΧΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ἔστι δὲ καί, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘΗ· ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ δι᾿ ἴσου· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΗ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΧΕ πρὸς ΓΕ, ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ· δι᾿ ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ περὶ H298 *ὀρθὰς γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογον· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. ἡ ΓΔ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα.*

να΄

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ.

ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ· δεῖ δὴ ἀγαγεῖν τῆς παραβολῆς ἐφαπτομένην, ἥτις μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς διαμέτρου ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Θ.

γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ ποιοῦσα πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ τῇ ΕΓ τὴν ὑπὸ ΕΓΔ γωνίαν ἴσην τῇ Θ, καὶ συμπιπτέτω ἡ ΓΔ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ, ἡ ὑπὸ ΑΔΓ

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΧΕ : ΕΓ = ΚΘ : ΖΘ, εἶναι ἄρα καὶ ΧΕ² : ΕΓ² = ΚΘ² : ΖΘ² (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι δὲ καί, ὡς ΓΕ² : ΔΕ x ΕΧ = ΖΘ² : ΚΘ x ΘΗ· διότι ἑκάτερος τῶν λόγων τούτων εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον παράμετρος : πλάγιος ἄξων. Καὶ δι' ἴσου (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη)· εἶναι ΧΕ²: ΧΕ x ΕΔ = ΚΘ² : ΗΘ x ΘΚ (Εὐκλ. 5, 20). Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ : ΕΔ = ΚΘ:ΘΗ. Εἶναι δὲ καί, ὡς ἡ ΧΕ : ΓΕ = ΚΘ:ΖΘ· δι' ἴσου ἄρα (διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι, ὡς ἡ ΔΕ : ΕΓ = ΗΘ : ΖΘ (Εὐκλ. 5, 20). Καὶ αἱ περὶ τὰς ὀρθὰς γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα ἡ γων. ΓΔΕ = γων. ΖΗΘ (Εὐκλ. 6, 6). Ἡ ΓΔ ἄρα πληροῖ τὸ πρόβλημα.

51

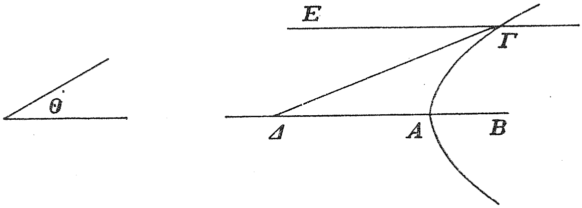
Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς δοθεῖσαν τομὴν κώνου, ἡ ὁποία μετὰ τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου ἀφῆς νὰ σχηματίσῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὀξεῖαν γωνίαν.

Ἔστω πρῶτον ἡ δοθεῖσα τομὴ κώνου παραβολή, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ· πρέπει λοιπὸν νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς, ἡ ὁποία μετὰ τῆς διαμέτρου, τῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀφῆς νὰ σχηματίσῃ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν παρὰ τὸ Θ.

['Ανάλυσις]. Ἂς γίνῃ ἡ κατασκευή, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ σχηματίζουσα μετὰ τῆς διαμέτρου ΕΓ, τῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀφῆς τὴν γωνίαν ΕΓΔ ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν Θ, καὶ ἂς συναντᾷ ἡ ΓΔ τὸν ἄξονα κατὰ τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΓ (1, 51 πόρ.), εἶναι γων.

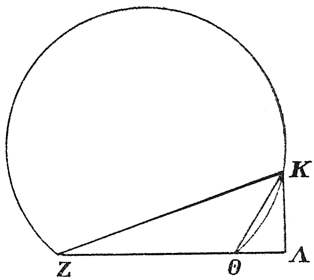
γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστί. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΕΓΔ· ἴση γάρ ἐστι τῇ Θ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ. ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς



ἡ ΓΔ ποιοῦσα πρὸς τῷ ἄξονι τὴν ὑπὸ τῶν ΑΔΓ γωνίαν ἴσην τῇ Θ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ἡ Θ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΔΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΓΔ, καὶ ἡ Θ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΓΔ.

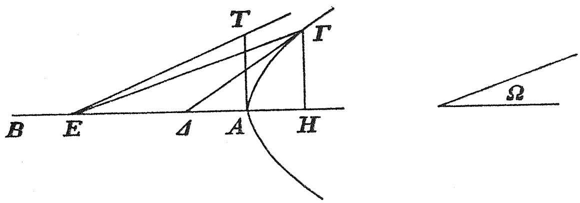
Ἔστω ἡ τομὴ ὑπερβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ
H300 Ε, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΕΤ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ Ω, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ ποιοῦσα τὸ πρόβλημα, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΓΗ. δοθεὶς ἄρα λόγος ἐστὶ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. ἐκκείσθω δή τις εὐθεῖα δεδομένη ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς γεγράφθω κύκλου τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Ω· ἔσται ἄρα μεῖζον ἡμικυκλίου. καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Κ ἤχθω κάθετος ἡ ΚΛ ποιοῦσα τὸν τοῦ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ



ΑΔΓ = ΕΓΔ (Εὐκλ. 1, 29). Εἶναι δὲ δοθεῖσα ἡ γωνία ΕΓΔ· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν Θ· εἶναι ἄρα δοθεῖσα καὶ ἡ γωνία ΑΔΓ.

[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα τώρα θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἔστω παραβολή, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ. Ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ σχηματίζουσα τὴν παρὰ τὸν ἄξονα γωνίαν ΑΔΓ = γων. Θ (θ. 50) καὶ διὰ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΒ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΕΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία Θ = γων. ΑΔΓ καὶ γων. ΑΔΓ = ΕΓΔ, εἶναι ἄρα καὶ γων. Θ = ΕΓΔ (Εὐκλ. 1, 29).

[Ἀνάλυσις]. Ἔστω τώρα ἡ τομὴ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΕΤ, ἡ δὲ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ Ω, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΕ πληροῦσα τὸ πρόβλημα, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΓΗ. Εἶναι ἄρα δοθεὶς ὁ λόγος, πλάγιος ἄξων : παράμετρος· ὥστε εἶναι δοθεὶς καὶ ὁ λόγος ΕΗ x ΗΔ : ΓΗ^2 (1, 37). Ἂς ληφθῇ τώρα εὐθεῖά τις δεδομένη ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ' αὐτῆς ἂς γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Ω (Εὐκλ. 3, 33)· θὰ εἶναι ἄρα τὸ τμῆμα μεγαλύτερον ἡμικυκλίου (Εὐκλ. 3, 31). Καὶ ἀπό τινος σημείου ἐκ τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Κ,



ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΚΛ σχηματίζουσα τὸν λόγον ΖΛ x ΛΘ : ΛΚ^2 = πλάγιος ἄξων : παράμετρος, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ *τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚ, ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ, ἀλλὰ καὶ ἔστιν, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τό τε ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ καὶ τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ὅμοιον ἄρα τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΕΓΗ τριγώνῳ καὶ τὸ ΖΘΚ τῷ ΕΓΔ. ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΖΚ γωνία [τουτέστιν ἡ Ω] τῇ ὑπὸ ΓΕΔ.*

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἡ δὲ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ Ω, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΧΨ πρὸς ΧΦ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΨΦ κατὰ τὸ Υ, καὶ ἐκκείσθω δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ' H302 *αὐτῆς γεγράφθω τμῆμα κύκλου μεῖζον ἡμικυκλίου δεχόμενον γωνίαν τῇ Ω ἴσην, καὶ ἔστω τὸ ΖΚΘ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὴν ΖΘ κάθετος ἤχθω ἡ ΝΟ, καὶ τετμήσθω ἡ ΝΟ εἰς τὸν τῆς ΥΦ πρὸς ΦΧ λόγον κατὰ τὸ Π, καὶ διὰ τοῦ Π τῇ ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΠΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΛ ἐπὶ τὴν ΖΘ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚ, ΚΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΛΚ ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ΝΞ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΖΘ. καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν, ὡς ἡ ΝΠ πρὸς ΠΟ, τουτέστιν ἡ ΥΦ πρὸς ΦΧ, ἡ ΞΚ πρὸς ΚΛ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ ΨΦ πρὸς ΦΧ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ· συνθέντι, ὡς ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ, ἡ ΜΛ πρὸς ΛΚ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΛ πρὸς ΛΚ, τὸ ὑπὸ ΜΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· ὡς ἄρα ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ, τὸ ὑπὸ ΜΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ. ἀλλ' ὡς* H304 *ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ*

ΖΚ, ΚΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γων. ΖΚΘ = ΕΓΔ, ἀλλὰ καὶ εἶναι ὡς ὁ πλάγιος ἄξων : παράμετρος = ΕΗ x ΗΔ : ΗΓ² καὶ ΖΛ x ΛΘ : ΛΚ², τὸ τρίγωνον ἄρα ΚΛΖ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΓΗ καὶ τὸ ΖΘΚ πρὸς τὸ ΕΓΔ. Ὥστε ἡ γων. ΘΖΚ [τουτέστιν ἡ Ω] = ΓΕΔ.

[Σύνθεσις]. Τὸ πρόβλημα τώρα θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἡ δὲ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ Ω, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος τοῦ πλαγίου ἄξονος πρὸς τὴν παράμετρον νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ΧΨ : ΧΦ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΨΦ εἰς τὸ Υ, καὶ ἔστω δεδομένη ἡ εὐθεῖα ΖΘ καὶ ἐπ' αὐτῆς ἂς γραφῇ τμῆμα κύκλου μεγαλύτερον ἡμικυκλίου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Ω καὶ ἔστω τὸ ΖΚΘ (Εὐκλ. 3, 33), καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΖΘ κάθετος ἡ ΝΟ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΝΟ εἰς τὸ σημεῖον Π, εἰς τὸν λόγον ΥΦ : ΦΧ, καὶ διὰ τοῦ Π ἂς ἀχθῇ ἡ ΠΚ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐκβληθεῖσαν ΖΘ κάθετος ἡ ΚΛ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΖΚ, ΚΘ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΛΚ εἰς τὸ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΝΞ· εἶναι ἄρα αὕτη παράλληλος πρὸς τὴν ΖΘ (Εὐκλ. 1, 27). Καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν εἶναι, ὡς ἡ ΝΠ : ΠΟ, τουτέστιν ἡ ΥΦ : ΦΧ = ΞΚ : ΚΛ (Εὐκλ. 6, 2). Λαμβάνοντες τὰ διπλάσια τῶν ἡγουμένων ὅρων τῆς ἀναλογίας ἔχομεν ΨΦ:ΦΧ = ΜΚ:ΚΛ (Εὐκλ. 3, 3)· καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι, ὡς ἡ ΨΧ : ΧΦ = ΜΛ : ΛΚ (Εὐκλ. 5, 18). Ἀλλὰ ὡς ἡ ΜΛ : ΛΚ = ΜΛ x ΛΚ : ΛΚ²· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΨΧ : ΧΦ = ΜΛ x ΛΚ : ΛΚ² = ΖΛ x ΛΘ : ΛΚ² (Εὐκλ. 3, 36). Ἀλλὰ ΨΧ : ΧΦ = πλάγιος ἄξων : παράμετρος· καὶ ὡς ἄρα ΖΛ x ΛΘ : ΛΚ² =

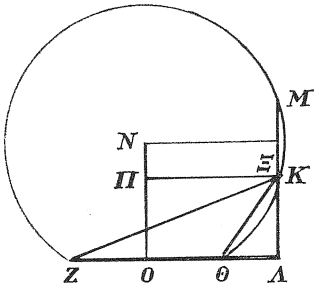
ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΤ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, τὸ δὲ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, καὶ τὸ ἀπὸ ΖΛ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ. καί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Α, Λ γωνίαι ὀρθαί· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῆς Ε. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ ΛΖΚ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΕΓ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Γ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, κάθετος δὲ ἡ ΓΗ· ἔσται δή, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, τὸ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΕΓΗ τριγώνῳ καὶ τὸ ΚΘΛ τῷ ΓΗΔ καὶ τὸ ΚΖΘ τῷ ΓΕΔ. ὥστε ἡ ὑπὸ ΕΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΖΚΘ, τουτέστι τῇ Ω.

ἐὰν δὲ ὁ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν λόγος ἴσος ᾖ πρὸς ἴσον, ἡ ΚΛ ἐφάπτεται τοῦ ΖΚΘ κύκλου, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη παράλληλος ἔσται τῇ ΖΘ καὶ αὐτὴ ποιήσει τὸ πρόβλημα.

νβʹ

Ἐὰν ἐλλείψεως εὐθεῖα ἐπιψαύῃ, ἣν ποιεῖ γωνίαν πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ, οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐ-

πλάγιος ἄξων : παράμετρος. Ἂς ἀχθῇ τώρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΑΤ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς $ΕΑ^2 : ΑΤ^2 =$ πλάγιος ἄξων : παράμετρος, εἶναι δὲ καί, ὡς ὁ πλάγιος ἄξων : παράμετρος $= ΖΛ \times ΛΘ : ΛΚ^2$, εἶναι δὲ $ΖΛ^2 : ΛΚ^2 > ΖΛ \times ΛΘ : ΛΚ^2$, εἶναι ἄρα καὶ $ΖΛ^2 : ΛΚ^2 > ΕΑ^2 : ΑΤ^2$. Καὶ αἱ παρὰ τὰ Α, Λ γωνίαι εἶναι ὀρθαί· εἶναι ἄρα ἡ γων. Ζ < Ε. Ἂς κατασκευασθῇ γων. ΑΕΓ = ΛΖΚ· θὰ συναντήσῃ ἄρα ἡ ΕΓ τὴν τομὴν (θ. 2). Ἂς τὴν συναντήσῃ εἰς τὸ Γ. Ἂς



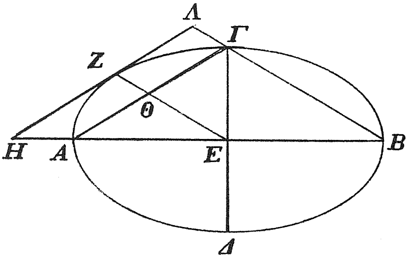
ἀχθῇ τώρα ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ (θ. 49), κάθετος δὲ ἡ ΓΗ· θὰ εἶναι λοιπόν, ὡς ὁ πλάγιος ἄξων : παράμετρος $= ΕΗ \times ΗΔ : ΓΗ^2$ (1, 37). Καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΖΛ \times ΛΘ : ΛΚ^2 = ΕΗ \times ΗΔ : ΗΓ^2$· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΚΖΛ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΓΗ καὶ τὸ ΚΘΛ πρὸς τὸ ΓΗΔ καὶ τὸ ΚΖΘ πρὸς τὸ ΓΕΔ (Πάππου Λῆμμα 9). Ὥστε ἡ γων. ΕΓΔ = ΖΚΘ = Ω.

Ἐὰν δὲ ὁ λόγος πλάγιος ἄξων : παράμετρος = α : α, ἡ ΚΛ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΖΚΘ (Εὐκλ. 3, 16), καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς τὸ Κ ἀγομένη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΘ καὶ αὐτὴ θὰ λύῃ τὸ πρόβλημα.

52

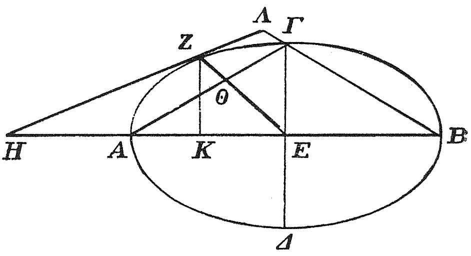
Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται ἐλλείψεως, ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει μὲ τὴν διὰ τοῦ σημείου ἁφῆς ἀγομένην διάμετρον δὲν φεξῆς τῇ περιεχομένη ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τὴν τομὴν κλωμένων εὐθειῶν.

H306 ἔστω ἔλλειψις, ἧς ἄξονες μὲν οἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, μείζων δὲ ἔστω τῶν ἀξόνων ὁ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΗΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ, ΖΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Λ. λέγω, ὅτι οὐκ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΖΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΛΓΑ.



ἡ γὰρ ΖΕ τῇ ΛΒ ἤτοι παράλληλός ἐστιν ἢ οὔ.

ἔστω πρότερον παράλληλος· καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ. καὶ ἔστι διάμετρος ἡ ΖΕ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΛΒ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΘΓΛ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΖΘ τῇ ὑπὸ ΛΓΘ.



καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ τῆς ΕΓ, ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΓΑ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΛΖΕ. καὶ διὰ τοῦτο ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΖΕ.

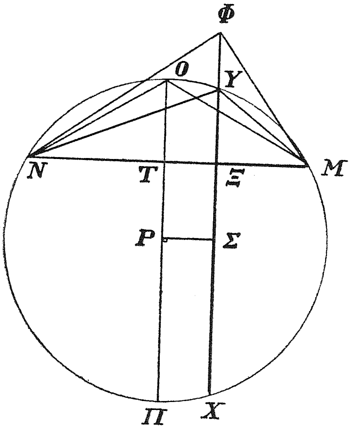
μὴ ἔστω δὴ ἡ ΕΖ τῇ ΛΒ παράλληλος, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΖΚ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΒΕ τῇ ὑπὸ ΖΕΑ.

εἶναι μικροτέρα τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν μέσων τῆς τομῆς.

Ἔστω ἔλλειψις, τῆς ὁποίας ἄξονες μὲν εἶναι οἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, μεγαλύτερος δὲ ἄξων ἔστω ὁ ΑΒ, καὶ ἂς ἐφάπτηται τῆς τομῆς ἡ ΗΖΛ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΓΒ, ΖΕ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΒΓ μέχρι τοῦ Λ. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΛΖΕ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΛΓΑ.

Διότι ἡ ΖΕ θὰ εἶναι πρὸς τὴν ΑΒ ἢ παράλληλος ἢ ὄχι.

Ἔστω πρῶτον παράλληλος· καὶ εἶναι ἡ ΑΕ = ΕΒ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΑΘ = ΘΓ (Εὐκλ. 6, 2). Καὶ εἶναι διάμετρος ἡ ΖΕ· ἡ ἐφαπτομένη ἄρα εἰς τὸ Ζ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ (θ. 6).



Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΛΒ· εἶναι ἄρα τὸ ΖΘΓΛ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἡ γων. ΛΖΘ = ΛΓΘ, (Εὐκλ. 1, 34).

Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΑΕ = ΕΒ ⟩ ΕΓ, εἶναι ἡ γων. ΑΓΒ ἀμβλεῖα (Εὐκλ. 2, 12)· εἶναι ἄρα ἡ γων. ΛΓΑ ὀξεῖα. Ὥστε καὶ ἡ γων. ΛΖΕ εἶναι ὀξεῖα. Καὶ διὰ τοῦτο ἡ γων. ΗΖΕ εἶναι ἀμβλεῖα.

Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΛΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΖΚ· δὲν εἶναι ἄρα ἡ γων. ΛΒΕ ἴση πρὸς τὴν ΖΕΑ. Εἶναι δὲ ἡ παρὰ τὸ Ε ὀρθὴ γωνία ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ

ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ε ὀρθῇ τῇ πρὸς τῷ Κ ἐστὶν ἴση [οὐκ
ἄρα ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΕΒ τρίγωνον τῷ ΖΕΚ]· οὐκ ἄρα ἐστίν,
ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ
ΚΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς
τὸ ἀπὸ ΕΓ καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ τὸ ὑπὸ ΗΚΕ
πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. οὐκ ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ
H308 ἀπὸ ΚΖ, τὸ ἀπὸ ΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν
ἡ ΗΚ τῇ ΚΕ. ἐκκείσθω κύκλου τμῆμα τὸ ΜΥΝ δεχόμενον
γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ἀμβλεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ἔλασσον
ἄρα ἡμικυκλίου τμῆμά ἐστι τὸ ΜΥΝ. πεποιήσθω δή, ὡς
ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ πρὸς ὀρθὰς
ἤχθω ἡ ΥΞΧ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΥ, ΥΜ, καὶ τετμήσθω
δίχα ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Τ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΟΤΠ· διά-
μετρος ἄρα ἐστίν. ἔστω κέντρον τὸ Ρ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθε-
τος ἡ ΡΣ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΝ, ΟΜ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ
ΜΟΝ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, καὶ δίχα τέτμηται ἑκατέρα
τῶν ΑΒ, ΜΝ κατὰ τὰ Ε, Τ, καὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς
Ε, Τ γωνίαι, ὅμοια ἄρα τὰ ΟΤΝ, ΒΕΓ τρίγωνα. ἔστιν
ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΤΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΟ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΕ
πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΤΡ τῇ ΣΞ, μείζων
δὲ ἡ ΡΟ τῆς ΣΥ, ἡ ΡΟ ἄρα πρὸς ΡΤ μείζονα ἔχει λόγον
ἤπερ ἡ ΥΣ πρὸς ΣΞ· καὶ ἀναστρέψαντι ἡ ΡΟ πρὸς ΟΤ
ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΣΥ πρὸς ΥΞ. καὶ τῶν ἡγουμένων
τὰ διπλάσια· ἡ ἄρα ΠΟ πρὸς ΤΟ ἐλάσσονα λόγον ἔχει
ἤπερ ἡ ΧΥ πρὸς ΥΞ. καὶ διελόντι ἡ ΠΤ πρὸς ΤΟ ἐλάσ-
H310 σονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΞ πρὸς ΥΞ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΠΤ
πρὸς ΤΟ, τὸ ἀπὸ ΤΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΟ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ

Κ ὀρθὴν [δὲν εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΓΕΒ πρὸς τὸ ΖΕΚ]· δὲν εἶναι ἄρα ὡς τὸ $ΒΕ^2 : ΕΓ^2 = ΕΚ^2 : ΚΖ^2$ (Πάππου Λῆμμα 12). Ἀλλὰ ὡς τὸ $ΒΕ^2 : ΕΓ^2 = ΑΕ \times ΕΒ : ΕΓ^2 =$ πλάγιος ἄξων : παράμετρος (1, 21) $= ΗΚ \times ΚΕ : ΚΖ^2$ (1, 37). Δὲν εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $ΗΚ \times ΚΕ : ΚΖ^2 = ΚΕ^2 : ΚΖ^2$. Δὲν εἶναι ἄρα ἴση ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΕ. Ἂς ληφθῇ τμῆμα κύκλου τὸ ΜΥΝ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ΑΓΒ· εἶναι δὲ ἡ γωνία ΑΓΒ ἀμβλεῖα· εἶναι ἄρα μικρότερον ἡμικυκλίου τὸ τμῆμα ΜΥΝ (Εὐκλ. 3, 31). Ἂς γίνῃ τώρα, ὡς ἡ $ΗΚ : ΚΕ = ΝΞ : ΞΜ$, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΥΞΧ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΝΥ, ΥΜ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΜΝ εἰς τὸ Τ, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΟΤΠ· εἶναι ἄρα αὕτη διάμετρος (Εὐκλ. 3, 1, πόρισ.). Ἔστω κέντρον τὸ Ρ καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΡΣ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΟΝ, ΟΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γων. ΜΟΝ = ΑΓΒ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΜΝ ἔχει τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Τ, καὶ εἶναι ὀρθαὶ αἱ παρὰ τὰ Ε, Τ γωνίαι, εἶναι ἄρα ὅμοια τὰ τρίγωνα ΟΤΝ, ΒΕΓ. Εἶναι ἄρα, ὡς $ΤΝ^2 : ΤΟ^2 = ΒΕ^2 : ΕΓ^2$ (Εὐκλ. 6, 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΤΡ = ΣΞ$ (Εὐκλ. 1, 34), εἶναι δὲ $ΡΟ > ΣΥ$, εἶναι ἄρα $ΡΟ : ΡΤ > ΥΣ : ΣΞ$ (Εὐκλ. 5, 8)· καὶ δι᾽ ἀναστροφῆς εἶναι $ΡΟ : ΟΤ < ΣΥ : ΥΞ$ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 16)· καὶ διὰ διπλασιασμοῦ τῶν πρώτων ὅρων τῆς ἀναλογίας· εἶναι ἄρα $ΠΟ : ΤΟ < ΧΥ : ΥΞ$ (Εὐκλ. 5, 15). Καὶ διὰ διαιρέσεως (διελόντι : ἂν $α/β = γ/δ$, διελόντι = διαίρεσις λόγου, εἶναι $α\text{-}β/β = γ\text{-}δ/δ$) (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 15), $ΠΤ : ΤΟ < ΧΞ : ΥΞ$. Ἀλλ᾽ ὡς μὲν $ΠΤ : ΤΟ = ΤΝ^2 : ΤΟ^2$ (Εὐκλ. 5, 8 πόρισ. καὶ 6, 19 πόρισ.) $= ΒΕ^2 : ΕΓ^2 =$ πλάγιος ἄξων : παράμετρος ἀπὸ ΕΓ καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΞ πρὸς ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΧΞΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΝΞΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν, ὡς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΞΝ πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς μεῖζον τοῦ ἀπὸ ΞΥ. ἔστω πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΦ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ πρὸς ὀρθάς εἰσιν αἱ ΚΖ, ΞΦ, καὶ ἔστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, τὸ ὑπὸ ΜΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΦ, διὰ ταῦτα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΦΝ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΥΝ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, τῆς ὑπὸ ΗΖΕ γωνίας, ἡ δὲ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ ΛΖΘ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΛΓΘ.

οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΖΘ τῆς ὑπὸ ΛΓΘ.

νγ′

Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ γωνίαν ποιήσει ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ· δεῖ δὴ τὴν διδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μὴ ἐλάσσονα εἶναι τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τὴν τομὴν κλωμένων εὐθειῶν.

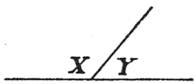
ἔστω ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις, ἧς μείζων μὲν ἄξων ὁ ΑΒ, ἐλάσσων δὲ ὁ ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ

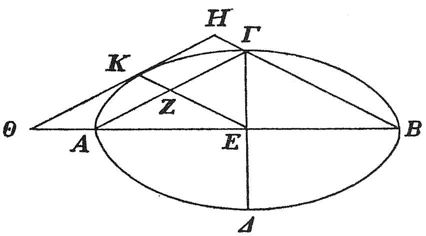
(1, 21) $=$ ΗΚ x ΚΕ : $ΚΖ^2$ (1, 37)· εἶναι ἄρα ΗΚ x ΚΕ : $ΚΖ^2$ ⟨ ΧΞ : ΞΥ, τουτέστι ⟨ ΧΞ x ΞΥ : $ΞΥ^2$, τουτέστι τὸ ΗΚ x ΚΕ : $ΚΖ^2$ ⟨ ΝΞ x ΞΜ : $ΞΥ^2$ (Εὐκλ. 3, 35). Ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν, ὡς τὸ ΗΚ x ΚΕ : $ΚΖ^2$ $=$ ΜΞ x ΞΝ : ἄλλο τι, θὰ εἶναι τὸ ἄλλο τι μεγαλύτερον τοῦ $ΞΥ^2$ (Εὐκλ. 5, 10). Ἔστω πρὸς τὸ $ΞΦ^2$ (δηλ. ΗΚ x ΚΕ : $ΚΖ^2$ $=$ ΜΞ x ΞΝ : $ΞΦ^2$). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς ἡ ΗΚ : ΚΕ $=$ ΝΞ : ΞΜ, καὶ εἶναι κάθετοι αἱ ΚΖ, ΞΦ, καὶ εἶναι ὡς τὸ ΗΚ x ΚΕ : $ΚΖ^2$ $=$ ΜΞ x ΞΝ : $ΞΦ^2$, διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς ἡ γων. ΗΖΕ $=$ ΜΦΝ. Εἶναι ἄρα ἡ γων. ΜΥΝ $=$ ΑΓΒ ⟩ ΗΖΕ (Εὐκλ. 1, 21), ἡ δὲ ἐφεξῆς γων. ΛΖΘ⟩ ΛΓΘ (Εὐκλ. 1, 13).

Δὲν εἶναι ἄρα μικροτέρα ἡ γων. ΛΖΘ τῆς ΛΓΘ.

53

Εἰς δοθεῖσαν ἔλλειψιν νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη, ἡ ὁποία μὲ τὴν διάμετρον τὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀφῆς νὰ σχηματίσῃ γωνίαν ἴσην πρὸς δοθεῖσαν ὀξεῖαν· πρέπει δὲ ἡ διδομένη ὀξεῖα γωνία





νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τῆς ἐφεξῆς τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν μέσων τῆς τομῆς.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις, τῆς ὁποίας μεγαλύτερος μὲν ἄξων εἶναι ὁ ΑΒ, μικρότερος δὲ ὁ ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἂς ἐπι-

H312 *ΑΓ, ΓΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ Υ οὐκ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ ΑΓΗ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς Χ.*

ἡ Υ ἄρα τῆς ὑπὸ ΑΓΗ ἢ μείζων ἐστὶν ἢ ἴση.

ἔστω πρότερον ἴση· καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, καὶ ἔστιν, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΓ, ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΖ. καὶ ἔστι διάμετρος ἡ ΚΕ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, τουτέστιν ἡ ΘΚΗ, παράλληλός ἐστι τῇ ΓΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΗΒ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΓΗ· καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΚΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΓΖ γωνίᾳ. ἡ δὲ ὑπὸ ΗΓΖ τῇ δοθείσῃ, τουτέστι τῇ Υ, ἴση ἐστί· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΕ ἄρα ἐστὶν ἴση τῇ Υ.

ἔστω δὴ μείζων ἡ Υ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΗ· ἀνάπαλιν δὴ ἡ Χ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ ἐλάσσων ἐστίν.

ἐκκείσθω κύκλος, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπ᾽ αὐτοῦ τμῆμα, καὶ ἔστω τὸ ΜΝΠ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Χ, καὶ τετμήσθω ἡ ΜΠ δίχα κατὰ τὸ Ο, καὶ ἀπὸ τοῦ Ο τῇ ΜΠ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΝΟΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΜ, ΝΠ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΜΝΠ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΒ ἐλάσσων ἐστίν. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ ΜΝΠ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΜΝΟ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΝΟ τῆς ὑπὸ ΑΓΕ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Ο· ἡ ἄρα ΑΕ πρὸς ΕΓ μείζονα λόγον H314 *ἔχει ἤπερ ἡ ΟΜ πρὸς ΟΝ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΜΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΟ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ, τὸ δὲ ἀπὸ ΜΟ ἴσον τῷ ὑπὸ ΜΟΠ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΝΟΡ·*

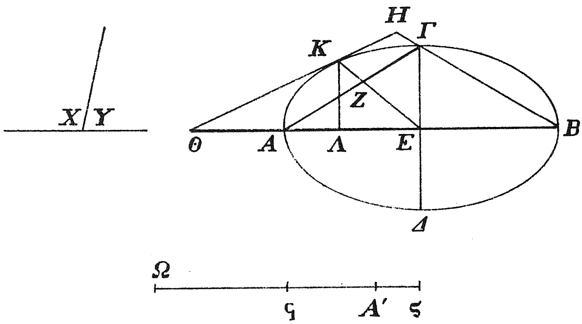
ζευχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΓΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ Υ οὐχὶ μικροτέρα τῆς γων. ΑΓΗ· ὥστε καὶ ἡ γων. ΑΓΒ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς γων. Χ (Εὐκλ. 1, 13).

Θὰ εἶναι ἄρα ἡ γων. Υ $\geqq$ τῆς ΑΓΗ.

Ἔστω πρῶτον γων. Υ = ΑΓΗ· καὶ διὰ τοῦ Ε πρὸς τὴν ΒΓ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΚΘ (θ. 46). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΕ = ΕΒ, καὶ εἶναι, ὡς ἡ ΑΕ : ΕΒ = ΑΖ : ΖΓ (Εὐκλ. 6, 2), εἶναι ἄρα ἡ ΑΖ = ΓΖ (Εὐκλ. 6, 16, 14). Καὶ εἶναι διάμετρος ἡ ΚΕ· ἡ ἐφαπτομένη ἄρα εἰς τὸ σημεῖον Κ τῆς τομῆς, τουτέστιν ἡ ΘΚΗ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΑ (θ. 6). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΗΒ παράλληλος· εἶναι ἄρα τὸ ΚΖΓΗ παραλληλόγραμμον· καὶ διὰ τοῦτο ἡ γων. ΗΚΖ = ΗΓΖ (Εὐκλ. 1, 34). Ἡ δὲ γων. ΗΓΖ = πρὸς τὴν δοθεῖσαν, τουτέστι τὴν Υ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ γων. ΗΚΕ = Υ.

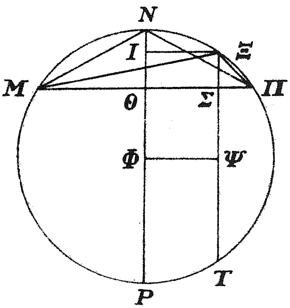
Ἔστω τώρα ἡ γων. Υ $>$ ΑΓΗ· ἀνάπαλιν λοιπὸν ἡ γων. Χ $<$ γων. ΑΓΒ (Εὐκλ. 1, 13).

Ἃς ληφθῇ κύκλος, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ τμῆμα, καὶ ἔστω τὸ ΜΝΠ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Χ (Εὐκλ. 3, 33), καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΜΠ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ο, καὶ ἀπὸ τοῦ Ο ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΜΠ κάθετος ἡ ΝΟΡ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΝΜ, ΝΠ· εἶναι ἄρα γων. ΜΝΠ $<$ γων. ΑΓΒ. Ἀλλὰ 1/2 ΜΝΠ = ΜΝΟ, καὶ 1/2ΑΓΒ = ΑΓΕ (Εὐκλ. 1, 4)· εἶναι ἄρα ἡ ΜΝΟ $<$ ΑΓΕ. Καὶ εἶναι ὀρθαὶ αἱ παρὰ τὰ Ε, Ο· εἶναι ἄρα ΑΕ:ΕΓ $>$ ΟΜ : ΟΝ (Πάππου Λῆμμα 5). Ὥστε καὶ ΑΕ^2 : ΕΓ^2 $>$ ΜΟ^2 : ΝΟ^2. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΕ^2 = ΑΕ x ΕΒ, τὸ δὲ ΜΟ^2 = ΜΟ x ΟΠ = ΝΟ x ΟΡ τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΡΟ πρὸς ΟΝ. γενέσθω δή, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ ΩΑ′ πρὸς Α′ϛ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ Ωϛ κατὰ τὸ ϟ. ἐπεὶ οὖν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΡΟ πρὸς ΟΝ, καὶ ἡ ΩΑ′ πρὸς Α′ϛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΡΟ πρὸς ΟΝ. καὶ συνθέντι ἡ Ωϛ πρὸς τὴν ϛΑ′ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΡΝ πρὸς ΝΟ. ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Φ· ὥστε καὶ ἡ ϟϛ πρὸς



ϛΑ′ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΦΝ πρὸς ΝΟ. καὶ διελόντι ἡ Α′ϟ πρὸς Α′ϛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΦΟ πρὸς ΟΝ. γινέσθω δή, ὡς ἡ Α′ϟ πρὸς Α′ϛ, οὕτως ἡ ΦΟ πρὸς ἐλάττονα τῆς ΟΝ, οἷον τὴν ΙΟ, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΙΞ καὶ ἡ ΞΤ καὶ ἡ ΦΨ. ἔσται ἄρα, ὡς ἡ Α′ϟ πρὸς Α′ϛ, ἡ ΦΟ πρὸς
H316 ΟΙ καὶ ἡ ΨΣ πρὸς ΣΞ· καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ϟϛ πρὸς ϛΑ′, ἡ ΨΞ πρὸς ΞΣ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ Ωϛ πρὸς ϛΑ′, ἡ ΤΞ πρὸς ΞΣ. καὶ διελόντι, ὡς ἡ ΩΑ′ πρὸς Α′ϛ, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ ΤΣ πρὸς ΣΞ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ΜΞ, ΞΠ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ Ε σημείῳ τῇ ὑπὸ ΜΠΞ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ

(Εὐκλ. 3, 35)· εἶναι ἄρα ΑΕ x ΕΒ : ΕΓ^2, τουτέστιν (1, 21) ὁ πλάγιος ἄξων : παράμετρον ⟩ ΡΟ : ΟΝ. Ἄς γίνῃ τώρα, ὡς πλάγιος ἄξων : παράμετρον = ΩΑ′ : Α′ϛ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ Ωϛ εἰς τὸ ϟ. Ἐπειδὴ λοιπόν, πλάγιος ἄξων : παράμετρον ⟩ ΡΟ : ΟΝ, εἶναι καὶ ΩΑ′ : Α′ϛ ⟩ ΡΟ : ΟΝ. Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι Ωϛ : ϛΑ′ ⟩ ΡΝ : ΝΟ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 14). Ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Φ· ὥστε καὶ ἡ ϟϛ : ϛΑ′ ⟩ ΦΝ : ΝΟ. Καὶ διὰ διαιρέσεως (διελόντι) εἶναι Α′ϟ : Α′ϛ ⟩ ΦΟ : ΟΝ (Εὐκλ.



5 ὁρισ. 15). Ἄς γίνῃ τώρα, ὡς ἡ Α′ϟ : Α′ϛ = ΦΟ : μικροτέραν τῆς ΟΝ, ἔστω τὴν ΙΟ (Εὐκλ. 5, 8), καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἡ ΙΞ καὶ ἡ ΦΨ παράλληλοι καὶ ἡ ΞΤ (παράλληλος πρὸς ΙΡ). Θὰ εἶναι ἄρα, ὡς Α′ϟ : Α′ϛ = ΦΟ : ΟΙ = ΨΣ : ΣΞ (Εὐκλ. 1, 34)· καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι, ὡς ἡ ϟϛ : ϛΑ′ = ΨΞ : ΞΣ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 14). Διὰ διπλασιασμοῦ τῶν πρώτων ὅρων τῆς ἀναλογίας (Εὐκλ. 5, 15) εἶναι, ὡς Ωϛ : ϛΑ′ = ΤΞ : ΞΣ (Εὐκλ. 3, 3). Καὶ διὰ διαιρέσεως (διελόντι), εἶναι ΩΑ′ : Α′ϛ = πλάγιος ἄξων : παράμετρον = ΤΣ : ΣΞ (Εὐκλ. 5, 17). Ἄς ἐπιζευχθῶσιν τώρα αἱ ΜΞ, ΞΠ καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ε καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ πρὸς τὴν γωνίαν ΜΠΞ = γων. ΑΕΚ (Εὐκλ. 1,

ΑΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΚΘ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΚΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΠΞ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΚ, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Σ ὀρθῇ τῇ πρὸς τῷ Λ ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΞΣΠ τῷ ΚΕΛ τριγώνῳ. καὶ ἔστιν, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ ΤΣ πρὸς ΣΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΤΣΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΣΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΕ τρίγωνον τῷ ΣΞΠ τριγώνῳ καὶ τῷ ΚΘΕ τὸ ΜΞΠ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΞΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΚΕ. ἡ δὲ ὑπὸ ΜΞΠ τῇ ὑπὸ ΜΝΠ ἐστιν ἴση, τουτέστι τῇ Χ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα τῇ Χ ἐστιν ἴση. καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΚΕ τῇ ἐφεξῆς τῇ Υ ἐστιν ἴση.

διῆκται ἄρα τῆς τομῆς ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ τῇ ΚΕ γωνίαν ποιοῦσα τὴν ὑπὸ ΗΚΕ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Υ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

23), καὶ διὰ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΚΘ (θ. 49), καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΚΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γων. ΜΠΞ = ΑΕΚ, εἶναι δὲ ἡ παρὰ τὸ Σ ὀρθὴ = πρὸς τὴν παρὰ τὸ Λ, εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΞΣΠ ἰσογώνιον πρὸς τὸ ΚΕΛ. Καὶ εἶναι, ὡς ὁ πλάγιος ἄξων: παράμετρον = ΤΣ : ΣΞ = ΤΣ x ΣΞ : $ΞΣ^2$ (Εὐκλ. 3, 35), τουτέστι τὸ ΜΣ x ΣΠ : $ΞΣ^2$· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΚΛΕ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΣΞΠ καὶ τὸ ΜΞΠ ὅμοιον πρὸς τὸ ΚΘΕ, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι γων. ΜΞΠ = ΘΚΕ. Ἡ δὲ γων. ΜΞΠ = ΜΝΠ = Χ (Εὐκλ. 3, 21)· εἶναι ἄρα καὶ ἡ γων, ΘΚΕ = Χ. Καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ γων. ΗΚΕ = πρὸς τὴν ἐφεξῆς τὴν Υ.

Διήχθη ἄρα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΗΘ σχηματίζουσα μὲ τὴν διὰ τῆς ἀφῆς διερχομένην διάμετρον τὴν ΚΕ τὴν γωνίαν ΗΚΕ = πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Υ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΚΩΝΙΚΩΝ γ′

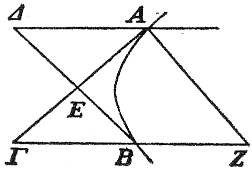
H318

ΚΩΝΙΚΩΝ γʹ

αʹ

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροι συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις, ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα κατὰ κορυφὴν τρίγωνα.

ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ *ΑΒ*, καὶ τῆς *ΑΒ* ἐφαπτέσθωσαν ἥ τε *ΑΓ* καὶ ἡ *ΒΔ* συμπίπτουσαι κατὰ τὸ *Ε*, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν *Α*, *Β* διάμετροι τῆς τομῆς αἱ *ΓΒ*, *ΔΑ* συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις κατὰ τὰ *Γ*, *Δ*. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ *ΑΔΕ* τρίγωνον τῷ *ΕΒΓ*.



ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ *Α* παρὰ τὴν *ΒΔ* ἡ *ΑΖ*· τεταγμένως ἄρα κατῆκται. ἔσται δὴ ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς ἴσον τὸ *ΑΔΒΖ* παραλληλόγραμμον τῷ *ΑΓΖ* τριγώνῳ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ *ΑΕΒΖ* λοιπὸν τὸ *ΑΔΕ* τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ *ΓΒΕ* τριγώνῳ.

ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν συμπιπτέτωσαν αἱ διάμετροι κατὰ τὸ *Η* κέντρον.

H320 ἐπεὶ οὖν κατῆκται ἡ *ΑΖ*, καὶ ἐφάπτεται ἡ *ΑΓ*, τὸ ὑπὸ *ΖΗΓ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ *ΒΗ*. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ *ΖΗ* πρὸς *ΗΒ*,

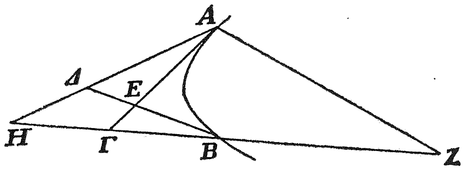
ΚΩΝΙΚΩΝ

Βιβλίον 3ον

1

Ἐὰν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι κώνου τομῆς ἢ περιφερείας κύκλου συναντῶνται, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς διάμετροι συναντῶσαι τὰς ἐφαπτομένας, τὰ κατὰ κορυφὴν σχηματιζόμενα τρίγωνα θὰ εἶναι ἴσα.

Ἔστω τομὴ κώνου ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒ, καὶ ἂς ἐφάπτωνται τῆς ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ καὶ ἡ ΒΔ συναντώμεναι κατὰ τὸ Ε,

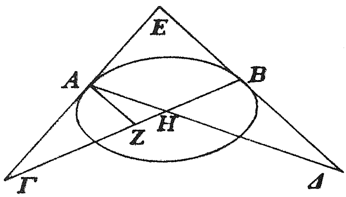


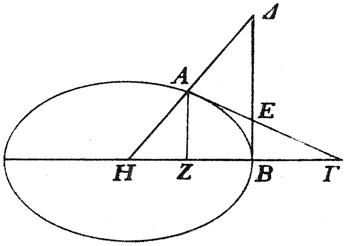
καὶ ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν Α, Β διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΒ, ΔΑ συναντῶσαι τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα Γ,Δ. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ = ΕΒΓ.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΑΖ· ἔχει ἄρα καταχθῇ αὕτη τεταγμένως (1 ὁρισ. 5). Θὰ εἶναι λοιπὸν ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΒΖ = τρίγωνον ΑΓΖ (1, 42), καὶ ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΑΕΒΖ, τὸ ὑπόλοιπον τρίγωνον ΑΔΕ = τρίγωνον ΓΒΕ.

Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν τομῶν ἂς συναντῶνται αἱ διάμετροι εἰς τὸ κέντρον Η.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἔχει καταχθῇ ἡ ΑΖ καὶ ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, τὸ ὀρθογώνιον ΖΗ x ΗΓ = ΒΗ² (1, 37). Εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ, τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ,

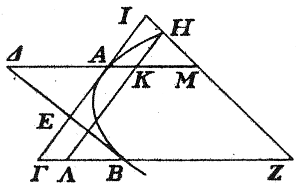




τὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ΔΗΒ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ, τὸ ΑΗΖ πρὸς ΑΗΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ΑΗΓ, τὸ ΑΗΖ πρὸς ΔΗΒ. ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΔΗΒ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΕΔ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕΒ.

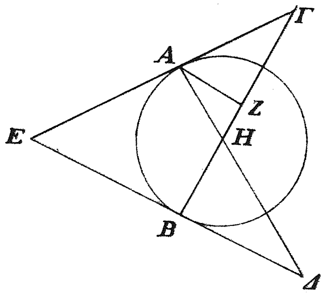
β'

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον τετράπλευρον πρός τε μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ μιᾷ τῶν διαμέτρων ἴσον ἔσται τῷ γινομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ ἑτέρᾳ τῶν διαμέτρων.



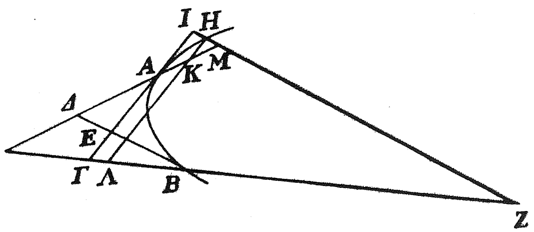
H322 ἔστω γὰρ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, διάμετροι δὲ αἱ ΑΔ, ΒΓ, καὶ

ΖΗ:ΗΒ = ΒΗ:ΗΓ (Εὐκλ. 6, 17)· καὶ ὡς ἄρα ΖΗ:ΗΓ = $ΖΗ^2$: $ΗΒ^2$ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 9). Ἀλλ' ὡς $ΖΗ^2$: $ΗΒ^2$ = ΑΗ x ΗΖ : ΔΗ x ΗΒ (Εὐκλ. 6, 19), ὡς δὲ ΖΗ : ΗΓ = τὸ ΑΗΖ : ΑΗΓ (Εὐκλ. 6, 1)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗΖ : ΑΗΓ = ΑΗΖ : ΔΗΒ. Εἶναι ἄρα τὸ ΑΗΓ = ΔΗΒ (Εὐκλ. 5, 9). Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΔΗΓΕ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΕΔ = ΓΕΒ.



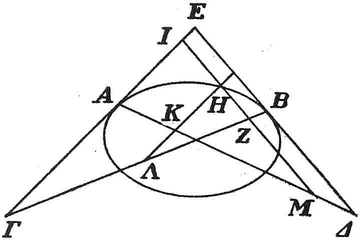
2

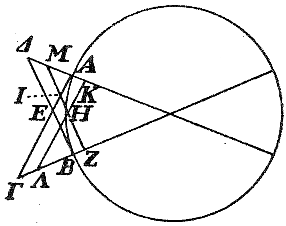
Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας μέχρι τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον τετράπλευρον τὸ ἔχον τὴν μίαν πλευρὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν ἄλλην ἐπὶ μιᾶς τῶν διαμέτρων θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ



γινόμενον τρίγωνον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν ἄλλην τῶν διαμέτρων.

Διότι ἔστω τομὴ κώνου ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, διάμετροι δὲ αἱ ΑΔ, ΒΓ, καὶ ἂς *εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΗΚΛ, ΗΜΖ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΜ τρίγωνον τῷ ΓΛΗΙ τετραπλεύρῳ.*

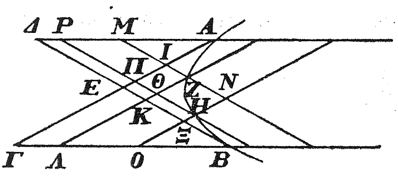


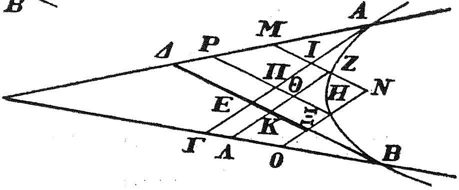


ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ΗΚΜ τρίγωνον τῷ ΑΛ τετραπλεύρῳ ἴσον, κοινὸν προσκείσθω ἢ ἀφῃρήσθω τὸ ΙΚ τετράπλευρον, καὶ γίνεται τὸ ΑΙΜ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΗ τετραπλεύρῳ.

γ′

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς περιφερείας ⟨κύκλου⟩ $\overline{\beta}$ σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὰ γινό-



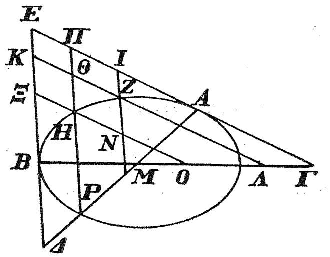


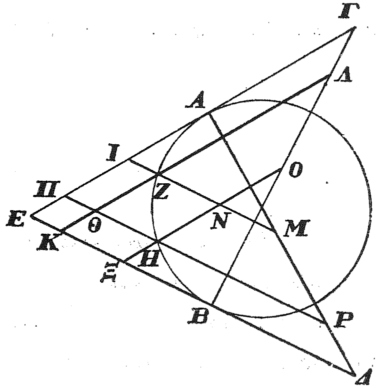
ληφθῆ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΗΚΛ, ΗΜΖ. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΙΜ = τετράπλευρον ΓΛΗΙ.

Διότι ἐπειδὴ ἀπεδείχθη (1, 42 καὶ 43) ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΚΜ = τετράπλευρον ΑΛ, ἂς προστεθῆ ἢ ἂς ἀφαιρεθῆ τὸ κοινὸν τετράπλευρον ΙΚ, ὁπότε γίνεται τὸ τρίγωνον ΑΙΜ = τετράπλευρον ΓΗ.

3

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς περιφε-





ρείας κύκλου ληφθῶσι δύο σημεῖα, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας μέχρι τῶν διαμέτρων, τὰ γινόμενα

μενα ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων, ἴσα ἔσται ἀλλήλοις.

ἔστω γὰρ ἡ τομὴ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ διάμετροι, ὡς προείρηται, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν ἥ τε ΖΘΚΛ καὶ ἡ ΝΖΙΜ, διὰ δὲ τοῦ Η ἥ τε ΗΞΟ καὶ ἡ ΘΠΡ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΛΗ τετράπλευρον τῷ ΜΘ, τὸ δὲ ΛΝ τῷ ΡΝ.

H324 *ἐπεὶ γὰρ προδέδεικται ἴσον τὸ ΡΠΑ τρίγωνον τῷ ΓΗ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΜΙ τῷ ΓΖ, τὸ δὲ ΑΡΠ τοῦ ΑΜΙ μεῖζόν ἐστι τῷ ΠΜ τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τοῦ ΓΖ μεῖζόν ἐστι τῷ ΜΠ τετραπλεύρῳ· ὥστε τὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΖ καὶ τῷ ΠΜ, τουτέστι τῷ ΓΘ καὶ τῷ ΡΖ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΜ. καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΛΝ τῷ ΡΝ ἴσον ἐστίν.*

δʹ

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις, ἴσα ἔσται τὰ πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις τρίγωνα.

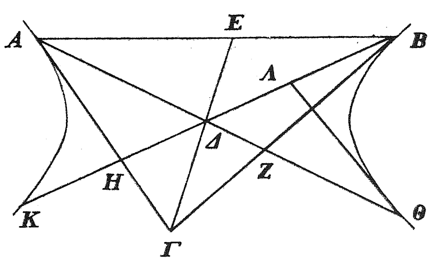
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΓ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, κέντρον δὲ ἔστω τῶν τομῶν τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ καὶ ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τετράπλευρα, τὰ ὁποῖα βαίνουσιν ἐπὶ τῶν διαμέτρων, θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Διότι ἔστω ἡ τομὴ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ διάμετροι, ὡς προελέχθη, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας καὶ ἡ ΖΘΚΛ καὶ ἡ ΝΖΙΜ, διὰ δὲ τοῦ Η καὶ ἡ ΗΞΟ καὶ ἡ ΘΠΡ. Λέγω, ὅτι τὸ μὲν τετράπλευρον ΛΗ = ΜΘ, τὸ δὲ ΛΝ = ΡΝ.

Διότι ἐπειδὴ προαπεδείχθη (θ. 2), ὅτι τὸ τρίγωνον ΡΠΑ = τετράπλευρον ΓΗ, τὸ δὲ ΑΜΙ = ΓΖ, τὸ δὲ ΑΡΠ = ΑΜΙ + τετράπλευρον ΠΜ, εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΓΗ = ΓΖ + τετράπλευρον ΜΠ· ὥστε τὸ τετράπλευρον ΓΗ = ΓΖ + ΠΜ, τουτέστι ΓΗ = ΓΘ + ΡΖ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΓΘ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΛΗ = ΘΜ. Καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΛΝ = ΡΝ.

4

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀντικειμένων κλάδων τῆς ὑπερβολῆς συναντῶνται μεταξύ των, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς διάμετροι συναντῶσαι τὰς ἐφαπτομένας, θὰ εἶναι ἴσα τὰ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τρίγωνα.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΓ ἂς συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἔστω δὲ κέντρον τῶν τομῶν τὸ Δ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἂς ἐκ-

ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΔΑ, ΒΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ζ, Η. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗΔ τρίγωνον τῷ ΒΔΖ, τὸ δὲ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ, ἴσον ἂν εἴη τὸ ΑΗΔ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ. ἀλλὰ τὸ ΔΘΛ τῷ ΒΔΖ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΑΗΔ ἄρα τῷ ΒΔΖ ἐστιν ἴσον. ὥστε καὶ τὸ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ ἴσον.

H326 ## ε′

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ ἐφ᾽ ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τὸ γινόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν τρίγωνον πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ διαμέτρῳ τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων διαφέρει τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΕΔ, ΔΖ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ αἱ ΖΓ, ΕΓ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΕΖ ἡ ΘΗΚΛ, παρὰ δὲ τὴν ΔΖ ἡ ΗΜ. λέγω, ὅτι τὸ ΗΘΜ τρίγωνον τοῦ ΚΘΔ διαφέρει τῷ ΚΛΖ.

βληθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Ε, ἂς ἐπιζευχθῶσι δὲ καὶ αἱ ΔΑ, ΒΔ καὶ ἂς ἐκβληθῶσιν αὗται μέχρι τῶν Ζ, Η. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΗΔ = ΒΔΖ, τὸ δὲ ΑΓΖ = ΒΓΗ.

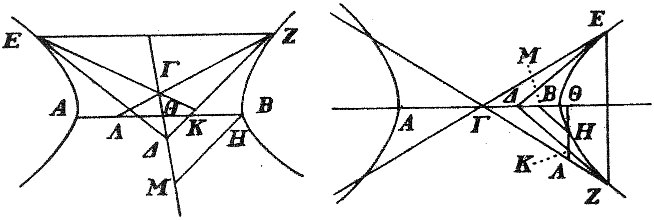
Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΘΛ· εἶναι ἄρα αὕτη παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ (1, 44). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ = ΔΘ, θὰ εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΗΔ = τρίγ. ΘΛΔ (Εὐκλ. 6, 19). Ἀλλὰ τὸ ΔΘΛ = ΒΔΖ (θ. 1)· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΑΗΔ = ΒΔΖ. Ὥστε καὶ τὸ ΑΓΖ = ΒΓΗ.

5

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀντικειμένων συναντῶνται, καὶ ληφθῇ ἐφ' οἱασδήποτε τῶν τομῶν σημεῖόν τι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μὲν παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παράλληλος πρὸς τὴν συνδέουσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, τὸ γινόμενον ἐξ αὐτῶν τρίγωνον παρὰ τὴν διὰ τοῦ σημείου συναντήσεως ἠγμένην διάμετρον, τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου παρὰ τὴν συνάντησιν τῶν ἐφαπτομένων διαφέρει (ὑπερέχει) κατὰ τὸ ἀπολαμβανόμενον τρίγωνον τὸ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ παρὰ τὴν διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀγομένην διάμετρον.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, τῶν ὁποίων κέντρον ἔστω τὸ Γ, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι αἱ ΕΔ, ΔΖ ἂς συναντῶνται εἰς τὸ Δ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΖ καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἂς ἐκβληθῇ αὕτη, καὶ ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ ΖΓ, ΕΓ ἂς ἐκβληθῶσι, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ πρὸς μὲν τὴν ΕΖ παράλληλος ἡ ΘΗΚΛ, πρὸς δὲ τὴν ΔΖ παράλληλος ἡ ΗΜ. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΘΜ ὑπερέχει τοῦ ΚΘΔ κατὰ τὸ τρίγωνον ΚΛΖ.

ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ ΓΔ διάμετρος τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ ΕΖ τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν κατηγμένη, καὶ ἡ μὲν ΗΘ παρὰ τὴν ΕΖ, ἡ δὲ ΜΗ παρὰ τὴν ΔΖ, τὸ ἄρα ΜΗΘ τρί-



γωνον τοῦ ΓΛΘ τριγώνου διαφέρει τῷ ΓΔΖ. ὥστε τὸ ΜΗΘ τοῦ ΚΘΔ τριγώνου διαφέρει τῷ ΚΖΛ.

καὶ φανερόν, ὅτι ἴσον γίνεται τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΜΗΚΔ τετραπλεύρῳ.

H328 ϛ'

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρον πρὸς τῇ μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῇ μιᾷ τῶν διαμέτρων ἴσον ἔσται τῷ γινομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ ἑτέρᾳ τῶν διαμέτρων.

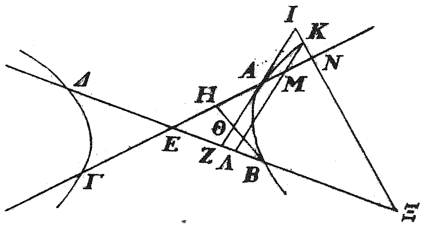
ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, καὶ τῆς ΑΒ τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΗ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθω-

Διότι ἐπειδὴ ἀπεδείχθη (2, 39 καὶ 38), ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι διάμετρος τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ ΕΖ κατηγμένη ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως, καὶ ἡ μὲν ΗΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ δὲ ΜΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΖ, τὸ τρίγωνον ἄρα ΜΗΘ ὑπερέχει τοῦ τριγώνου ΓΛΘ κατὰ τὸ τρίγωνον ΓΔΖ (1, 45). Ὥστε τὸ τρίγωνον ΜΗΘ ὑπερέχει τοῦ τριγώνου ΚΘΔ κατὰ τὸ τρίγωνον ΚΖΛ.

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι γίνεται τὸ τρίγωνον ΚΖΛ = τετράπλευρον ΜΗΚΔ.

6

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ληφθῇ σημεῖόν τι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας συναντῶσαι καὶ τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὰς διαμέτρους, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρον παρὰ τὴν μίαν τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν μίαν διάμετρον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τρίγωνον παρὰ τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν ἄλλην διάμετρον.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ καὶ τῆς τομῆς ΑΒ ἂς ἐφάπτωνται αἱ ΑΖ, ΒΗ συναντώμεναι μεταξύ των κατὰ τὸ Θ, ἂς ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὰς ἐφαπτομένας ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι *σαν αἱ ΚΜΛ, ΚΝΞ. λέγω, ὅτι τὸ ΚΖ τετράπλευρον τῷ ΑΙΝ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον.*

ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται ἡ ΑΖ συμπίπτουσα τῇ ΒΔ, καὶ παρὰ τὴν ΑΖ ἦκται ἡ ΚΛ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΝ τρίγωνον τῷ ΚΖ τετραπλεύρῳ.

ζʹ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ' ἑκατέρας τῶν τομῶν σημεῖά τινα ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις, τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων, ἴσα ἔσται ἀλλήλοις.

ὑποκείσθω γὰρ τὰ προειρημένα, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκα-
H330 *τέρας τῶν τομῶν σημεῖα τὰ Κ, Λ, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ ἤχθωσαν ἡ ΜΚΠΡΧ καὶ ἡ ΝΣΤΛΩ, παρὰ δὲ τὴν ΒΗ ἡ ΝΙΟΚΞ καὶ ἡ ΧΦΥΛΨ. λέγω, ὅτι ἔσται τὰ τῆς προτάσεως.*

ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΟΙ τρίγωνον τῷ ΡΟ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΟ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΕ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΕΗ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΕ τετραπλεύρῳ, καὶ ἔστι τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΗΕ· καὶ τὸ ΛΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΚΡΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΝΕ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΛ, καὶ τὸ ΚΥ τῷ ΡΛ.

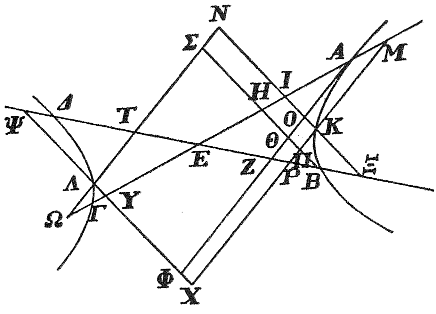
αἱ ΚΜΛ, ΚΝΞ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΚΖ = τρίγωνον ΑΙΝ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἀντικείμεναι καὶ τῆς τομῆς ΑΒ ἐφάπτεται ἡ ΑΖ συναντῶσα τὴν ΒΔ, καὶ ἡ ΚΛ ἤχθη παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ (θ. 2), τὸ τρίγωνον ΑΙΝ = τετράπλευρον ΚΖ.

7

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἐπὶ ἑκατέρας τῶν τομῶν ληφθῶσι σημεῖά τινα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας συναντῶσαι καὶ τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὰς διαμέτρους, τὰ τετράπλευρα τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν, βαίνοντα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων θὰ εἶναι ἴσα μεταξύ των.

Διότι ἔστωσαν τὰ προηγουμένως λεχθέντα, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ ἑκατέρας τῶν τομῶν τὰ σημεῖα Κ, Λ, καὶ δι' αὐτῶν ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς μὲν τὴν ΑΖ ἡ ΜΚΠΡΧ καὶ ἡ ΝΣΤΛΩ, πρὸς δὲ τὴν ΒΗ ἡ ΝΙΟΚΞ καὶ ἡ ΧΦΥΛΨ. Λέγω, ὅτι θὰ συμβαίνωσι τὰ τῆς προτάσεως.



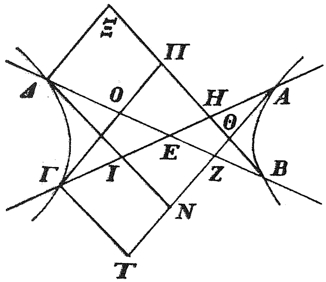
Διότι, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΟΙ = τετράπλευρον ΡΟ (θ. 2), ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΕΟ· ὅλον ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΕΖ = τετράπλευρον ΚΕ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΒΕΗ = τετράπλευρον ΛΕ (θ. 6), καὶ εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΖ = τρίγ. ΒΗΕ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΛΕ = ΙΚΡΕ. Ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΝΕ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΚ = ΙΛ, καὶ τὸ ΚΥ = ΡΛ.

η′

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω ἀντὶ τῶν Κ, Λ τὰ Γ, Δ, καθ' ἃ συμβάλλουσιν αἱ διάμετροι ταῖς τομαῖς, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν αἱ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις.

λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΗ τετράπλευρον τῷ ΖΓ καὶ τὸ ΞΙ τῷ ΟΤ.

ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΘΒΖ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β παράλληλος τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ, ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ· καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΗ, ἡ ΕΒ πρὸς ΒΖ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας διπλῆ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ, ἡ ΔΒ



H332 πρὸς ΒΖ. καὶ ἔστιν ὅμοια τὰ τρίγωνα διὰ τὰς παραλλήλους· ὡς ἄρα τὸ ΓΤΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΘΗ, τὸ ΞΒΔ πρὸς τὸ ΘΒΖ. καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δὲ τὸ ΑΗΘ τῷ ΘΖΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΤΑΓ τῷ ΔΒΞ. ὧν τὸ ΑΗΘ ἴσον ἐδείχθη τῷ ΒΘΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΘ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΓΘ. ὥστε καὶ τὸ ΔΗ τῷ ΓΖ.

καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΟ τῇ ΑΖ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΟΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΔΕΙ τῷ ΒΕΗ. ἀλλὰ τὸ ΒΕΗ τῷ ΑΕΖ ἴσον· καὶ τὸ ΓΟΕ ἄρα ἴσον τῷ ΔΕΙ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΗΔ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΖΓ. ὅλον ἄρα τὸ ΞΙ ἴσον ἐστὶ τῷ ΟΤ.

8

Τῶν αὐτῶν δεδομένων ἂς ληφθῶσιν ἀντὶ τῶν Κ, Λ σημείων τὰ Γ, Δ, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ διάμετροι συναντῶσι τὰς τομάς, καὶ δι' αὐτῶν ἂς ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας.

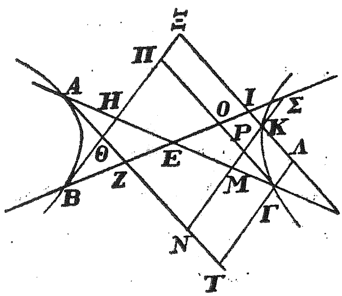
Λέγω, ὅτι εἶναι τὸ τετράγωνον ΔΗ = τετράπλ. ΖΓ καὶ τὸ ΞΙ = ΟΤ.

Διότι, ἐπειδὴ ἐδείχθη τὸ τρίγωνον ΑΗΘ = τρίγ. ΘΒΖ (θ. 1), καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἀγομένη εὐθεῖα εἰς τὸ Β εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ Η ἀγομένην εἰς τὸ Ζ (θ. 39 καὶ Πάππου λῆμμα 1), εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΑΕ:ΕΗ = ΒΕ:ΕΖ· καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων εἶναι ΕΑ:ΑΗ = ΕΒ:ΒΖ (ἐὰν α:β = γ:δ, ἀναστροφὴ εἶναι α:(α - β) = γ:(γ - δ)) (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 16). Εἶναι δὲ καί, ὡς ἡ ΓΑ:ΑΕ = ΔΒ:ΒΕ· διότι ἑκατέρα εἶναι διπλασία ἑκατέρας (θ. 1, 30)· δι' ἴσου ἄρα εἶναι, ὡς ἡ ΓΑ:ΑΗ = ΔΒ:ΒΖ (δι' ἴσου = πολλαπλασιασμὸς τῶν λόγων κατὰ μέλη) (Εὐκλ. ὁρισ. 5, 17). Καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια διὰ τὰς παραλλήλους· εἶναι ἄρα, ὡς τὸ τρίγωνον ΓΤΑ : τρίγ. ΑΘΗ, τὸ τρίγ. ΞΒΔ : τρίγ. ΘΒΖ (Εὐκλ. 5, 19). Καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16)· εἶναι δὲ τὸ ΑΗΘ = ΘΖΒ (θ. 1)· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΤΑΓ = ΔΒΞ. Ἐκ τῶν ὁποίων ἀπεδείχθη τὸ ΑΗΘ = ΒΘΖ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα, τὸ τετράπλευρον ΔΘ = τετράπλ. ΓΘ. Ὥστε καὶ τὸ ΔΗ = ΓΖ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΟ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ, τὸ τρίγωνον ΓΟΕ = τρίγ. ΑΕΖ (Εὐκλ. 6, 19). Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ τρίγ. ΔΕΙ = τρίγ. ΒΕΗ. Ἀλλὰ τὸ ΒΕΗ = ΑΕΖ (θ. 1)· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΓΟΕ = ΔΕΙ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράπλευρον ΗΔ = ΖΓ. Ὅλον ἄρα τὸ ΞΙ = ΟΤ.

θ′

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν τὸ μὲν ἕτερον τῶν σημείων μεταξὺ ᾖ τῶν διαμέτρων, οἷον τὸ Κ, τὸ δὲ ἕτερον ἑνὶ τῶν Γ, Δ ταὐτόν, οἷον τὸ Γ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι, λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕΟ τρίγωνον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ καὶ τὸ ΛΟ τῷ ΛΜ.



τοῦτο δὲ φανερόν. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΓΕΟ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ, τὸ δὲ ΑΕΖ ἴσον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ ΓΕΟ ἄρα ἴσον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ. ὥστε καὶ τὸ ΓΡΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΟ, καὶ τὸ ΚΓ ἴσον τῷ ΛΟ.

ι′

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω τὰ Κ, Λ σημεῖα μὴ καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν αἱ διάμετροι ταῖς τομαῖς.

δεικτέον δή, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΤΡΧ τετράπλευρον τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ.

H334 ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτονται αἱ ΑΖ, ΒΗ, καὶ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροί εἰσιν αἱ ΑΕ, ΒΕ, καὶ ⸢παρὰ⸣ τὰς ἐφαπτομένας εἰσὶν αἱ ΛΤ, ΚΙ, μεῖζόν ἐστι τὸ ΤΥΕ τρίγωνον τοῦ ΥΩΛ τῷ ΕΖΑ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ μεῖζόν ἐστι τῷ ΒΕΗ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕΖ τῷ ΒΕΗ· τῷ αὐτῷ ἄρα ὑπερέχει τό τε

9

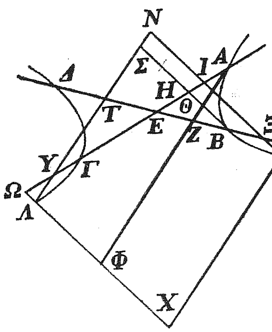
Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν τὸ μὲν ἓν σημεῖον εὑρίσκηται μεταξὺ τῶν διαμέτρων, ὅπως τὸ Κ, τὸ δὲ ἄλλο συμπίπτῃ πρὸς ἓν τῶν Γ, Δ, ὅπως τὸ Γ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι, λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΕΟ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράπλευρον ΚΕ, καὶ τὸ τετράπλευρον ΛΟ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράπλευρον ΛΜ.

Τοῦτο δὲ εἶναι φανερόν. Διότι, ἐπειδὴ ἐδείχθη τὸ τρίγωνον ΓΕΟ = τρίγ. ΑΕΖ (Εὐκλ. 6, 19 καὶ προηγ. θ. 8), τὸ δὲ τρίγ. ΑΕΖ = ΚΕ τετράπλευρον (θ. 6), εἶναι ἄρα τὸ ΓΕΟ = ΚΕ τετράπλευρον. Ὥστε καὶ τὸ ΓΡΜ = ΚΟ καὶ τὸ ΚΓ = ΛΟ τετράπλευρον.

10

Τῶν αὐτῶν δεδομένων ἂς ληφθῶσιν τὰ σημεῖα Κ, Λ ἐκτὸς τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται αἱ διάμετροι μὲ τὰς τομάς.

Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΛΤΡΧ = τετράπλευρον ΩΧΚΙ.

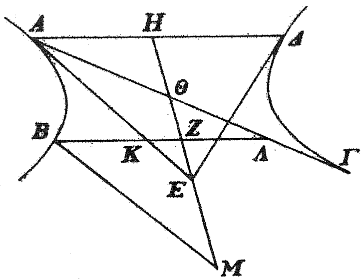


Διότι, ἐπειδὴ ἐφάπτονται αἱ ΑΖ, ΒΗ καὶ διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς διέρχονται αἱ διάμετροι ΑΕ, ΒΕ καὶ εἶναι παράλληλοι τῶν ἐφαπτομένων αἱ ΛΤ, ΚΙ εἶναι τὸ τρίγωνον ΤΥΕ = ΥΩΛ + ΕΖΑ. Ὁμοίως δὲ εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΞΕΙ = ΞΡΚ + ΒΕΗ (1, 44). Εἶναι δὲ ΑΕΖ = ΒΕΗ (θ. 1)· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα ὑπε-

ΤΕΥ τοῦ ΥΩΛ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ. τὸ ΤΥΕ ἄρα μετὰ τοῦ ΞΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΕΙ μετὰ τοῦ ΥΩΛ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΞΕΥΛΧ· τὸ ΛΤΡΧ ἄρα τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ.

ια'

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσιν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἠγμένῃ διαμέτρῳ διαφέρει τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου πρός τε τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων.



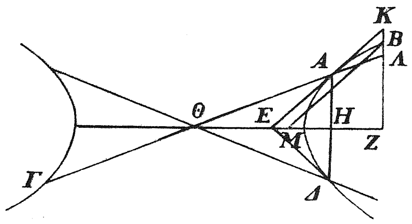
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ
H336 *ΑΕ, ΔΕ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἥ τε ΑΔ καὶ ἡ ΕΘΗ, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἡ ΒΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΒΜ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΖΜ τρίγωνον τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΕΖ.*

ὅτι μὲν γὰρ ἡ ΑΔ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΕΘ, φανερόν, ρέχει καὶ τὸ ΤΕΥ τοῦ ΥΩΛ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ. Εἶναι ἄρα ΤΥΕ+ΞΡΚ=ΞΕΙ+ΥΩΛ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ΚΞΕΥΛΧ· τὸ τετράπλευρον ἄρα ΛΤΡΧ = τετράπλευρον ΩΧΚΙ.

11

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ληφθῇ σημεῖόν τι ἐφ' οἱασδήποτε τῶν τομῶν καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῶσι παράλληλοι ἡ μὲν μία πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ ἄλλη πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον μετὰ τῆς ἠγμένης διαμέτρου διὰ τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων, διαφέρει τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου τοῦ περιοριζομένου ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἠγμένης διαμέτρου κατὰ τὸ ἀπολαμβανόμενον τρίγωνον τὸ περιοριζόμενον ὑπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τῆς ὑπερβολῆς αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΕ, ΔΕ ἃς συναντῶνται εἰς τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῶσιν καὶ ἡ ΑΔ καὶ ἡ ΕΘΗ, ἃς ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ δι' αὐτοῦ ἃς ἀχθῶσιν πρὸς μὲν τὴν ΑΗ παράλληλος ἡ ΒΖΛ, πρὸς δὲ τὴν ΑΕ παράλληλος ἡ ΒΜ. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΖΜ ὑπερέχει τοῦ τριγώνου ΑΚΛ κατὰ τὸ τρίγωνον ΚΕΖ.



Διότι, ὅτι μὲν ἡ ΑΔ τέμνεται εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς ΕΘ, *καὶ ὅτι ἡ ΕΘ διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΔ ἀγομένῃ· ὥστε κατηγμένη ἐστὶν ἡ ΑΗ ἐπὶ τὴν ΕΗ.*

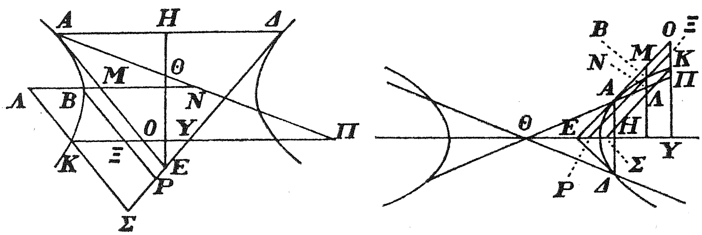
ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΗΕ, καὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΑΕ, κατηγμένη δὲ ἡ ΑΗ, ληφθέντος δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ Β σημείου κατήχθησαν ἐπὶ τὴν ΕΗ ἡ μὲν ΒΖ παρὰ τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΒΜ παρὰ τὴν ΑΕ, δῆλον, ὅτι τὸ ΒΜΖ τρίγωνον τοῦ ΛΘΖ διαφέρει τῷ ΘΑΕ. ὥστε καὶ τὸ ΒΖΜ τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΖΕ.

καὶ συναποδέδεικται, ὅτι τὸ ΒΚΕΜ τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΚΑ τριγώνῳ.

ιβ′

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν τομῶν $\overline{\beta}$ σημεῖα ληφθῇ, καὶ ἀφ᾽ ἑκατέρου παράλληλοι ἀχθῶσιν, ὁμοίως ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα ὑπ᾽ αὐτῶν τετράπλευρα.

ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Κ, καὶ δι᾽ αὐτῶν ἤχθωσαν



παράλληλοι τῇ ΑΔ αἱ ΛΒΜΝ, ΚΞΟΥΠ, τῇ δὲ ΑΕ αἱ ΒΞΡ, ΛΚΣ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΠ τῷ ΚΡ.

H338 *ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἴσον τὸ μὲν ΑΟΠ τρίγωνον τῷ ΚΟΕΣ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΜΝ τῷ ΒΜΕΡ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΡ* εἶναι φανερὸν (2, 39), καὶ ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ διάμετρος ΕΘ εἶναι συζυγὴς πρὸς τὴν διὰ τοῦ Θ ἀγομένην παραλλήλως πρὸς τὴν ΑΔ (2, 38)· ὥστε ἡ ΑΗ εἶναι κατηγμένη ἐπὶ τὴν ΕΗ (1 ὁρισ. 6).

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΗΕ εἶναι διάμετρος, καὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΑΕ, εἶναι δὲ κατηγμένη ἡ ΑΗ, ἀφοῦ δὲ ἐλήφθη ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ σημεῖον Β κατήχθησαν ἐπὶ τὴν ΕΗ ἡ μὲν ΒΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΒΜ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΜΖ ὑπερέχει τοῦ τριγώνου ΛΘΖ κατὰ τὸ τρίγωνον ΘΑΕ (1, 45, σχ. 2ον). Ὥστε καὶ τὸ ΒΖΜ ὑπερέχει τοῦ ΑΚΛ κατὰ τὸ ΚΖΕ.

Καὶ συγχρόνως ἔχει συναποδειχθῆ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΚΕΜ = τρίγωνον ΛΚΑ.

12

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν τομῶν ληφθῶσι δύο σημεῖα, καὶ ἀφ' ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν ἀχθῶσι παράλληλοι, ὁμοίως τὰ γινόμενα ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρα θὰ εἶναι ἴσα.

Διότι, ἔστω τὰ αὐτὰ ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς τομῆς ΑΒ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Κ καὶ δι' αὐτῶν ἂς ἀχθῶσιν παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΔ αἱ ΛΒΜΝ, ΚΞΟΥΠ, πρὸς δὲ τὴν ΑΕ αἱ ΒΞΡ, ΛΚΣ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΠ = τετράπλευρον ΚΡ.

Διότι, ἐπειδὴ ἀπεδείχθη, ὅτι τὸ μὲν τρίγωνον ΑΟΠ = τετράπλευρον ΚΟΕΣ (θ. 11 πόρ.), τὸ δὲ ΑΜΝ = ΒΜΕΡ, εἶναι ἄρα τὸ ὑπόλοιπον, τὸ τετράπλευρον ΚΡ, ἀφαιρεθέντος ἢ προστεθένλοιπὸν ἢ προσλαβὸν τὸ ΒΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΠ. καὶ κοινοῦ προστεθέντος ἢ ἀφαιρουμένου τοῦ ΒΟ τὸ ΒΠ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΣ.

ιγʹ

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις τῶν ἐφεξῆς τομῶν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι ἀχθῶσιν, ἴσα ἔσται τὰ τρίγωνα, ὧν κορυφὴ κοινὴ τὸ κέντρον ἐστὶ τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι, ἐφ᾽ ὧν τὰ Α, Β, Γ, Δ σημεῖα, καὶ τῶν Α, Β τομῶν ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΘ, ΒΘ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Δ, Γ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΖΘ τρίγωνον τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ.

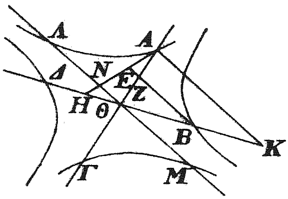
ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Θ παρὰ τὴν ΒΕ αἱ ΑΚ, ΛΘΜ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται τῆς Β τομῆς ἡ ΒΖΕ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς διάμετρός ἐστιν ἡ ΔΘΒ, καὶ παρὰ τὴν ΒΕ ἐστιν ἡ ΛΜ, συζυγής ἐστιν ἡ ΛΜ διάμετρος τῇ ΒΔ διαμέτρῳ ἡ καλουμένη δευτέρα διάμετρος· διὰ δὲ τοῦτο κατῆκται ἡ ΑΚ τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΒΔ. καὶ ἐφάπτεται ἡ ΑΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ,
H340 ἡ ΒΘ πρὸς ΗΘ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΚΑ πρὸς ΒΖ καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΘ πρὸς ΖΘ, ἡ ΒΘ πρὸς ΗΘ. καί εἰσιν αἱ ὑπὸ ΒΘΖ, ΗΘΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ.

τος τοῦ ΒΟ, = τετράπλ. ΜΠ. Καὶ προστεθέντος ἢ ἀφαιρεθέντος τοῦ κοινοῦ ΒΟ, τὸ ΒΠ =ΞΣ.

13

Ἐὰν εἰς τὰς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένας τῶν ἐφεξῆς τομῶν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συναντῶνται καὶ ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς διάμετροι, τὰ τρίγωνα, τῶν ὁποίων κοινὴ κορυφὴ εἶναι τὸ κέντρον τῶν ἀντικειμένων θὰ εἶναι ἴσα.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι συζυγεῖς, ἐπὶ τῶν ὁποίων ὑπάρχουν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἃς ἐφάπτωνται τῶν τομῶν Α, Β αἱ ΒΕ, ΑΕ συναντώμεναι εἰς τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΘ, ΒΘ ἃς ἐκβληθῶσι μέχρι τῶν σημείων Δ, Γ. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΖΘ = τρίγωνον ΑΗΘ.



Διότι ἃς ἀχθῶσι διὰ τῶν Α, Θ παραλλήλως πρὸς τὴν ΒΕ αἱ ΑΚ, ΛΘΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐφάπτεται τῆς τομῆς Β ἡ ΒΖΕ, καὶ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς διέρχεται ἡ διάμετρος ΔΘΒ, καὶ ἡ ΛΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ, ἡ διάμετρος ΛΜ εἶναι συζυγὴς πρὸς τὴν διάμετρον ΒΔ, ἡ καλουμένη δευτέρα διάμετρος (2, 20)· ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου ἡ ΑΚ ἔχει καταχθῆ τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΒΔ (1 ὁρισ. 6). Καὶ ἡ ΑΗ εἶναι ἐφαπτομένη· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΚΘ x ΘΗ = ΒΘ² (1, 38). Εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΚΘ : ΘΒ = ΒΘ : ΗΘ (Εὐκλ. 6, 17). Ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ : ΘΒ = ΚΑ : ΒΖ = ΑΘ : ΘΖ (Εὐκλ. 6, 4)· καὶ ὡς ἄρα ΑΘ : ΖΘ = ΒΘ : ΗΘ. Καὶ εἶναι γωνίαι ΒΘΖ+ΗΘΖ = 2 ὀρθάς· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΗΘ = τρίγωνον ΒΘΖ.

ιδʹ

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον πρὸς τῷ κέντρῳ τρίγωνον τοῦ γινομένου περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τριγώνου διοίσει τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον.

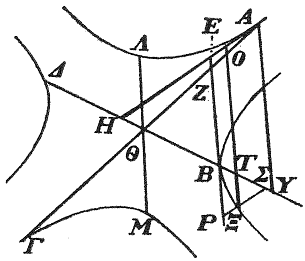
ἔστω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ξ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἤχθωσαν ἡ ΞΡΣ, παρὰ δὲ τὴν ΒΕ ἡ ΞΤΟ. λέγω, ὅτι τὸ ΟΘΤ τρίγωνον τοῦ ΞΣΤ διαφέρει τῷ ΘΒΖ.

ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΖ ἡ ΑΥ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον τῆς ΑΛ τομῆς διάμετρος μέν ἐστιν ἡ ΛΘΜ, συζυγὴς δὲ αὐτῇ καὶ δευτέρα διάμετρος ἡ ΔΘΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφάπτεται ἡ ΑΗ, κατῆκται δὲ παρὰ τὴν ΛΜ ἡ ΑΥ, ἕξει ἡ ΑΥ πρὸς τὴν ΥΗ τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΛΜ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΥ πρὸς ΥΗ, ἡ ΞΤ πρὸς ΤΣ, ὡς δὲ ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ·
H342 ἡ ΘΤ πρὸς ΤΟ καὶ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, ὡς δὲ ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΛΜ εἴδους πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. ἕξει ἄρα ἡ ΞΤ πρὸς ΤΣ τὸν συνημμένον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, τουτέστιν ἡ ΘΤ πρὸς ΤΟ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ

14

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἐφ' οἱασδήποτε τῶν τομῶν ληφθῇ σημεῖόν τι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας μέχρι τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον παρὰ τὸ κέντρον τρίγωνον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τριγώνου κατὰ τρίγωνον τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον.

Ἔστω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, ἂς ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς Β τὸ Ξ, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῶσι παράλληλος μὲν πρὸς τὴν ΑΗ ἡ ΞΡΣ, παράλληλος δὲ πρὸς τὴν ΒΕ ἡ ΞΤΟ. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΟΘΤ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριγώνου ΞΣΤ κατὰ τὸ τρίγωνον ΘΒΖ.



Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ΒΖ ἡ ΑΥ. Ἐπειδὴ λοιπὸν διὰ τοὺς αὐτοὺς πρὸς τὰ προηγούμενα λόγους τῆς τομῆς ΑΛ διάμετρος μὲν εἶναι ἡ ΛΘΜ, συζυγὴς δὲ πρὸς αὐτὴν καὶ δευτέρα διάμετρος εἶναι ἡ ΔΘΒ (2, 20), καὶ ἀπὸ τοῦ Α, ἔχει καταχθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν ΛΜ ἡ ΑΥ, θὰ εἶναι ΑΥ: ΥΗ = (ΘΥ:ΥΑ) x (πλάγιος ἄξων ΛΜ : παράμετρος) (1, 40). Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΥ : ΥΗ = ΞΤ : ΤΣ, ὡς δὲ ἡ ΘΥ : ΥΑ = ΘΤ : ΤΟ = ΘΒ : ΒΖ, ὡς δὲ ἡ παρὰ τὴν ΛΜ πλαγία πλευρά : παράμετρον = ἡ παρὰ τὴν ΒΔ παράμετρον : πλαγίαν πλευρὰν (1, 56). Θὰ εἶναι ἄρα ΞΤ : ΤΣ = (ΘΒ : ΒΖ), τουτέστιν (ΘΤ : ΤΟ) x (ἡ παρὰ τὴν ΒΔ παράμετρος : πλαγίαν πλευράν). Καὶ ἕνεκα τῶν ἀποδειχθέντων εἰς τὸ 41 θ. τοῦ α′ βιβλίου, τὸ τρίγωνον ΤΘΟ εἶναι μα′ τοῦ α′ βιβλίου τὸ ΤΘΟ τρίγωνον τοῦ ΞΤΣ διαφέρει τῷ ΒΖΘ.

ὥστε καὶ τῷ ΑΗΘ.

ιε′

Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροι ἀχθῶσι, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐφ᾽ ὁποτέρας τῶν συζυγῶν τομῶν καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τῇ τομῇ τρίγωνον τοῦ γινομένου τριγώνου πρὸς τῷ κέντρῳ μεῖζόν ἐστι τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΗΣ, Τ, Ξ, ὧν κέντρον τὸ Θ, καὶ τῆς ΑΒ τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΔΕ, ΒΔΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β ἀφῶν ἤχθωσαν διάμετροι αἱ ΑΘΖΦ, ΒΘΤ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΣ τομῆς σημεῖόν τι τὸ Σ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΒΓ ἡ ΣΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΣΥ. λέγω, ὅτι τὸ ΣΛΥ τρίγωνον τοῦ ΘΛΖ τριγώνου μεῖζόν ἐστι τῷ ΘΓΒ.

H344 ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΒΓ ἡ ΞΘΗ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ διὰ τοῦ Η ἡ ΚΙΗ, παρὰ δὲ τὴν ΒΤ ἡ ΣΟ· φανερὸν δή, ὅτι συζυγής ἐστι διάμετρος ἡ ΞΗ τῇ ΒΤ, καὶ ὅτι ἡ ΣΟ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΤ κατῆκται τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΘΗΟ, καὶ ὅτι παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΣΛΘΟ.

μεγαλύτερον τοῦ τριγώνου ΞΣΤ κατὰ τὸ τρίγωνον ΒΖΘ.

Ὥστε εἶναι μεγαλύτερον καὶ κατὰ τὸ τρίγωνον ΑΗΘ.

15

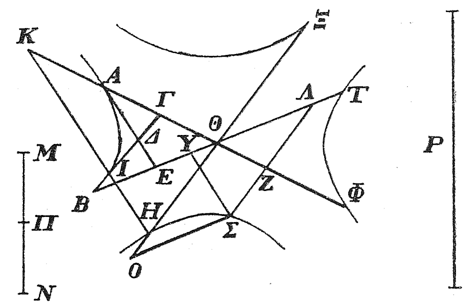
Ἐὰν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων συναντῶνται, καὶ διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς ἀχθῶσι διάμετροι, ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι ἐφ' οἱασδήποτε τῶν συζυγῶν τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας μέχρι τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν παρὰ τὴν τομὴν τρίγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ παρὰ τὸ κέντρον γινομένου τριγώνου κατὰ τρίγωνον τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΗΣ, Τ, Ξ, τῶν ὁποίων κέντρον εἶναι τὸ Θ, καὶ τῆς τομῆς ΑΒ ἂς ἐφάπτωνται αἱ ΑΔΕ, ΒΔΓ, καὶ διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς Α, Β ἂς ἀχθῶσι διάμετροι αἱ ΑΘΖΒ, ΒΘΤ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς τομῆς ΗΣ σημεῖόν τι τὸ Σ, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ πρὸς μέν, τὴν ΒΓ παράλληλος ἡ ΣΖΛ, πρὸς δὲ τὴν ΑΕ παράλληλος ἡ ΣΥ. Λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΣΛΥ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριγώνου ΘΛΖ κατὰ τὸ τρίγωνον ΘΓΒ.

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Θ πρὸς μὲν τὴν ΒΓ παράλληλος ἡ ΞΘΗ, πρὸς δὲ τὴν ΑΕ διὰ τοῦ Η παράλληλος ἡ ΚΙΗ, πρὸς δὲ τὴν ΒΤ παράλληλος ἡ ΣΟ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΞΗ εἶναι συζυγὴς διάμετρος πρὸς τὴν ΒΤ (2, 20), καὶ ὅτι ἡ ΣΟ παράλληλος οὖσα πρὸς τὴν ΒΤ ἔχει καταχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΘΗΟ (1 ὁρισ. 6), καὶ ὅτι τὸ σχῆμα ΣΛΘΟ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἐστιν ἡ ΒΘ, καὶ ἑτέρα ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΑΕ, γεγονέτω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΜΝ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΒΓ· ἡ ἄρα ΜΝ ἐστιν ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΒΤ εἴδους. δίχα τετμήσθω ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Π· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ. πεποιήσθω δή, ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΤΒ, ἡ ΤΒ πρὸς Ρ· ἔσται δὴ καὶ ἡ Ρ ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΞΗ εἴδους. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, ὡς δὲ ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, τὸ ὑπὸ ΠΜ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ τῷ ἀπὸ ΘΗ, διότι τὸ μὲν ἀπὸ ΞΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΤΒ, ΜΝ, καὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ τέταρτον τοῦ ὑπὸ ΤΒ, ΜΝ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΘ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΗΞ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, τὸ ἀπὸ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, τὸ ὑπὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ, τὸ ΔΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΙ· ὅμοια γάρ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ, τὸ ΔΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΒΘ· ὡς ἄρα τὸ ΔΒΕ H346 *τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΙ, τὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΘ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΙ τῷ ΓΒΘ [τὸ ἄρα ΗΘΚ τρίγωνον τοῦ ΘΙΚ διαφέρει τῷ ΙΘΗ, τουτέστι τῷ ΓΒΘ]. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ τὸν συνημμένον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΒ πρὸς ΜΠ καὶ ἡ ΠΜ πρὸς ΒΓ, ἀλλ' ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΜΠ, ἡ ΤΒ πρὸς ΜΝ καὶ ἡ Ρ πρὸς ΞΗ, ὡς δὲ ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἕξει ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ τὸν συγκείμενον*

'Επειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΓ ἐφάπτεται, καὶ ἡ ΒΘ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς, καὶ ἄλλη ἐφαπτομένη εἶναι ἡ ΑΕ, ἃς γίνῃ ὡς ἡ $ΔΒ : ΒΕ = ΜΝ : 2ΒΓ$· ἡ ΜΝ ἄρα εἶναι ἡ παράμετρος τοῦ παρὰ τὴν ΒΤ σχήματος (1, 50). Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΜΝ κατὰ τὸ σημεῖον Π· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ $ΔΒ : ΒΕ = ΜΠ : ΒΓ$. Ἂς γίνῃ τώρα, ὡς ἡ $ΞΗ : ΤΒ = ΤΒ : Ρ$· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ Ρ ἡ καλουμένη παράμετρος τοῦ παρὰ τὴν ΞΗ σχήματος (1, 56). 'Επειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς ἡ $ΔΒ : ΒΕ = ΜΠ : ΓΒ$, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΔΒ : ΒΕ = ΔΒ^2 : ΔΒ \times ΒΕ$, ὡς δὲ ἡ $ΜΠ : ΓΒ = ΜΠ \times ΒΘ : ΓΒ \times ΒΘ$, εἶναι ἄρα ὡς $ΔΒ^2 : ΔΒ \times ΒΕ = ΠΜ \times ΒΘ : ΓΒ \times ΒΘ$.



Εἶναι δὲ τὸ $ΜΠ \times ΒΘ = ΘΗ^2$, διότι τὸ μὲν $ΞΗ^2 = ΤΒ \times ΜΝ$ (1, 56), καὶ τὸ μὲν $ΜΠ \times ΒΘ = 1/4\ ΤΒ \times ΜΝ$ (1, 30), τὸ δὲ $ΗΘ^2 = 1/4\ ΗΞ^2$· εἶναι ἄρα $ΔΒ^2 : ΔΒ \times ΒΕ = ΗΘ^2 : ΓΒ \times ΒΘ$. 'Εναλλὰξ εἶναι, ὡς τὸ $ΔΒ^2 : ΗΘ^2 = ΔΒ \times ΒΕ : ΓΒ \times ΒΘ$ (Εὐκλ. 5, 16). 'Αλλ' ὡς μὲν τὸ $ΔΒ^2 : ΘΗ^2$ = τρίγωνον ΔΒΕ : τρίγωνον ΗΘΙ (Εὐκλ. 6, 19)· διότι εἶναι ὅμοια (Εὐκλ. 1, 29)· ὡς δὲ τὸ $ΔΒ \times ΒΕ : ΓΒ \times ΒΘ$ = τρίγωνον ΔΒΕ: τρίγωνον ΓΒΘ (Εὐκλ. 6, 23)· ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΔΒΕ:τρίγ. ΗΘΙ = τρίγ. ΔΒΕ : τρίγ. ΓΒΘ. Εἶναι ἄρα τὸ ΗΘΙ = ΓΒΘ (Εὐκλ. 5, 9) [τὸ τρίγωνον ἄρα ΗΘΚ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΘΙΚ κατὰ τὸ ΙΘΗ, τουτέστι κατὰ τὸ ΓΒΘ]. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ $ΘΒ: ΒΓ = (ΘΒ:ΜΠ) \times (ΠΜ : ΒΓ)$, ἀλλ' ὡς ἡ $ΘΒ : ΜΠ = ΤΒ : ΜΝ$ (1, 30) $= Ρ : ΞΗ$, ὡς δὲ ἡ $ΜΠ : ΒΓ = ΔΒ : ΒΕ$, θὰ εἶναι λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔB πρὸς BE καὶ ἡ P πρὸς ΞH. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $B\Gamma$ τῇ $\Sigma\Lambda$, καὶ ὅμοιον τὸ $\Theta\Gamma B$ τρίγωνον τῷ $\Theta\Lambda Z$, καὶ ἔστιν, ὡς ἡ ΘB πρὸς ΓB, ἡ $\Theta\Lambda$ πρὸς ΛZ, ἕξει ἄρα ἡ $\Theta\Lambda$ πρὸς ΛZ τὸν συνημμένον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ P πρὸς ΞH καὶ ἡ ΔB πρὸς BE, τουτέστιν ἡ ΘH πρὸς ΘI. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ $H\Sigma$ διάμετρον ἔχουσα τὴν ΞH, ὀρθίαν δὲ τὴν P, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Σ κατῆκται ἡ ΣO, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΘH εἶδος τὸ $\Theta I H$, ἀπὸ δὲ τῆς κατηγμένης τῆς ΣO ἤτοι τῆς $\Theta\Lambda$ ἴσης αὐτῇ τὸ $\Theta\Lambda Z$, ἀπὸ δὲ τῆς ΘO μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης ἤτοι τῆς $\Sigma\Lambda$ ἴσης αὐτῇ τὸ $\Sigma\Lambda Y$ εἶδος ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῷ $\Theta I H$, καὶ ἔχει τοὺς συγκειμένους λόγους, ὡς εἴρηται, τὸ $\Sigma\Lambda Y$ τρίγωνον τοῦ $\Theta\Lambda Z$ μεῖζόν ἐστι τῷ $\Theta\Gamma B$.

ις'

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι
H348 ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν, ἀπὸ δέ τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἐφαπτομένων, ἔσται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

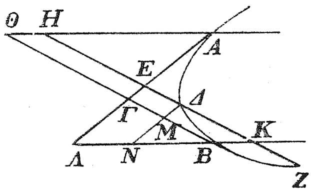
ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ AB, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῆς αἱ $A\Gamma$, $B\Gamma$ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Γ, ἄρα ΘΒ : ΒΓ = (ΔΒ:ΒΕ) x (Ρ:ΞΗ). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΣΛ, καὶ τὸ τρίγωνον ΘΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΘΛΖ (Εὐκλ. 1, 29), καὶ εἶναι, ὡς ἡ ΘΒ:ΓΒ = ΘΛ:ΛΖ (Εὐκλ. 6, 4), θὰ εἶναι ἄρα ΘΛ : ΛΖ = (Ρ : ΞΗ) x (ΔΒ : ΒΕ) = (Ρ:ΞΗ) x (ΘΗ:ΘΙ) (Εὐκλ. 6, 4). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΗΣ εἶναι ὑπερβολὴ ἔχουσα διάμετρον τὴν ΞΗ, παράμετρον δὲ τὴν Ρ· καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Σ ἔχει καταχθῇ ἡ ΣΟ, καὶ ἔχει ἀναγραφῇ ἀπὸ μὲν τῆς ἀκτῖνος ΘΗ (τῆς διαμέτρου ΞΗ) τὸ σχῆμα ΘΙΗ, ἀπὸ δὲ τῆς κατηγμένης τῆς ΣΟ ἤτοι τῆς ΘΛ ἴσης πρὸς αὐτὴν (Εὐκλ. 1, 34), τὸ τρίγωνον ΘΛΖ, ἀπὸ δὲ τῆς ΘΟ μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης ἤτοι τῆς ΣΛ ἴσης πρὸς αὐτήν, τὸ τρίγωνον ΣΛΥ, σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος, τὸ ΘΙΗ, καὶ ἔχει τὰς ἀνωτέρω σχέσεις, ὡς ἐλέχθη, τὸ τρίγωνον ΣΛΥ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΘΛΖ κατὰ τὸ ΘΓΒ.

16

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τομῆς κώνου ἢ περιφερείας κύκλου συναντῶνται, ἀπὸ σημείου δέ τινος τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρός τινα τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὴν ἄλλην τῶν ἐφαπτομένων, θὰ εἶναι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα μεταξύ των, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀπολαμβανομένης μέχρι τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Ἔστω τομὴ κώνου ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒ, καὶ ἂς ἐφάπτωνται αὐτῆς αἱ ΑΓ, ΓΒ συναντώμεναι εἰς τὸ Γ, καὶ ἂς *καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΓΒ ἡ ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.*

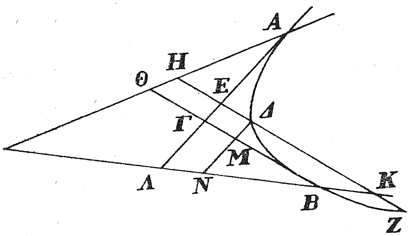
ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Β διάμετροι ἥ τε ΑΗΘ καὶ ἡ ΚΒΛ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΛ παράλληλος ἡ ΔΜΝ· φανερὸν αὐτόθεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΖ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΛΔ τετραπλεύρῳ καὶ τὸ ΒΛΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΘ.

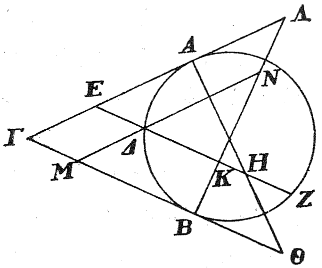


ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΚ τῇ ΚΔ ἐστὶν ἴση, καὶ πρόσκειται ἡ ΔΕ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΔ, οὕτως τὸ ΕΚΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΝΚ. καὶ ἐναλλάξ· καὶ ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς ὅλον τὸ ΕΛΚ τρίγωνον, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔΝΚ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΛ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ
Η350 *ΕΚ πρὸς τὸ ΕΛΚ τρίγωνον· ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΕΛΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΛΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΛΔ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΛΓΒ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΔΛ τῷ ΑΕΗ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΛΓΒ τῷ ΑΘΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΑΘΓ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ΑΕΗ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΘΓ. ὡς δὲ τὸ ΑΗΕ πρὸς τὸ ΑΘΓ, τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ·*

ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς ΑΒ, τὸ Δ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΒ ἡ ΕΔΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ ΒΓ^2: ΑΓ = ΖΕ x ΕΔ : ΕΑ^2.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν διὰ τῶν Α, Β διάμετροι καὶ ἡ ΑΗΘ καὶ ἡ ΚΒΛ, διὰ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὴν ΑΛ παράλληλος ἡ ΔΜΝ· εἶναι ἐκ τούτων φανερόν, ὅτι ἡ ΔΚ = ΚΖ (1, 46 - 47) καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΗ = τετράπλευρον ΛΔ (θ. 2) καὶ τὸ τρίγωνον ΒΛΓ = τρίγ. ΑΓΘ (θ. 1).





Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΖΚ = ΚΔ, καὶ πρόσκειται ἡ ΔΕ εἶναι ΖΕ x ΕΔ + ΔΚ^2 = ΚΕ^2 (Εὐκλ. 2, 6). Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΕΛΚ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΚΝ, εἶναι, ΕΚ^2 : ΚΔ^2 = τρίγωνον ΕΚΛ : ΔΚΝ (Εὐκλ. 6, 19). Καὶ ἐναλλάξ· καὶ ὡς ὅλον τὸ ΕΚ^2 : ΕΛΚ τρίγωνον = τὸ ἀφαιρεθὲν ΔΚ^2 : ἀφαιρεθὲν ΔΝΚ τρίγωνον· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΖΕ x ΕΔ : ὑπόλοιπον τὸ ΔΛ = ΕΚ^2 = ΕΛΚ τρίγωνον (Εὐκλ. 5, 19). Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΕΚ^2 : ΕΛΚ = ΓΒ^2 : ΛΓΒ (Εὐκλ. 6, 4)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΖΕ x ΕΔ : τετράπλευρον ΛΔ = ΓΒ^2 : τρίγωνον ΛΓΒ. Εἶναι δὲ τὸ μὲν ΔΛ = τρίγωνον ΑΕΗ, τὸ δὲ ΛΓΒ = ΑΘΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΖΕ x ΕΔ : τρίγωνον ΑΕΗ = ΓΒ^2 : ΑΘΓ. Ἐναλλὰξ εἶναι, ὡς τὸ ΖΕ x ΕΔ : ΓΒ^2 = τρίγωνον ΑΕΗ : ΑΘΓ (Εὐκλ. 5, 16). Ὡς δὲ τὸ ΑΗΕ : ΑΘΓ =

καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ. καὶ ἐναλλάξ.

ιζʹ

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἀχθῶσιν ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὴν γραμμήν, ἔσται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ δι᾽ αὐτῶν παρὰ τὰς ΑΓ, ΓΒ ἤχθωσαν αἱ ΕΖΙΚ, ΔΖΗΘ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ.

ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Β διάμετροι αἱ ΑΛΜΝ, ΒΟΞΠ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἵ τε ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ παράλληλοι H352 *μέχρι τῶν διαμέτρων, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Δ, Ε παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΔΞ, ΕΜ· φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΚΙ τῇ ΙΕ ἐστιν ἴση καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΗΔ.*

ἐπεὶ οὖν ἡ ΚΕ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ι, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΙ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΙ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τρίγωνα διὰ τὰς παραλλήλους, ἔστιν, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ὅλον τὸ ΙΜΕ τρίγωνον, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΙΖ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΖΙΛ

$EA^2 : A\Gamma^2$ (Εὐκλ. 6, 4)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ZE \times E\Delta : \Gamma B^2 = EA^2 : A\Gamma^2$. Καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16).

17

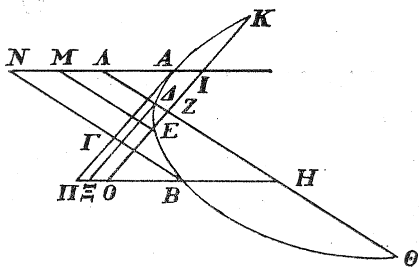
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι κώνου τομῆς ἢ περιφερείας κύκλου συναντῶνται, ληφθῶσι δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀχθῶσιν εἰς τὴν τομὴν παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὴν τομήν, θὰ εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἐφαπτομένων μεταξύ των, οὕτως τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

Ἔστω τομὴ κώνου ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒ καὶ ἐφαπτόμεναι τῆς ΑΒ αἱ ΑΓ, ΒΓ συναντώμεναι κατὰ τὸ Γ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ δι' αὐτῶν ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΓ, ΓΒ αἱ ΕΖΙΚ, ΔΖΗΘ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ $A\Gamma^2 : \Gamma B^2 = KZ \times ZE : \Theta Z \times Z\Delta$.

Διότι ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν Α, Β διάμετροι αἱ ΑΛΜΝ, ΒΟΞΠ, καὶ ἂς ἐκβληθῶσι καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ παράλληλοι μέχρι τῶν διαμέτρων, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Δ, Ε παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΔΞ, ΕΜ· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι ἡ $KI = IE$ καὶ ἡ $\Theta H = H\Delta$ (1, 46 - 47).

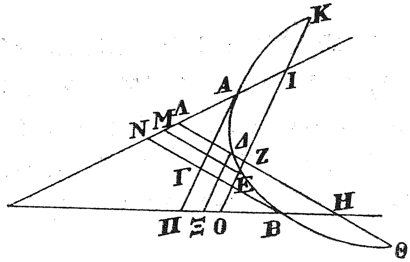
Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΚΕ ἔχει τμηθῇ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Ι, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ζ, εἶναι $KZ \times ZE + ZI^2 = EI^2$ (Εὐκλ. 2, 5). Καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια διὰ τὰς παραλλήλους (Εὐκλ. 1, 29), εἶναι, ὡς τὸ EI^2 : ΙΜΕ τρίγωνον = ἀφαιρεθὲν τὸ IZ^2: ἀφαιρεθὲν τὸ τρίγωνον ΖΙΛ (Εὐκλ. 6, 19 . 5, 16). Καὶ τὸ ὑπό-

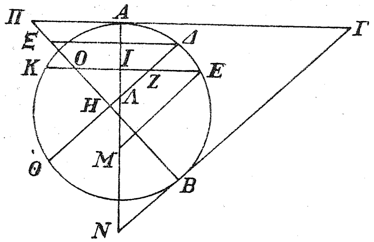
τρίγωνον. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΜ τετράπλευρόν ἐστιν, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ὅλον τὸ ΜΕΙ [τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς τὸ ΙΜΕ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΓΑΝ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΜ τετράπλευρον, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΑΝ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΓΝ τῷ ΓΠΒ, τὸ δὲ ΖΜ τῷ ΖΞ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒΠ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καί, ὡς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ πρὸς τὸ ΞΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΓΠΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς ΓΠΒ, διὰ δὲ τὸ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ΖΞ τετράπλευρον πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ, τὸ ΓΠΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, δι' ἴσου ἄρα,
H354 ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ.



ιη'

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ τι σημεῖον ἐφ' ὁποτερασοῦν τῶν τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν ἐφαπτομένην, ἔσται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαλοιπον ἄρα τὸ ΚΖ x ΖΕ : τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΖΜ τετράπλευρον = ΕΙ^2 : ΜΕΙ τρίγωνον (Εὐκλ. 5, 19). Ἀλλ' ὡς τὸ ΕΙ^2 : ΙΜΕ τρίγωνον = ΓΑ^2 : ΓΑΝ τρίγωνον (Εὐκλ. 6, 19.5, 16)· ὡς ἄρα τὸ ΚΖ x ΖΕ : ΖΜ τετράπλευρον = ΑΓ^2 : ΓΑΝ. Εἶναι δὲ τὸ μὲν ΑΓΝ = ΓΠΒ (θ. 1), τὸ δὲ ΖΜ = ΖΞ (θ. 3)· ὡς ἄρα τὸ ΚΖ x ΖΕ : ΖΞ = ΑΓ^2 : ΓΒΠ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καί, ὡς τὸ ΘΖ x ΖΔ : ΞΖ = ΓΒ^2 : ΓΠΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς μὲν τὸ ΚΖ x ΖΕ : ΖΞ τετράπλευρον = ΑΓ^2 : ΓΠΒ, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ΖΞ τετράπλευρον : ΘΖ x ΖΔ = ΓΠΒ : ΓΒ^2, δι' ἴσου ἄρα (διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη), εἶναι ὡς ΑΓ^2: ΒΓ^2 = ΚΖ x ΖΕ : ΘΖ x ΖΔ (Εὐκλ. 5, 22).





18

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀντικειμένων συμπίπτωσι, ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι ἐφ' οἱασδήποτε τῶν τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς μίαν τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὴν ἄλλην ἐφαπτομένην, θὰ εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἐφαπτομένων μεταξύ των, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς πτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἀφῇ τετράγωνον.

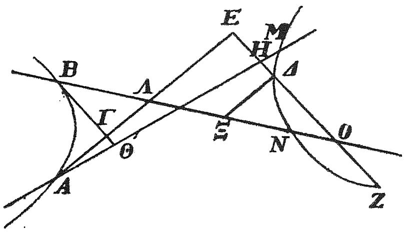
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΜΝ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓΛ, ΒΓΘ καὶ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροι αἱ ΑΜ, ΒΝ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΜΝ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ δι᾿ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΒΘ ἡ ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΕ παράλληλος ἡ ΔΞ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΒ καὶ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΒΝ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΘ καὶ τῇ ΒΘ παράλληλος ἡ ΔΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΟ τῇ ΟΔ. καὶ πρόσκειται ἡ ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΟ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΛ τῇ ΔΞ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΟΛ τρίγωνον τῷ ΔΞΟ. ἔστιν ἄρα, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΟ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΞΔΟ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρόν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ. ἀλλ᾿ ὡς τὸ ἀπὸ ΟΕ πρὸς τὸ ΟΕΛ
H356 τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΔΛ τετράπλευρον τῷ ΑΕΗ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΒΛΓ τῷ ΑΓΘ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΑΕΗ, τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΑΓΘ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ΑΓΘ πρὸς τὸ ΑΓ· δι᾿ ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.

καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀπολαμβανομένης παρὰ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΜΝ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓΛ, ΒΓΘ καὶ διάμετροι διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς αἱ ΑΜ, ΒΝ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς τομῆς ΜΝ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ δι᾿ αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΘ ἡ ΕΔΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ ΒΓ² : ΓΑ² = ΖΕ x ΕΔ : ΑΕ².

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Δ πρὸς τὴν ΑΕ παράλληλος ἡ ΔΞ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι ὑπερβολὴ καὶ ἡ ΒΝ εἶναι διάμετρος αὐτῆς καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΘ καὶ πρὸς τὴν ΒΘ παράλληλος ἡ ΔΖ, εἶναι ἄρα ἡ ΖΟ = ΟΔ (1, 48). Καὶ πρόσκειται ἡ ΕΔ· εἶναι ἄρα ΖΕ x ΕΔ + ΔΟ² = ΕΟ² (Εὐκλ. 2, 6). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΛ εἶναι παράλληλος



πρὸς τὴν ΔΞ, τὸ τρίγωνον ΕΟΛ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΞΟ (Εὐκλ. 1, 29). Εἶναι ἄρα, ὡς ΕΟ²: ΕΟΛ = ΔΟ² : ΞΔΟ τρίγωνον (Εὐκλ. 6, 19 . 5, 16)· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΔΕ x ΕΖ : ΔΛ τετράπλευρον = ΕΟ² : ΕΟΛ (Εὐκλ. 5, 19). Ἀλλ᾿ ὡς τὸ ΟΕ² : ΟΕΛ τρίγωνον = ΒΓ² : ΒΓΛ τρίγωνον (Εὐκλ. 5, 19)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΖΕ x ΕΔ : ΔΛ τετράπλευρον = ΒΓ² : ΒΓΛ τρίγωνον. Εἶναι δὲ τὸ τετράπλευρον ΔΛ = τρίγωνον ΑΕΗ (θ. 6), τὸ δὲ ΒΛΓ = ΑΓΘ (θ. 1)· ὡς ἄρα τὸ ΖΕ x ΕΔ : ΑΕΗ = ΒΓ² : ΑΓΘ. Εἶναι δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕΗ : ΕΑ² = ΑΓΘ : ΑΓ² (Εὐκλ. 6, 19)· δι᾿ ἴσου ἄρα (Εὐκλ. 5, 22) (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι, ὡς τὸ ΒΓ² : ΓΑ² = ΖΕ x ΕΔ : ΕΑ².

ιθʹ

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἀχθῶσι δὲ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις ἀλλήλας τέμνουσαι καὶ τὴν τομήν, ἔσται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

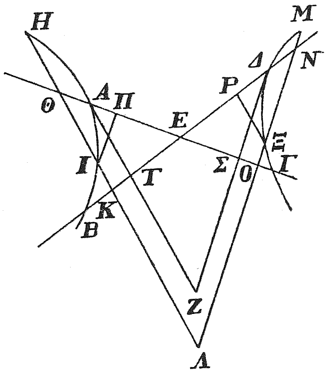
ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΖ, ΖΔ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπό τινων σημείων ἤχθωσαν παρὰ τὰς ΑΖΔ αἱ ΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΛ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

ἤχθωσαν παρὰ τὰς ΑΖΔ διὰ τῶν Ξ, Ι αἱ ΙΠ, ΞΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΣ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ΘΛΟ καὶ τὸ ἀπὸ ΘΙ πρὸς τὸ ΘΙΠ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς λοιπὸν τὸ ΙΠΟΛ τετράπλευρόν ἐστιν,
H358 ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΣ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΑΖΣ τῷ ΔΖΤ καὶ τὸ ΠΟΛΙ τῷ ΚΡΞΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΔΤΖ, τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ΡΞΛΚ. ὡς δὲ τὸ ΔΤΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὸ ΡΞΛΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ· καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

19

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀντικειμένων συναντῶνται, ἀχθῶσι δὲ παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὴν τομήν, θὰ εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἐφαπτομένων μεταξύ των, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συναντήσεως τῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΖ, ΖΔ ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ σημείων τινῶν ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΖ, ΖΔ αἱ ΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΛ. Λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ $ΑΖ^2 : ΖΔ^2 = ΗΛ \times ΛΙ : ΜΛ \times ΛΞ$.



Ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὰς ΑΖ, ΖΔ παράλληλοι διὰ τῶν σημείων Ξ, Ι, αἱ ΙΠ, ΞΡ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ $ΑΖ^2$: ΑΖΣ τρίγωνον $= ΘΛ^2$: ΘΛΟ τρίγωνον $= ΘΙ^2$: ΘΙΠ (Εὐκλ. 6, 19 . 5, 16), καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΗΛ \times ΛΙ$: ὑπόλοιπον ΙΠΟΛ τετράπλευρον $= ΑΖ^2$: ΑΖΣ τρίγωνον (Εὐκλ. 5, 19). Εἶναι δὲ τὸ ΑΖΣ = ΔΖΤ (θ. 4) καὶ τὸ ΠΟΛΙ = ΚΡΞΛ (θ. 7)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΑΖ^2 : ΔΤΖ = ΗΛ \times ΛΙ : ΡΞΛΚ$. Ὡς δὲ τὸ $ΔΤΖ : ΖΔ^2 = ΡΞΛΚ : ΜΛ \times ΛΞ$· καὶ δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι ὡς $ΑΖ^2 : ΖΔ^2 = ΗΛ \times ΛΙ : ΜΛ \times ΛΞ$ (Εὐκλ. 5, 22).

κʹ

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, ἀχθῇ δέ τις ἑτέρα εὐθεῖα παρὰ τὴν αὐτὴν τέμνουσα τάς τε τομὰς καὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἔσται, ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης εὐθειῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

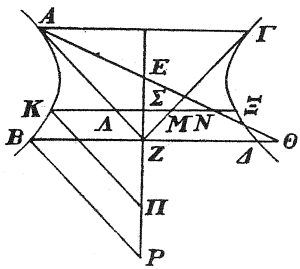
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ὧν κέντρον τὸ Ε, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΖ, ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ καὶ αἱ ΕΖ, ΑΕ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΒΖΘ, καὶ εἰλήφθω, ὃ ἔτυχε, σημεῖον τὸ Κ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΚΛΣΜΝΞ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ.

ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ, Β παρὰ τὴν ΑΖ αἱ ΚΠ, ΒΡ. H360 *ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΒΖΡ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΚΣ πρὸς τὸ ΚΣΠ καὶ τὸ ἀπὸ ΛΣ πρὸς τὸ ΛΣΖ, καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ΚΛΖΠ τετράπλευρον, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΒΖ τῷ ὑπὸ ΒΖΔ, τὸ δὲ ΒΡΖ τρίγωνον τῷ ΑΖΘ, τὸ δὲ ΚΛΖΠ τετράπλευρον τῷ ΑΛΝ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ΑΖΘ τρίγωνον, τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ΑΛΝ. ὡς δὲ τὸ ΑΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, τὸ ΑΛΝ πρὸς τὸ*

20

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀντικειμένων συναντῶνται, καὶ διὰ τοῦ σημείου συναντήσεως ἀχθῇ εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν συναντῶσα ἑκατέραν τῶν τομῶν, ἀχθῇ δὲ καὶ ἄλλη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν αὐτὴν τέμνουσα καὶ τὰς τομὰς καὶ τὰς ἐφαπτομένας, θὰ εἶναι, ὡς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ἀπὸ τῆς συναντήσεως τῶν πρὸς τὰς τομὰς προσπιπτουσῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης εὐθειῶν πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀπολαμβανομένης μέχρι τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

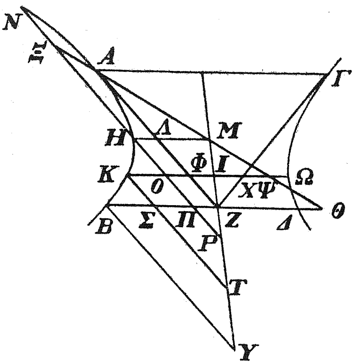
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, τῶν ὁποίων κέντρον εἶναι τὸ Ε, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΖ, ΓΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΓ καὶ αἱ ΕΖ, ΑΕ καὶ ἂς ἐκβληθῶσι, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ζ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ΒΖΘ, καὶ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, τὸ Κ, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ΚΛΣΜΝΞ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ ΒΖ x ΖΔ : ΖΑ² = ΚΛ x ΛΞ : ΑΛ².



Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Κ, Β παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΖ αἱ ΚΠ, ΒΡ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς τὸ ΒΖ² : ΒΖΡ τρίγωνον = ΚΣ² : ΚΣΠ = ΛΣ² : ΛΣΖ (Εὐκλ. 6, 19 . 5, 16) = ΚΛ x ΛΞ (Εὐκλ. 2, 5) : ΚΛΖΠ τετράπλευρον (Εὐκλ. 5. 19), εἶναι δὲ τὸ μὲν ΒΖ² = ΒΖ x ΖΔ, τὸ δὲ τρίγωνον ΒΡΖ = ΑΖΘ (θ. 11), τὸ δὲ τετράπλευρον ΚΛΖΠ = τρίγωνον ΑΛΝ (θ. 5), εἶναι ἄρα, ὡς τὸ ΒΖ x ΖΔ : ΑΖΘ τρίγωνον = ΚΛ x ΛΞ : ΑΛΝ. Ὡς δὲ ἀπὸ ΑΛ· δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ.

κα´

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι᾽ αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὰς τομάς, ἔσται, ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν.



ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, εἰλήφθω δὲ τὰ Η, Κ σημεῖα, καὶ δι᾽ αὐτῶν ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ αἱ ΝΞΗΟΠΡ, ΚΣΤ, παρὰ δὲ
H362 τὴν ΑΓ αἱ ΗΛΜ, ΚΟΦΙΧΨΩ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΟΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΟΗ.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΘ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΑΛ πρὸς τὸ ΑΛΜ καὶ τὸ ἀπὸ ΞΟ πρὸς τὸ ΞΟΨ καὶ τὸ ἀπὸ ΞΗ πρὸς τὸ ΞΗΜ, ὡς ἄρα ὅλον τὸ ἀπὸ ΞΟ πρὸς ὅλον τὸ ΞΟΨ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΞΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ τὸ $ΑΖΘ : ΑΖ^2 = ΑΛΝ : ΑΛ^2$ (Εὐκλ. 5, 19)· δι' ἴσου ἄρα (διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) (Εὐκλ. 5, 22), εἶναι $ΒΖ \times ΖΔ : ΖΑ^2 = ΚΛ \times ΛΞ : ΑΛ^2$.

21

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ληφθῶσι δύο σημεῖα, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ μὲν παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παράλληλος πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς, θὰ εἶναι, ὡς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν προσπιπτουσῶν ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως, εἰς τὰς τομάς, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συναντήσεως πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συναντήσεως εὐθειῶν.

Διότι ἔστωσαν τὰ αὐτὰ δεδομένα ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα, ἂς ληφθῶσι δὲ τὰ σημεῖα Η, Κ, καὶ δι' αὐτῶν ἂς ἀχθῶσι πρὸς μὲν τὴν ΑΖ παράλληλοι αἱ ΝΞΗΟΠΡ, ΚΣΤ, πρὸς δὲ τὴν ΑΓ παράλληλοι αἱ ΗΛΜ, ΚΟΦΙΧΨΩ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ $ΒΖ \times ΖΔ : ΖΑ^2 = ΚΟ \times ΟΩ : ΝΟ \times ΟΗ$.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ $ΑΖ^2 : ΑΖΘ$ τρίγωνον $= ΑΛ^2 : ΑΛΜ = ΞΟ^2 : ΞΟΨ = ΞΗ^2 : ΞΗΜ$ (Εὐκλ. 6, 19 . 5, 16), θὰ εἶναι ἄρα ὅλον τὸ $ΞΟ^2$ πρὸς ὅλον τὸ ΞΟΨ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ $ΞΗ^2$ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΞΗΜ. Καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα (1, 47.

ΞΗΜ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς λοιπὸν τὸ ΗΟΨΜ τετράπλευρόν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΘ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΖΘ τῷ ΒΥΖ, τὸ δὲ ΗΟΨΜ τῷ ΚΟΡΤ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΒΖΥ, τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς τὸ ΚΟΡΤ. ὡς δὲ τὸ ΒΥΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΒΖΔ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ΚΟΡΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΟΩ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ, τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΟΩ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, τὸ ὑπὸ ΚΟΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΟΗ.

κβ'

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἐπιψαύωσιν, ἀχθῶσι δέ τινες εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται, ὡς ἡ τοῦ πρὸς τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως.

H364 *ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΔ παράλληλοι ἔστωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ. διήχθωσαν δὴ ἡ μὲν ΕΞΗ παρὰ τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΚΕΛΜ παρὰ τὴν ΑΓ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν τοῦ εἴδους πλευράν, τὸ ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ.*

ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Ξ παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΞΝ, ΗΖ.

Εὐκλ. 2, 6) ΝΟ x ΟΗ : τὸ ὑπόλοιπον τετράπλευρον ΗΟΨΜ = ΑΖ^2 : ΑΖΘ (Εὐκλ. 5, 19). Εἶναι δὲ τὸ μὲν ΑΖΘ = ΒΥΖ (θ. 11), τὸ δὲ ΗΟΨΜ = ΚΟΡΤ (θ. 12)· εἶναι ἄρα ΑΖ^2 : ΒΖΥ = ΝΟ x ΟΗ : ΚΟΡΤ. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ τρίγωνον ΒΥΖ : ΒΖ^2, τουτέστι (1, 39 . 38) τρίγ. ΒΥΖ : ΒΖ x ΖΔ = ΚΟΡΤ : ΚΟ x ΟΩ (θ. 20)· δι' ἴσου ἄρα (διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) (Εὐκλ. 5, 22), εἶναι ΑΖ^2 : ΒΖ x ΖΔ = ΝΟxΟΗ : ΚΟ x ΟΩ. **Καὶ** ἀνάπαλιν (Εὐκλ. 5, 7 πόρ.), εἶναι ὡς τὸ ΒΖ x ΖΔ : ΖΑ^2 = ΚΟ x ΟΩ : ΝΟ x ΟΗ.

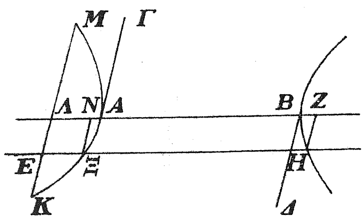
22

Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ἐφάπτωνται τῶν ἀντικειμένων, ἀχθῶσι δὲ εὐθεῖαί τινες τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς, ἡ μὲν παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παράλληλος πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, θὰ εἶναι ὡς ὁ πλάγιος ἄξων ὁ ἑνώνων τὰ σημεῖα ἐπαφῶν πρὸς τὴν παράμετρον, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τοῦ σημείου συναντήσεως, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ σημείου συναντήσεως.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΔ ἔστωσαν παράλληλοι, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ. Ἂς διαχθῶσι δὲ ἡ μὲν ΕΞΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΚΕΛΜ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς ἡ ΑΒ: παράμετρον = ΗΕ x ΕΞ : ΚΕ x ΕΜ.

Ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων Η, Ξ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ αἱ ΞΝ, ΗΖ.

ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν παράλληλοί εἰσι, διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΚΛ, ΞΝ, ΗΖ· ἔσται οὖν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευράν, τό τε ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΝΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΕ. ἔστιν ἄρα, ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΚΛ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΒΝΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΛΝ· ἴση γὰρ ἡ ΝΑ τῇ ΒΖ· πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΛΕ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΝ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΕΜ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΖΛΝ τῷ ὑπὸ ΗΕΞ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ τοῦ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ.



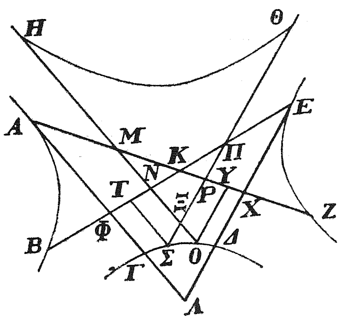
κγ'

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τῶν κατ' ἐναντίον τομῶν ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν ἐπὶ μιᾶς, ἧς ἔτυχον, τομῆς, ἀχθῶσι δέ τινες παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς ἑτέρας ἀντικειμένας, ἔσται,
H366 ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, Διότι, ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν, εἶναι παράλληλοι, καὶ εἶναι διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΚΛ, ΞΝ, ΗΖ (2, 31)· θὰ εἶναι λοιπόν, ὡς ἡ ΑΒ : παράμετρον (2, 31) = ΒΛ x ΛΑ : ΛΚ^2 = ΒΝ x ΝΑ : ΝΞ^2 = ΒΝ x ΝΑ : ΛΕ^2 (Εὐκλ. 1, 34). Εἶναι ἄρα, ὡς ὅλον τὸ ΒΛ x ΛΑ πρὸς ὅλον τὸ ΚΛ^2, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΒΝ x ΝΑ, τουτέστι τὸ ΖΑ x ΑΝ· διότι εἶναι ἡ ΝΑ = ΒΖ (1, 21)· πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΛΕ^2· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΖΛ x ΛΝ (Πάππου λῆμμα 4) πρὸς τὸ ὑπόλοιπον (1, 47 . Εὐκλ. 2, 5) ΚΕ x ΕΜ = ΑΒ : παράμετρον. Εἶναι δὲ ΖΛ x ΛΝ = ΗΕ x ΕΞ (Εὐκλ. 1, 34)· εἶναι ἄρα ὡς ὁ πλάγιος ἄξων ΑΒ : παράμετρον = ΗΕ x ΕΞ : ΚΕ x ΕΜ.

23

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, εἰς τὰς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένας, ἐφαπτόμεναι δύο ἀπέναντι τομῶν συναντῶνται ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐκ τούτων, ὡς ἔτυχε, ἀχθῶσι δέ τινες παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς ἄλλας ἀντικειμένας, θὰ εἶναι, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἐφαπτομένων μεταξύ των, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τοῦ σημείου συναντήσεως, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.



Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, *ΗΘ, κέντρον δὲ αὐτῶν τὸ Κ, καὶ τῶν ΑΒ, ΕΖ τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΦΓΛ, ΕΧΔΛ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΛ ἤχθω ἡ ΗΜΝΞΟ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΕΛ ἡ ΘΠΡΞΣ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.*

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Σ παρὰ μὲν τὴν ΑΛ ἡ ΣΤ, παρὰ δὲ τὴν ΕΛ ἀπὸ τοῦ Ο ἡ ΟΥ. ἐπεὶ οὖν συζυγῶν ἀντικειμένων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ διάμετρός ἐστιν ἡ ΒΕ, καὶ ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ ΕΛ, καὶ παρ' αὐτὴν ἧκται ἡ ΘΣ, ἴση ἐστὶν ἡ ΘΠ τῇ ΠΣ, καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΗΜ τῇ ΜΟ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΦΛ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΠΣ πρὸς τὸ ΠΤΣ καὶ τὸ ἀπὸ ΠΞ πρὸς τὸ ΠΝΞ, καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΤΝΞΣ τετράπλευρόν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΦΛΕ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΦΛ τρίγωνον τῷ ΑΛΧ, τὸ δὲ ΤΝΞΣ τετράπλευρον τῷ ΞΡΥΟ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΑΛΧ, τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΞΟΥΡ τετράπλευρον. ἔστι δέ, ὡς τὸ ΑΧΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ, τὸ H368 *ΞΡΥΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ, τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.*

κδ'

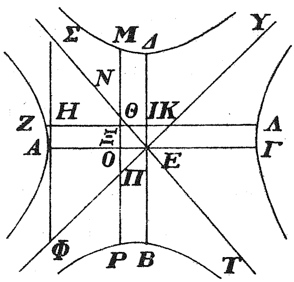
Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἀπὸ τοῦ κέντρου διαχθῶσι πρὸς τὰς τομὰς δύο εὐθεῖαι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν πλαγία διάμετρος, ἡ δὲ ὀρθία, ἀχθῶσι δέ τινες κέντρον δὲ αὐτῶν τὸ Κ, καὶ τῶν τομῶν ΑΒ, ΕΖ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΦΓΛ, ΕΧΔΛ ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Λ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΚ, ΕΚ καὶ ἂς ἐκβληθῶσι μέχρι τῶν Β, Ζ καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΑΛ παράλληλος ἡ ΗΜΝΞΟ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΕΛ παράλληλος ἡ ΘΠΡΞΣ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ ΕΛ^2 : ΛΑ^2 = ΘΞ x ΞΣ : ΗΞ x ΞΟ.

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ πρὸς μὲν τὴν ΑΛ παράλληλος ἡ ΣΤ, πρὸς δὲ τὴν ΕΛ, ἀπὸ τοῦ Ο, παράλληλος ἡ ΟΥ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΕ εἶναι διάμετρος τῶν συζυγῶν ἀντικειμένων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, καὶ ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ ΕΛ, καὶ ἤχθη παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἡ ΘΣ, εἶναι ἡ ΘΠ = ΠΣ καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΗΜ = ΜΟ (2, 20 . 1 όρισ. 5). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ ΕΛ^2 : ΕΦΛ τρίγωνον = ΠΣ^2 : ΠΤΣ τρίγωνον = ΠΞ^2 : ΠΝΞ τριγ. (Εὐκλ. 6, 19 . 5, 16), καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΘΞ x ΞΣ : ΤΝΞΣ τετράπλευρον = ΕΛ^2 : ΦΛΕ τρίγωνον (Εὐκλ. 5, 19). Εἶναι δὲ τὸ μὲν τρίγωνον ΕΦΛ = ΑΛΧ (θ. 4), τὸ δὲ τετράπλευρον ΤΝΞΣ = ΞΡΥΟ· εἶναι ἄρα, ὡς τὸ ΕΛ^2 : ΑΛΧ = ΘΞ x ΞΣ : τετράπλευρον ΞΟΥΡ. Εἶναι δέ, ὡς τὸ τρίγωνον ΑΧΛ : ΑΛ^2 = ΞΡΥΟ : ΗΞ x ΞΟ· δι' ἴσου ἄρα (διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) (Εὐκλ. 5, 22) εἶναι, ὡς τὸ ΕΛ^2 : ΑΛ^2 = ΘΞ x ΞΣ : ΗΞ x ΞΟ.

24

Ἐὰν εἰς τὰς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένας διαχθῶσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὰς τομὰς δύο εὐθεῖαι καὶ ἡ μὲν ἐξ αὐτῶν λέγηται πλαγία διάμετρος (πλάγιος ἄξων), ἡ δὲ ὀρθία διάμετρος (ὀρθὸς παρὰ τὰς δύο διαμέτρους συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς, ἡ δὲ σύμπτωσις ᾖ τῶν εὐθειῶν ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τεσσάρων τομῶν, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον, ἴσον ἔσται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὧν κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε διήχθωσαν ἥ τε ΑΕΓ πλαγία καὶ ἡ ΔΕΒ ὀρθία, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΔΒ ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘ ΙΚΛ, ΜΝΞΟΠΡ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ξ· ἔστω δὲ πρότερον τὸ Ξ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΦ γωνίας ἢ τῆς ὑπὸ ΥΕΤ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ ΜΞΡ, ὃν τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ.



ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΣΕΤ, ΥΕΦ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΣΗΑΦ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΣΑΦ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΕ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΣΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.
H370 *τὸ δὲ ὑπὸ ΣΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ τῆς ΣΑ πρὸς ΑΕ καὶ τοῦ τῆς ΦΑ πρὸς ΑΕ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΣΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΘ, ὡς δὲ ἡ ΦΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΠΞ πρὸς ΞΚ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΝΞ πρὸς ΞΘ καὶ τοῦ τῆς ΠΞ*

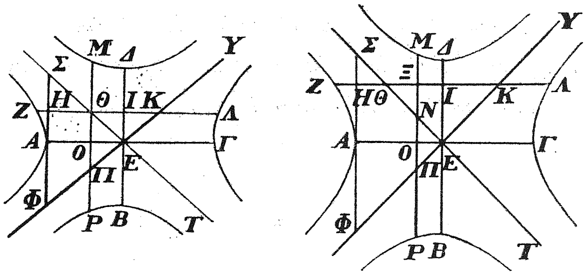
ἄξων), ἀχθῶσι δὲ μερικαὶ παράλληλοι πρὸς τὰς δύο διαμέτρους συναντώμεναι μεταξύ των καὶ πρὸς τὰς τομάς, τὸ δὲ σημεῖον συναντήσεως τῶν εὐθειῶν νὰ εὑρίσκηται εἰς τὸν μεταξὺ τῶν τεσσάρων τομῶν τόπον, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν πλαγίαν διάμετρον μετὰ τοῦ ὀρθογωνίου, πρὸς τὸ ὁποῖον ἔχει λόγον τὸ ὀρθογώνιον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ὀρθίαν διάμετρον (ὀρθὸν ἄξονα) ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ὀρθίας διαμέτρου πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς πλαγίας διαμέτρου, θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς πλαγίας διαμέτρου.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, τῶν ὁποίων κέντρον εἶναι τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἂς διαχθῶσιν καὶ ἡ πλαγία διάμετρος ΑΕΓ καὶ ὁ ὀρθὸς ἄξων ΔΕΒ, καὶ παραλλήλως πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΒ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΖΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΠΡ συναντώμεναι μεταξύ των κατὰ τὸ σημεῖον Ξ· ἔστω δὲ προηγουμένως τὸ Ξ ἐντὸς τῆς γωνίας ΣΕΦ ἢ ἐντὸς τῆς γωνίας ΥΕΤ. Λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΖΞ x ΞΛ μετὰ (+) τοῦ ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ὁποῖον ἔχει λόγον τὸ ΜΞ x ΞΡ, ὃν ἔχει τὸ $ΔΒ^2 : ΑΓ^2$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $2ΑΕ^2$.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΣΕΤ, ΥΕΦ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΣΗΑΦ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $ΣΑ \times ΑΦ = ΔΕ^2$ (1, 56 . 2, 1), θὰ εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $ΣΑ \times ΑΦ : ΕΑ^2 = ΔΕ^2 : ΕΑ^2$ (Εὐκλ. 5, 7). Τὸ δὲ $ΣΑ \times ΑΦ : ΑΕ^2 = (ΣΑ : ΑΕ) \times (ΦΑ : ΑΕ)$. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΣΑ : ΑΕ = ΝΞ : ΞΘ$, ὡς δὲ ἡ $ΦΑ : ΑΕ = ΠΞ : ΞΚ$ (Εὐκλ. 6, 4)· εἶναι ἄρα $ΔΕ^2 : ΑΕ^2 = (ΝΞ : ΞΘ) \times (ΠΞ : ΞΚ)$. Εἶναι δὲ καὶ πρὸς ΞΚ. σύγκειται δὲ ἐκ τῶν αὐτῶν ὁ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ἀπὸ ΔΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΡΝΜ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΛΘΖ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΠΞΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΡΝΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΘΖ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΠΞΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΡΝΜ τῷ ὑπὸ ΡΞΜ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ καὶ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΕΑ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΚΖΘ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΘΖ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΑΕ.

συμπιπτέτωσαν δὴ αἱ ΖΛ, ΜΡ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων κατὰ τὸ Θ. ἴσον δή ἐστι τὸ ὑπὸ ΖΘΛ τῷ ἀπὸ ΑΕ καὶ τὸ
H372 ὑπὸ ΜΘΡ τῷ ἀπὸ ΔΕ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΜΘΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΘΛ. ὥστε τὸ δὶς ὑπὸ ΖΘΛ ἴσον ζητοῦμεν τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ.

ἔστω δὲ τὸ Ξ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΚ γωνίας ἢ τῆς ὑπὸ ΦΕΤ. ἔσται δὴ ὁμοίως διὰ τὴν συναφὴν τῶν λόγων, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ. τῷ δὲ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τοῦτο $= \Pi\Xi \times \Xi N : K\Xi \times \Xi\Theta$· ὡς ἄρα τὸ $\Delta E^2 : AE^2 = \Pi\Xi \times \Xi N : K\Xi \times \Xi\Theta$. Καὶ ὡς ἄρα τὸ $\Delta E^2 : AE^2 = (\Delta E^2 + \Pi\Xi \times \Xi N) : (AE^2 + K\Xi \times \Xi\Theta)$ (Εὐκλ. 6, 12). Εἶναι δὲ τὸ μὲν $\Delta E^2 = \Pi M \times MN$ (2, 11) $= PN \times NM$ (2, 16), τὸ δὲ $AE^2 = KZ \times Z\Theta = \Lambda\Theta \times \Theta Z$· ὡς ἄρα τὸ $\Delta E^2 : EA^2 = (\Pi\Xi \times \Xi N + PN \times NM) : (K\Xi \times \Xi\Theta + \Lambda\Theta \times \Theta Z)$. Εἶναι δὲ τὸ $\Pi\Xi \times \Xi N + PN \times NM = P\Xi \times \Xi M$ (Πάππου λῆμμα 5, 2)· ὡς ἄρα τὸ $\Delta E^2 : EA^2 = P\Xi \times \Xi M : (K\Xi \times \Xi\Theta + KZ \times Z\Theta)$. Πρέπει λοιπὸν νὰ δειχθῇ,



ὅτι $Z\Xi \times \Xi\Lambda + K\Xi \times \Xi\Theta + KZ \times Z\Theta = 2EA^2$. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τὸ AE^2, τουτέστι τὸ $KZ \times Z\Theta$· ὑπολείπεται ἄρα νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ $K\Xi \times \Xi\Theta + \Lambda\Xi \times \Xi Z = AE^2$. Καὶ πράγματι εἶναι· διότι τὸ $K\Xi \times \Xi\Theta + \Lambda\Xi \times \Xi Z = \Lambda\Theta \times \Theta Z = KZ \times Z\Theta = AE^2$ (Πάππου λῆμμα 5, 1).

Ἂς συναντῶνται λοιπὸν αἱ ΖΛ, ΜΡ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων κατὰ τὸ σημεῖον Θ. Εἶναι λοιπὸν τὸ $Z\Theta \times \Theta\Lambda = AE^2$ καὶ τὸ $M\Theta \times \Theta P = \Delta E^2$·(2, 11 . 16)· εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $\Delta E^2 : EA^2 = M\Theta \times \Theta P : Z\Theta \times \Theta\Lambda$. Ὥστε τὸ $2Z\Theta \times \Theta\Lambda$ ζητοῦμεν νὰ εἶναι ἴσον $2AE^2$. Καὶ πράγματι εἶναι.

Ἔστω δὲ τὸ Ξ ἐντὸς τῆς γωνίας ΣΕΚ ἢ τῆς ΦΕΤ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ὁμοίως, διὰ τὴν συναφὴν τῶν προηγουμένων λόγων, ὡς τὸ $\Delta E^2 : EA^2 = \Pi\Xi \times \Xi N : K\Xi \times \Xi\Theta$. Πρὸς δὲ τὸ $\Delta E^2 =$

ΡΝΜ, τῷ δὲ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΘΖ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΡΝΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΖ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΚΞΘ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς λοιπὴν τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ. δεικτέον ἄρα, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ προσλαβὸν τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΘΛ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ἔλασσον τὸ ὑπὸ ΚΞΘ προσλαβὸν τὴν ὑπεροχὴν ἴσον ἐστὶ τῷ μείζονι τῷ ἀπὸ ΑΕ.

κε´

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ἡ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ταῖς ΑΓ, ΒΔ ἐντὸς μιᾶς τῶν Δ, Β τομῶν, ὡς ὑπόκειται, κατὰ τὸ Ξ.

λέγω, ὅτι τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΟΞΝ, τοῦ πρὸς ὃ H377 *λόγον ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΞΜ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, μεῖζον ἔσται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.*

διὰ γὰρ τὰ αὐτά ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΠΞΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΣΞΛ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΠΜΘ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΕ τῷ ὑπὸ ΛΟΣ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ὑπὸ ΠΜΘ πρὸς τὸ ὑπὸ

ΠΜ x ΜΝ (2, 11) = ΡΝ x ΝΜ (2, 16), πρὸς δὲ τὸ $ΑΕ^2$ = ΛΘ x ΘΖ (2, 11 . 16)· εἶναι ἄρα, ὡς τὸ ΡΝ x ΝΜ : ΛΘ x ΘΖ = ἀφαιρεθὲν τὸ ΠΞ x ΞΝ : τὸ ἀφαιρεθὲν ΚΞ x ΞΘ. Καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΡΞ x ΞΜ : τὴν διαφοράν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ $ΑΕ^2$ — ΚΞ x ΞΘ = $ΔΕ^2$: $ΕΑ^2$ (Εὐκλ. 5, 19). Πρέπει νὰ δειχθῇ ἄρα, ὅτι τὸ ΖΞ x ΞΛ + ($ΑΕ^2$ — ΚΞ x ΞΘ) = $2ΑΕ^2$. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τὸ $ΑΕ^2$ = ΖΘ x ΘΛ· πρέπει ἄρα νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ΚΞ x ΞΘ + ($ΑΕ^2$ — ΚΞ x ΞΘ) = $ΑΕ^2$ (Πάππου λῆμμα 2). Καὶ πράγματι εἶναι· διότι τὸ μικρότερον τὸ ΚΞ x ΞΘ + ($ΑΕ^2$ — ΚΞ x ΞΘ) = πρὸς τὸ μεγαλύτερον, τὸ $ΑΕ^2$.

25

Τῶν αὐτῶν δεδομένων ἔστω, ὅτι ἡ συνάντησις τῶν παραλλήλων πρὸς τὰς ΑΓ, ΒΔ γίνεται ἐντὸς μιᾶς ἐκ τῶν Δ, Β τομῶν, ὡς εἰς τὸ σχῆμα, κατὰ τὸ σημεῖον Ξ.

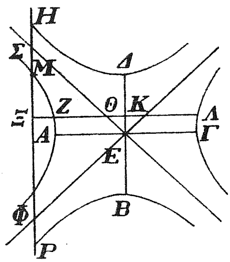
Λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα, τουτέστι τὸ ΟΞ x ΞΝ, τοῦ ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ὁποῖον ἔχει λόγον τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ὀρθὸν ἄξονα, τουτέστι τὸ ΡΞ x ΞΜ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τοῦ ὀρθοῦ ἄξονος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ πλαγίου ἄξονος, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὸ ἥμισυ τοῦ πλαγίου ἄξονος.

Διότι διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι, ὡς τὸ $ΔΕ^2$:$ΕΑ^2$ = ΠΞ x ΞΘ : ΣΞ x ΞΛ. Εἶναι δὲ τὸ μὲν $ΔΕ^2$ = ΠΜ x ΜΘ, τὸ δὲ $ΑΕ^2$ = ΛΟ x ΟΣ (2, 11)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΔΕ^2$: $ΑΕ^2$ = ΠΜ x ΜΘ :

ΛΟΣ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ ΠΞΘ πρὸς ὅλον τὸ ὑπὸ ΛΞΣ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΠΜΘ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΛΟΣ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΣΤΛ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΤΞΚ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ. δεικτέον ἄρα, ὅτι τὸ ὑπὸ ΟΞΝ τοῦ ὑπὸ ΤΞΚ μεῖζόν ἐστι τῷ δίς ἀπὸ ΑΕ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ὑπὸ ΤΞΚ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΟΤΝ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ.

κϛ'

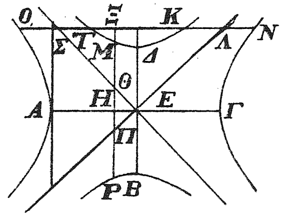
Ἐὰν δὲ ἡ κατὰ τὸ Ξ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ἐντὸς ᾖ μιᾶς τῶν Α, Γ τομῶν, ὡς ὑπόκειται, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι



τὸ ὑπὸ ΛΞΖ, τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν τμημάτων, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΞΗ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, ἔλασσον ἔσται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

ἐπεὶ γὰρ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρό-
H376 *τερόν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΦΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΗ λόγον ἔχει τὸν τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ. δεικτέον ἄρα, ὅτι τὸ ὑπὸ ΛΞΖ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἔλασσόν ἐστι τῷ δὶς*

ΛΟ x ΟΣ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ὅλον τὸ ΠΞ x ΞΘ : ὅλον τὸ ΛΞ x ΞΣ =ἀφαιρεθὲν τὸ ΠΜ x ΜΘ : ἀφαιρεθὲν τὸ ΛΟ x ΟΣ, τουτέστι = ΠΜ : ΜΘ = ΣΤ : ΤΛ (2, 22), καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΡΞ x ΞΜ : τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΤΞ x ΞΚ (Πάππου λῆμμα 5,2 . 2,8) = ΔΕ^2 : ΑΕ^2 (Εὐκλ. 5, 19). Πρέπει νὰ δειχθῇ ἄρα, ὅτι τὸ ΟΞ x ΞΝ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΤΞ x ΞΚ κατὰ τὸ 2ΑΕ^2. (ΟΞ x ΞΝ = ΤΞ x ΞΚ + 2ΑΕ^2). Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινόν, τὸ ΤΞ x ΞΚ· ὑπολείπεται ἄρα νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ΟΤ x ΤΝ = 2ΑΕ^2. Καὶ πράγματι εἶναι.



26

Ἐὰν δὲ ἡ συνάντησις τῶν παραλλήλων κατὰ τὸ σημεῖον Ξ γίνεται ἐντὸς μιᾶς τῶν τομῶν Α, Γ, ὡς εἰς τὸ σχῆμα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα, τουτέστι τὸ ΛΞ x ΞΖ, τοῦ ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ὁποῖον ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἄλλης, τουτέστι τὸ ΡΞ x ΞΗ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τοῦ ὀρθοῦ ἄξονος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ πλαγίου ἄξονος, θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ διπλασίου τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὸ ἥμισυ τοῦ πλαγίου ἄξονος.

Διότι, ἐπειδὴ διὰ τοὺς αὐτοὺς ὡς προηγουμένως λόγους εἶναι, ὡς τὸ ΔΕ^2 : ΕΑ^2 = ΦΞ x ΞΣ : ΚΞ x ΞΘ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΡΞ x ΞΗ : ΚΞ x ΞΘ + ΑΕ^2 = ΔΕ^2 : ΑΕ^2 (Εὐκλ. 5, 12). Πρέπει νὰ δειχθῇ ἄρα, ὅτι τὸ ΛΞ x ΞΖ + 2ΑΕ^2 = ΚΞ x ΞΘ +

ἀπὸ ΑΕ.

κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΛΞΖ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ ἔλασσόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΛΘΖ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΛΘΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΞΘ.

κζ'

Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, καὶ παρ' αὐτὰς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ τῇ γραμμῇ, τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς τετράγωνα προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εἴδη τῷ ὑποκειμένῳ εἴδει πρὸς τῇ ὀρθίᾳ διαμέτρῳ ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου τετραγώνῳ.

ἔστω γὰρ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓΔ, ἧς
H378 κέντρον τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς δύο συζυγεῖς διάμετροι, ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΒΔ ἤχθωσαν αἱ ΝΖΗΘ, ΚΖΛΜ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΖ, ΖΜ εἴδη ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ.

$ΛΕ^2$.

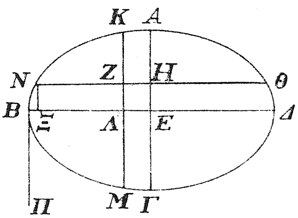
Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινόν, τὸ $ΑΕ^2$· ὑπολείπεται νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ $ΛΞ \times ΞΖ + ΑΕ^2 = ΚΞ \times ΞΘ$ (2, 11.16), τουτέστι $ΛΞ \times ΞΖ = ΚΞ \times ΞΘ - ΛΘ \times ΘΖ$. Καὶ πράγματι εἶναι· διότι τὸ $ΛΘ \times ΘΖ + ΛΞ \times ΞΖ = ΚΞ \times ΞΘ$ (Πάππου λῆμμα 4, πόρισμ. 2, Συν. 2, 16).

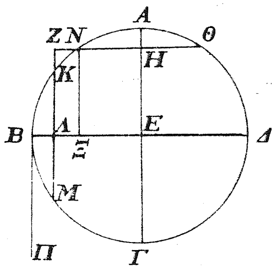
27

Ἐὰν ἀχθῶσι συζυγεῖς διάμετροι ἐλλείψεως ἢ περιφερείας κύκλου, καὶ ὀνομάζηται ἡ μὲν ἐξ αὐτῶν ὀρθία (ὀρθὸς ἄξων), ἡ δὲ πλαγία (πλάγιος ἄξων) καὶ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αὐτῶν συναντώμεναι μεταξύ των καὶ μὲ τὴν τομήν, τὰ τετράγωνα τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς ἠγμένης παραλλήλως πρὸς τὴν πλαγίαν, μεταξὺ τῆς συναντήσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς τομῆς, προσλαβόντα (+) τὰ ὀρθογώνια τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς ἠγμένης παραλλήλως πρὸς τὴν ὀρθίαν, μεταξὺ τῆς συναντήσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς τομῆς, ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα (σχήματα) πρὸς τὸ ὑποκείμενον σχῆμα τὸ παρὰ τὴν ὀρθίαν διάμετρον, θὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς πλαγίας (τοῦ πλαγίου ἄξονος).

Διότι ἔστω ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒΓΔ, τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθῶσι τῆς τομῆς δύο συζυγεῖς διάμετροι, ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ ἂς ἀχθῶσι παραλλήλως πρὸς τὰς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΝΖΗΘ, ΚΖΛΜ. Λέγω, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ΝΖ, ΖΘ σὺν τὰ τετράγωνα τὰ ἔχοντα πλευρὰς τὰς ΚΖ, ΖΜ, τὰ ὁποῖα εἶναι σχήματα ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ παραβληθὲν παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ.

ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ν παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΝΞ· τεταγμένως ἄρα κατῆκται ἐπὶ τὴν ΒΔ. καὶ ἔστω ὀρθία ἡ ΒΠ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΑΓ, ἡ ΑΓ πρὸς ΒΔ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. τὸ δὲ ἀπὸ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος, τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει· καὶ ὡς





ἄρα ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΝΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΞΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΛ, ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, τῷ ὑπὸ ΒΞΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΚΛ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΛΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΘ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὰ ἀπὸ τῶν ΘΖ, ΖΝ τετράγωνα διπλάσιά εἰσι τῶν ἀπὸ ΘΗ, ΗΖ, τουτέστι τῶν ἀπὸ ΝΗ, ΗΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖ, ΖΚ τετράγωνα διπλάσιά
H380 ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛΖ τετραγώνων, καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖΚ εἴδη ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛΖ ὁμοίων εἰδῶν. ἴσα δέ ἐστι τὰ μὲν ἀπὸ ΚΛΖ εἴδη τοῖς ὑπὸ

Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ν παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ ἡ ΝΞ· ἔχει ἄρα αὕτη ἀχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΒΔ (1 ὁρισ. 6). Καὶ ἔστω παράμετρος ἡ ΒΠ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς ἡ ΒΠ : ΑΓ = ΑΓ : ΒΔ (1 ὁρισμ. πρῶτοι 3), θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΠ : ΒΔ = $ΑΓ^2$: $ΒΔ^2$ (Εὐκλ. 5 ὁρισμ. 9). Τὸ δὲ $ΒΔ^2$ = πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ παραβαλλόμενον παρὰ τὴν ΑΓ (1, 15)· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΒΠ : ΒΔ = $ΑΓ^2$ πρὸς τὸ ἐκ τῆς ΑΓ ὀρθογώνιον σχῆμα. Ὡς δὲ τὸ $ΑΓ^2$ πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΑΓ ὀρθογώνιον = $ΝΞ^2$ πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΝΞ ὀρθογώνιον, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβαλλόμενον ὀρθογώνιον σχῆμα (Εὐκλ. 6, 22)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΠΒ:ΒΔ = $ΝΞ^2$ πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΝΞ παραβαλλόμενον ὀρθογώνιον, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΑΓ ὀρθογώνιον. Εἶναι δὲ καί, ὡς ἡ ΠΒ : ΒΔ = $ΝΞ^2$: ΒΞ x ΞΔ (1, 21)· εἶναι ἄρα τὸ παρὰ τὴν ΝΞ παραβαλλόμενον σχῆμα, τουτέστι τὸ παρὰ τὴν ΖΛ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβαλλόμενον (Εὐκλ. 1, 34), ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΞ x ΞΔ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ παρὰ τὴν ΚΛ παραβαλλόμενον σχῆμα, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβαλλόμενον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογ. ΒΛ x ΛΔ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΝΘ ἔχει τμηθῇ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Η (1 ὁρισ. 6), εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ζ, θὰ εἶναι $ΘΖ^2 + ΖΝ^2 = 2(ΘΗ^2 + ΗΖ^2) = 2(ΝΗ^2 + ΗΖ^2)$ (Εὐκλ. 2, 9). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι $ΜΖ^2 + ΖΚ^2 = 2\ (ΚΛ^2 + ΛΖ^2)$, καὶ τὰ παρὰ τὰς ΜΖ, ΖΚ ὅμοια σχήματα πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΑΓ εἶναι διπλάσια τῶν παρὰ τὰς ΚΛ, ΛΖ σχημάτων (Εὐκλ. 6, 22). Εἶναι δὲ ἴσα τὰ παρὰ τὰς ΚΛ, ΛΖ σχήματα πρὸς τὰ ὀρθογώνια ΒΞ x ΞΔ, ΒΛ x ΛΔ, *ΒΞΔ, ΒΛΔ, τὰ δὲ ἀπὸ ΝΗΖ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ ΞΕΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖΜ εἰδῶν ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει διπλάσιά ἐστι τῶν ὑπὸ ΒΞΔ, ΒΛΔ καὶ τῶν ἀπὸ ΞΕΛ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΔ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ξ, τὸ ὑπὸ ΒΞΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΞΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΛΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ· ὥστε τὰ ὑπὸ ΒΞΔ καὶ ὑπὸ ΒΛΔ καὶ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΛΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΒΕ. τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖΜ εἰδῶν ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΓΑ εἴδει διπλάσιά ἐστι τοῦ δὶς ἀπὸ ΒΕ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλάσιον τοῦ δὶς ἀπὸ ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα προσλαβόντα τὰ ἀπὸ ΚΖΜ εἴδη ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΔ.*

κη'

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, ἀχθῶσι δὲ παρ' αὐτὰς δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς, τὰ ἀπὸ τῶν λαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τοH382 μῶν τετράγωνα λόγον ἔχουσιν, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, τὰ δὲ $NH^2 + HZ^2 = ΞE^2 + EΛ^2$ (Εὐκλ. 1, 34)· εἶναι ἄρα $NZ^2 + Θ^2$ + τὰ παρὰ τὰς ΚΖ, ΖΜ σχήματα, τὰ ὅμοια πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΑΓ = διπλάσια τῶν $BΞ \times ΞΔ + BΛ \times ΛΔ + ΞE^2 + EΛ^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΔ ἔχει τμηθῆ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Ε, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ξ, θὰ εἶναι $BΞ \times ΞΔ + ΞE^2 = BE^2$ (Εὐκλ. 2, 5). Ὁμοίως δὲ καὶ $BΛ \times ΛΔ + ΛE^2 = BE^2$· ὥστε $BΞ \times ΞΔ + BΛ \times ΛΔ + ΞE^2 + ΛE^2 = 2BE^2$. Εἶναι ἄρα $NZ^2 + ZΘ^2$ σὺν τὰ ἀπὸ τῶν ΚΖ, ΖΜ σχήματα, τὰ ὅμοια πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΓΑ $= 4BE^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $BΔ^2 = 4BE^2$· εἶναι ἄρα $NZ^2 + ZΘ^2$ + τὰ παρὰ τὰς ΚΖ, ΖΜ ὅμοια σχήματα πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΑΓ $= BΔ^2$.

28

Ἐὰν εἰς τὰς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένας ἀχθῶσιν συζυγεῖς διάμετροι, καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ μὲν λέγηται ὀρθία (ὀρθὸς ἄξων), ἡ δὲ πλαγία (πλάγιος ἄξων), ἀχθῶσι δὲ παραλλήλως πρὸς αὐτὰς δύο εὐθεῖαι συναντώμεναι μεταξύ των καὶ μὲ τὰς τομάς, τὰ τετράγωνα τῶν λαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς ἠγμένης παραλλήλως πρὸς τὴν ὀρθίαν, μεταξὺ τῆς συναντήσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν, πρὸς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς ἠγμένης παραλλήλως πρὸς τὴν πλαγίαν, μεταξὺ τῆς συναντήσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν, ἔχουσι λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς πλαγίας.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι κατὰ συζυγίαν αἱ Α, Β, Γ, Δ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ ἃς καὶ παρ᾽ αὐτὰς ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘΚ, ΛΗΜΝ τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΛΗΝ τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

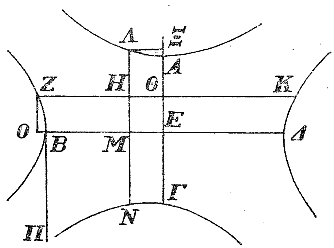
ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ζ, Λ τεταγμένως αἱ ΛΞ, ΖΟ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶ ταῖς ΑΓ, ΒΔ. ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἤχθω ἡ ὀρθία τῆς ΒΔ ἡ ΒΠ· φανερὸν δή, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ καὶ τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΟΔ καὶ τὸ ὑπὸ ΓΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὸ ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΟΖ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΕΘ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΛΞ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΜΕ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΟΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὰ ἀπὸ ΞΕΘ πρὸς τὰ ἀπὸ ΟΕΜ, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΛΜΗ
H384 πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΘΗ. καὶ ἔστι τῶν μὲν ἀπὸ ΛΜΗ διπλάσια τὰ ἀπὸ ΝΗΛ, ὡς δέδεικται, τῶν δὲ ἀπὸ ΖΘΗ τὰ ἀπὸ ΖΗΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὰ ἀπὸ ΛΗΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ.

κθ′

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἡ τῇ ὀρθίᾳ παράλληλος τέμνῃ τὰς ἀσυμπτώτους, τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ᾽ εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ

ἀχθῶσι πρὸς τὰς διαμέτρους αὐτὰς παράλληλοι αἱ ΖΗΘΚ, ΛΗΜΝ τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς. Λέγω, ὅτι $ΛΗ^2 + ΗΝ^2 : ΖΗ^2 + ΗΚ^2 = ΑΓ^2 : ΒΔ^2$.

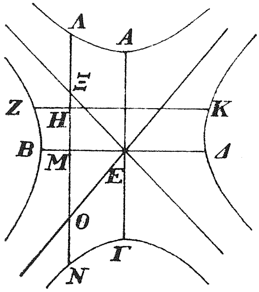
Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Ζ, Λ τεταγμένως αἱ ΛΞ, ΖΟ· εἶναι ἄρα αὗται παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΓ, ΒΔ (1 ὁρισ. 6). Ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ ἡ παράμετρος τῆς ΒΔ ἡ ΒΠ· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι εἶναι ὡς ἡ $ΠΒ : ΒΔ = ΑΓ^2 : ΒΔ^2$ (1 ὁρισ. πρῶτοι 3. Εὐκλ. 5 ὁρισ. 9) $= ΑΕ^2 : ΕΒ^2$ (Εὐκλ. 5, 15) $= ΖΟ^2 : ΒΟ \times ΟΔ$ (1, 21) $= ΓΞ \times ΞΑ : ΛΞ^2$ (1, 56). Εἶναι ἄρα ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως



τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (Εὐκλ. 5, 12)· ὡς ἄρα $ΑΓ^2 : ΒΔ^2 = ΓΞ \times ΞΑ + ΑΕ^2 + ΟΖ^2 : ΔΟ \times ΟΒ + ΒΕ^2 + ΛΞ^2 = ΓΞ \times ΞΑ + ΑΕ^2 + ΕΘ^2 : ΔΟ \times ΟΒ + ΒΕ^2 + ΜΕ^2$ (Εὐκλ. 1, 34). Ἀλλὰ τὸ μὲν $ΓΞ \times ΞΑ + ΑΕ^2 = ΞΕ^2$, τὸ δὲ $ΔΟ \times ΟΒ + ΒΕ^2 = ΟΕ^2$ (Εὐκλ. 2, 6)· ὡς ἄρα $ΑΓ^2 : ΒΔ^2 = ΞΕ^2 + ΕΘ^2 : ΟΕ^2 + ΕΜ^2 = ΛΜ^2 + ΜΗ^2 : ΖΘ^2 + ΘΗ^2$ (Εὐκλ. 1, 34). Καὶ εἶναι, ὡς ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 27 ἐκ τοῦ Εὐκλ. 2, 9,) $2 (ΛΜ^2 + ΜΗ^2) = ΝΗ^2 + ΗΛ^2$ καὶ $2 (ΖΘ^2 + ΘΗ^2) = ΖΗ^2 + ΗΚ^2$· καὶ ὡς ἄρα $ΑΓ^2 : ΒΔ^2 = ΛΗ^2 + ΗΝ^2 : ΖΗ^2 + ΗΚ^2$.

29

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ὀρθίαν τέμνῃ τὰς ἀσυμπτώτους, τὰ τετράγωνα τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς ἡγμένης παραλλήλως πρὸς τὴν ὀρθίαν, *τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἀσυμπτώτων προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετραγώνου πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ἐπ᾽ εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον.*



ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον, ἡ δὲ ΝΛ τεμνέτω τὰς ἀσυμπτώτους κατὰ τὰ Ξ, Ο. δεικτέον, ὅτι τὰ ἀπὸ ΞΗΟ προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τὸ δὶς ἀπὸ ΕΑ [τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ ΟΛΞ], πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΟΝ, τὰ ἀπὸ τῶν ΛΗΝ τῶν ἀπὸ ΞΗΟ ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ ΝΞΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΞΗΟ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΑΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΛΗΝ. τὰ δὲ ἀπὸ
H386 *ΛΗΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ· καὶ τὰ ἀπὸ ΞΗΟ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.*

λ′

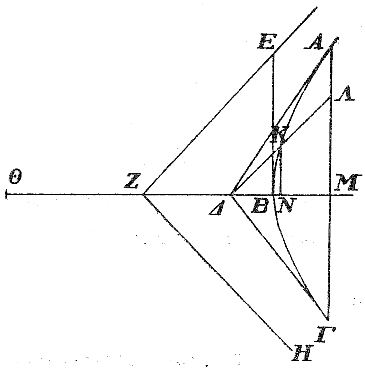
Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἡ μεταξὺ

μεταξὺ τῆς συναντήσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἀσυμπτώτων, σὺν τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τῆς ὀρθίας, πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς ἠγμένης παραλλήλως πρὸς τὴν πλαγίαν, μεταξὺ τῆς συναντήσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν ἔχουσι λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς πλαγίας.

Διότι ἔστωσαν τὰ αὐτὰ δεδομένα ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ δὲ ΝΛ ἂς τέμνῃ τὰς ἀσυμπτώτους κατὰ τὰ Ξ, Ο. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι $\text{ΞΗ}^2 + \text{ΗΟ}^2 + 1/2\ \text{ΑΓ}^2 : \text{ΖΗ}^2 + \text{ΗΚ}^2 = \text{ΑΓ}^2 : \text{ΒΔ}^2 = \text{ΞΗ}^2 + \text{ΗΟ}^2 + 2\text{ΕΑ}^2 : \text{ΖΗ}^2 + \text{ΗΚ}^2$ (σημ. τὸ ἐντὸς ἀγκυλῶν εἰς τὸ κείμενον, ὀβελιστέον, κατὰ Heiberg).

Διότι, ἐπειδὴ ἡ $\text{ΛΞ} = \text{ΟΝ}$ (2, 16), θὰ εἶναι $\text{ΛΗ}^2 + \text{ΗΝ}^2 = \text{ΞΗ}^2 + \text{ΗΟ}^2 + 2\text{ΝΞ} \times \text{ΞΛ}$· εἶναι ἄρα τὰ $\text{ΞΗ}^2 + \text{ΗΟ}^2 + 2\text{ΑΕ}^2 = \text{ΛΗ}^2 + \text{ΗΝ}^2$ (2, 11, 16). Τὰ δὲ $\text{ΛΗ}^2 + \text{ΗΝ}^2 : \text{ΖΗ}^2 + \text{ΗΚ}^2 = \text{ΑΓ}^2 : \text{ΒΔ}^2$ (θ. 28)· εἶναι ἄρα καὶ $\text{ΞΗ}^2 + \text{ΗΟ}^2 + 2\text{ΕΑ}^2 : \text{ΖΗ}^2 + \text{ΗΚ}^2 = \text{ΑΓ}^2 : \text{ΒΔ}^2$.

30



Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι ὑπερβολῆς συναντῶνται, καὶ διὰ μὲν τῶν σημείων ἐπαφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τοῦ σημείου συναντήσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρός τινα τῶν ἀσυμπτώτων, τέμνουσα καὶ τὴν τομὴν (ὑπερβολὴν) καὶ τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, ἡ εὐθεῖα ἡ με-

τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ ἐφαπτόμεναι μὲν αἱ ΑΔΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΔΚΛ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ.

ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΖΔΒΜ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ διὰ τῶν Β, Κ σημείων παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΚΝ· τεταγμένως ἄρα κατηγμέναι εἰσί. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ὡς ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ τῷ ἀπὸ ΔΝ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ
H388 *ἴσον τῷ ἀπὸ ΖΒ, διότι ἡ μὲν ΑΔ ἐφάπτεται, ἡ δὲ ΑΜ κατῆκται· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΖΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ· καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ. ἡ ἄρα ΔΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ν προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. καὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΚΝ, ΑΜ· ἴση ἄρα ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ.*

λα'

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς

ταξὺ τῆς συναντήσεως καὶ τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐπαφῶν θὰ τμηθῇ ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς τὸ μέσον.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ καὶ ἐφαπτόμεναι μὲν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΓ καὶ διὰ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΕ ἡ ΔΚΛ. Λέγω. ὅτι ἡ ΔΚ = ΚΛ.

Διότι ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΔΒΜ καὶ ἂς ἐκβληθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, καὶ ἂς ληφθῇ ΒΖ = ΖΘ, καὶ διὰ τῶν σημείων Β, Κ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ αἱ ΒΕ, ΚΝ· εἶναι ἄρα αὗται τεταγμένως κατηγμέναι (1 ὁρισ. 4). Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΕΖ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΝΚ (Εὐκλ. 1, 29), εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $ΔΝ^2 : ΝΚ^2 = ΒΖ^2 : ΒΕ^2$ (Εὐκλ. 6, 4). Ὡς δὲ τὸ $ΒΖ^2 : ΒΕ^2 =$ ἡ ΘΒ : τὴν παράμετρον (2, 1)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΔΝ^2 : ΝΚ^2 = ΘΒ$: τὴν παράμετρον. Ἀλλ' ὡς ἡ ΘΒ : τὴν παράμετρον $= ΘΝ \times ΝΒ : ΝΚ^2$ (1, 21)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΔΝ^2 : ΝΚ^2 = ΘΝ \times ΝΒ : ΝΚ^2$. Εἶναι ἄρα $ΘΝ \times ΝΒ = ΔΝ^2$ (Εὐκλ. 5, 9). Εἶναι δὲ καὶ τὸ $ΜΖ \times ΖΔ = ΖΒ^2$ (1, 37), διότι ἡ μὲν ΑΔ ἐφάπτεται, ἡ δὲ ΑΜ εἶναι κατηγμένη· ὥστε καὶ τὸ $ΘΝ \times ΝΒ + ΖΒ^2 = ΜΖ \times ΖΔ + ΔΝ^2$. Εἶναι δὲ $ΘΝ \times ΝΒ + ΖΒ^2 = ΖΝ^2$· εἶναι ἄρα καὶ $ΜΖ \times ΖΔ + ΔΝ^2 = ΖΝ^2$. Ἡ ΔΜ ἄρα ἔχει τμηθῇ κατὰ τὸ Ν ἔχουσα ὡς προέκτασιν αὐτῆς τὴν ΔΖ (Εὐκλ. 2, 6). Καὶ εἶναι παράλληλοι αἱ ΚΝ, ΛΜ· εἶναι ἄρα ἡ ΔΚ = ΚΛ (Εὐκλ. 6, 2).

31

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀντικειμένων συναντῶνται, καὶ διὰ μὲν τῶν σημείων ἐπαφῆς ἐκβληθῇ εὐθεῖα, διὰ δὲ τοῦ ση-συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἡ μεταξὺ τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

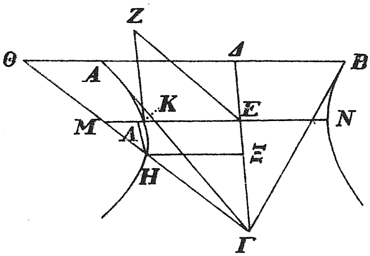
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΓΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΒ ἐκβεβλήσθω, ἀσύμπτωτος δὲ ἔστω ἡ ΖΕ, καὶ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΓΗΘ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΗΘ.

ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ διὰ τῶν Ε, Η παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθωσαν ἡ ΝΕΚΜ καὶ ἡ ΗΞ, διὰ δὲ τῶν Η, Κ παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΚΖ, ΗΛ.

ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΖΕ τῷ ΜΛΗ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ
H390 ΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, τὸ ἀπὸ ΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, δέδεικται τὸ ὑπὸ ΝΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΛΚ τῷ ἀπὸ ΜΛ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΚΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΝΛΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΚΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΗΞ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΜΛ, ΚΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΞ πρὸς τὰ ἀπὸ ΜΛ, ΚΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΓ πρὸς τὰ ἀπὸ ΛΗ, ΚΖ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΞΓ τοῖς ἀπὸ ΗΛ, ΚΖ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΛΗ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΕΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΞ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ ΞΕ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΕΔ. ἡ ἄρα ΓΔ δίχα μὲν τέτμηται κατὰ τὸ Ξ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε. καὶ παράλληλος ἡ ΔΘ τῇ ΗΞ· ἴση ἄρα ἡ ΓΗ τῇ ΗΘ.

μείου συναντήσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον τέμνουσα καὶ τὴν τομὴν καὶ τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς συναντήσεως καὶ τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐπαφῶν θὰ τμηθῇ ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς τὸ μέσον.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΒ ἂς ἐκβληθῇ, ἔστω δὲ ἀσύμπτωτος ἡ ΖΕ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΕ ἡ ΓΗΘ. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΗ = ΗΘ.



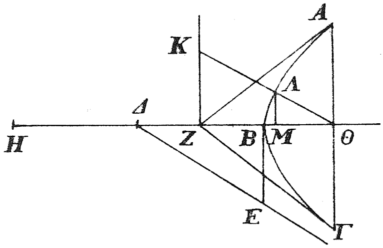
Ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΕ καὶ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Δ, καὶ διὰ τῶν Ε, Η ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΝΕΚΜ καὶ ἡ ΗΞ, διὰ δὲ τῶν Η, Κ παράλληλοι πρὸς τὴν ΓΔ αἱ ΚΖ, ΗΛ.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΚΖΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΜΛΗ (Εὐκλ. 1, 29), εἶναι ὡς τὸ ΚΕ^2 : ΚΖ^2 = ΜΛ^2 : ΛΗ^2 (Εὐκλ. 6, 4). Ὡς δὲ τὸ ΕΚ^2 : ΚΖ^2 ἀπεδείχθη ὅτι εἶναι τὸ ΝΛ x ΛΚ : ΛΗ^2 (θ. 30 ἐκ τοῦ 2, 1 καὶ 1, 21)· εἶναι ἄρα ΝΛ x ΛΚ = ΜΛ^2 (Εὐκλ. 5, 9). Ἂς προστεθῇ κοινὸν τὸ ΚΕ^2· εἶναι ἄρα ΝΛ x ΛΚ + ΚΕ^2 = ΛΕ^2 = ΗΞ^2 = ΜΛ^2 + ΚΕ^2 (Εὐκλ. 2, 6 καὶ Εὐκλ. 1, 34). Ὡς δὲ τὸ ΗΞ^2 : ΜΛ^2 + ΚΕ^2 = ΞΓ^2 : ΛΗ^2 + ΚΖ^2 (Εὐκλ. 6, 4 καὶ 5, 12)· εἶναι ἄρα ΞΓ^2 = ΗΛ^2 + ΚΖ^2. Εἶναι δὲ τὸ μὲν ΛΗ^2 = ΞΕ^2, τὸ δὲ ΚΖ^2 = πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς δευτέρας διαμέτρου (2, 1), τουτέστι ΚΖ^2 = ΓΕ x ΕΔ (1, 8)· εἶναι ἄρα τὸ ΓΞ^2 = ΞΕ^2 + ΓΕ x ΕΔ. Ἡ ΓΔ ἄρα ἔχει τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ξ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ε. Καὶ ἡ ΔΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΞ· εἶναι ἄρα ἡ ΓΗ = ΗΘ.

λβ'

Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ τῆς διχοτομίας τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ἀπολαμβανομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ *ΑΒΓ*, ἧς κέντρον τὸ *Δ*, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ *ΔΕ*, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αἱ *ΑΖ*, *ΖΓ*, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΓΑ* καὶ ἡ *ΖΔ* καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ *Η*, *Θ*· φανερὸν δή, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ *ΑΘ* τῇ *ΘΓ*. ἤχθω δὴ διὰ μὲν τοῦ *Ζ* παρὰ τὴν



H392 *ΑΓ* ἡ *ΖΚ*, διὰ δὲ τοῦ *Θ* παρὰ τὴν *ΔΕ* ἡ *ΘΛΚ*. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ *ΚΛ* τῇ *ΘΛ*.

ἤχθωσαν διὰ τῶν *Β*, *Λ* παρὰ τὴν *ΑΓ* αἱ *ΛΜ*, *ΒΕ*· ἔσται δή, ὡς προδέδεικται, ὡς τὸ ἀπὸ *ΔΒ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΒΕ*, τό τε ἀπὸ *ΘΜ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΜΛ* καὶ τὸ ὑπὸ *ΒΜΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΜΛ*· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ *ΗΜΒ* τῷ ἀπὸ *ΜΘ*. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ *ΘΔΖ* ἴσον τῷ ἀπὸ *ΔΒ*, διότι ἐφάπτεται ἡ *ΑΖ*, καὶ κατῆκται ἡ *ΑΘ*· τὸ ἄρα ὑπὸ *ΗΜΒ* μετὰ τοῦ ἀπὸ *ΔΒ*, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ *ΔΜ*, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ *ΘΔΖ* μετὰ τοῦ ἀπὸ *ΜΘ*. δίχα ἄρα τέτμηται ἡ *ΖΘ* κατὰ τὸ *Μ* προσκειμένην ἔχουσα τὴν *ΔΖ*. καί εἰσι παράλληλοι αἱ *ΚΖ*, *ΛΜ*· ἴση ἄρα ἡ *ΚΛ* τῇ *ΛΘ*.

32

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι ὑπερβολῆς συναντῶνται, καὶ διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς ἐκβληθῇ εὐθεῖα, διὰ δὲ τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, διὰ δὲ τοῦ μέσου τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐπαφῶν ἀχθῇ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη μεταξὺ τοῦ σημείου τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου θὰ τμηθῇ ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς τὸ μέσον.

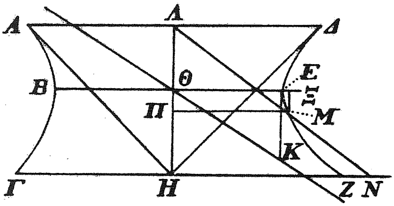
Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι τὸ Δ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἂς ἐφάπτωνται αἱ ΑΖ, ΖΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΑ καὶ ἡ ΖΔ καὶ ἂς ἐκβληθῇ αὕτη μέχρι τῶν Η, Θ· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι ἡ ΑΘ $=$ ΘΓ (2, 30). Ἂς ἀχθῇ τώρα διὰ μὲν τοῦ Ζ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ΖΚ, διὰ δὲ τοῦ Θ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ ἡ ΘΛΚ. Λέγω, ὅτι ἡ ΚΛ $=$ ΘΛ.

Ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν Β, Λ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ αἱ ΛΜ, ΒΕ· θὰ εἶναι λοιπόν, ὡς ἔχει προαποδειχθῇ, ὡς τὸ $\Delta B^2 : BE^2 = \Theta M^2 : M\Lambda^2$ (Εὐκλ. 5, 9) $= BM \times MH : M\Lambda^2$· εἶναι ἄρα $HM \times MB = M\Theta^2$ (Εὐκλ. 5, 9). Εἶναι δὲ καὶ τὸ $\Theta\Delta \times \Delta Z = \Delta B^2$, διότι ἡ ΑΖ ἐφάπτεται, καὶ ἡ ΑΘ εἶναι κατηγμένη (1, 37)· εἶναι ἄρα τὸ $HM \times MB + \Delta B^2 = \Theta\Delta \times \Delta Z + M\Theta^2 = \Delta M^2$ (Εὐκλ. 2, 6). Ἡ ΖΘ ἄρα ἔχει τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Μ ἔχουσα προέκτασιν τὴν ΔΖ (Εὐκλ. 2, 6). Καὶ εἶναι παράλληλοι αἱ ΚΖ, ΛΜ· εἶναι ἄρα ἡ ΚΛ $=$ ΛΘ (Εὐκλ. 6, 2).

λγ′

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ τῆς διχοτομίας τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων συμπίπτουσα τῇ τομῇ καὶ τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ παραλλήλῳ, ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ὑπὸ τῆς τομῆς δίχα διαιρεθήσεται.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΗ, ΔΗ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΚΘ, καὶ



ἐπεζεύχθω ἡ ΘΗ καὶ ἐκβεβλήσθω, ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ ΑΛΔ· H394 *φανερὸν δή, ὅτι δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Λ. ἤχθωσαν δὴ διὰ τῶν Η, Θ παρὰ τὴν ΑΔ αἱ ΒΘΕ, ΓΗΖ, παρὰ δὲ τὴν ΘΚ διὰ τοῦ Λ ἡ ΛΜΝ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΜΝ.*

κατήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ε, Μ παρὰ τὴν ΗΘ αἱ ΕΚ, ΜΞ, διὰ δὲ τοῦ Μ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΜΠ.

ἐπεὶ οὖν διὰ τὰ δεδειγμένα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ὑπὸ ΒΞΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ὑπὸ ΒΞΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΕ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ ΘΞ, πρὸς τὰ ἀπὸ ΚΕ, ΞΜ. τὸ δὲ ἀπὸ ΚΕ ἴσον δέδεικται τῷ ὑπὸ ΗΘΛ, καὶ τὸ ἀπὸ ΞΜ τῷ ἀπὸ ΘΠ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΘΞ, τουτέστι τὸ

33

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀντικειμένων συναντῶνται, καὶ διὰ μὲν τῶν σημείων ἐπαφῆς ἐκβληθῇ εὐθεῖα, διὰ δὲ τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, διὰ δὲ τοῦ μέσου τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐπαφῶν ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς μίαν τῶν ἀσυμπτώτων συναντῶσα τὴν τομὴν καὶ τὴν διὰ τοῦ σημείου συναντήσεως ἠγμένην παράλληλον, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου εὐθεῖα θὰ τμηθῇ ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς τὸ μέσον.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΗ ΔΗ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΚΘ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΗ καὶ ἂς ἐκβληθῇ αὕτη, ἂς ἐπιζευχθῇ δὲ καὶ ἡ ΑΛΔ· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι αὕτη τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Λ (2, 30). Ἂς ἀχθῶσι τώρα διὰ τῶν Η, Θ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΔ αἱ ΒΘΕ, ΓΗΖ, παράλληλος δὲ πρὸς τὴν ΘΚ διὰ τοῦ Λ ἡ ΛΜΝ. Λέγω, ὅτι ἡ ΛΜ $=$ ΜΝ.

Διότι ἂς καταχθῶσιν ἀπὸ τῶν Ε, Μ παραλλήλως πρὸς τὴν ΗΘ αἱ ΕΚ, ΜΞ, διὰ δὲ τοῦ Μ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΜΠ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν διὰ τὰ εἰς τὰ προηγούμενα ἀποδειχθέντα (θ. 30 καὶ 2,1 καὶ 1,21) εἶναι, ὡς τὸ $ΘΕ^2 : ΕΚ^2 = ΒΞ \times ΞΕ : ΞΜ^2$, εἶναι ἄρα ὡς τὸ $ΘΕ^2 : ΕΚ^2 = ΒΞ \times ΞΕ + ΘΕ^2 : ΚΕ^2 + ΞΜ^2$ (Εὐκλ. 5, 12) $= ΘΞ^2 : ΚΕ^2 + ΞΜ^2$ (Εὐκλ. 2, 6). Ἔχει δὲ ἀποδειχθῇ (1, 38 πόρ. καὶ 2,1 καὶ 1 ὁρισ. πρῶτοι 3), ὅτι $ΚΕ^2 = ΗΘ \times ΘΛ$ καὶ $ΞΜ^2 = ΘΠ^2$ (Εὐκλ. 1, 34)· εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $ΘΕ^2 : ΕΚ^2 = ΘΞ^2 : ΛΘ \times ΘΗ + ΘΠ^2 = ΜΠ^2 :$

ἀπὸ ΜΠ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ, τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ, τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΠ τῷ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ. εὐθεῖα ἄρα ἡ ΛΗ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Π, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ. καί εἰσι παράλληλοι αἱ ΜΠ, ΗΝ· ἴση ἄρα ἡ ΛΜ τῇ ΜΝ.

λδʹ

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ᾿ αὐτοῦ εὐθεῖα ἐφάπτηται τῆς τομῆς, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ, ἡ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀγομένη παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς ἴσα διαιρεθήσεται.

H396 *ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ δι᾿ αὐτοῦ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΖΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΔΕ ἡ ΓΑΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.*

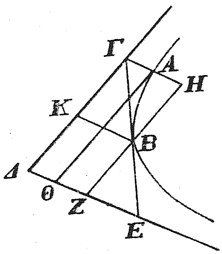
ἤχθω γὰρ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΘ, διὰ δὲ τοῦ Β τῇ ΔΕ ἡ ΒΚ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΔ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΚΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΑΘ, ἴση δὲ ἡ ΒΖ τῇ ΔΚ, τουτέστι τῇ ΓΚ, καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΔΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΓΑ ἴσον ἐστὶ τῷ

ΛΘ x ΘΗ + ΘΠ² (Εὐκλ. 1, 34). Ὡς δὲ τὸ ΘΕ² : ΚΕ² = ΜΠ²: ΠΛ² (Εὐκλ. 6, 4)· ὡς ἄρα τὸ ΜΠ² : ΠΛ² = ΜΠ² : ΗΘ x ΘΛ + ΘΠ². Εἶναι ἄρα τὸ ΛΠ² = ΗΘ x ΘΛ + ΘΠ² (Εὐκλ. 5, 9). Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΛΗ ἔχει τμηθῆ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Π, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Θ (Εὐκλ. 2, 5). Καὶ εἶναι παράλληλοι αἱ ΜΠ, ΗΝ· εἶναι ἄρα ἡ ΛΜ = ΜΝ (Εὐκλ. 6, 2).

34

Ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων ὑπερβολῆς ληφθῇ σημεῖόν τι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ εὐθεῖα ἐφάπτηται τῆς τομῆς, καὶ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον, ἡ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην τῶν ἀσυμπτώτων θὰ διαιρεθῇ ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς ἴσα μέρη.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔ, ΔΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΓΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΖΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ ἡ ΓΑΗ. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΑ = ΑΗ.



Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ μὲν τοῦ Α πρὸς τὴν ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΘ, διὰ δὲ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ ἡ ΒΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΒ = ΒΕ (2, 3), εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΓΚ = ΚΔ καὶ ἡ ΔΖ = ΖΕ (Εὐκλ. 6, 2). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΚΒ x ΒΖ = ΓΑ x ΑΘ (2, 12), εἶναι δὲ ἡ ΒΖ = ΔΚ (Εὐκλ. 1, 34) = ΓΚ, καὶ ἡ ΑΘ = ΔΓ, ὑπὸ ΚΓΗ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΓΗ πρὸς ΑΓ. διπλῆ δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΚ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΗ τῆς ΑΓ. ἴση ἄρα ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.

λε′

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου εὐθεῖά τις ἀχθῇ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἔσται, ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, τὰ τμήματα τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης εὐθείας.

ἔστω γὰρ ἡ ΑΒ ὑπερβολὴ καὶ αἱ ΓΔΕ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ ΓΒΕ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ΘΒ παράλληλος, καὶ διὰ τοῦ Γ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΑΛΖΗ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ τὰ Α, Ζ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΖΛ πρὸς ΑΛ.

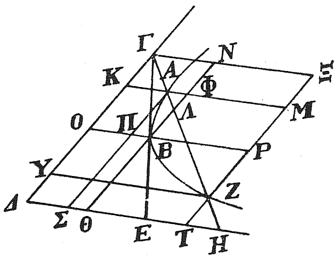
H398 ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Γ, Α, Β, Ζ παρὰ τὴν ΔΕ αἱ ΓΝΞ, ΚΑΜ, ΟΠΒΡ, ΖΥ, διὰ δὲ τῶν Α, Ζ παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΑΠΣ, ΤΖΡΜΞ.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῇ ΤΗ. ἡ δὲ ΚΑ τῇ ΔΣ· καὶ ἡ ΤΗ ἄρα τῇ ΔΣ ἴση. ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ, ἴση καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΓΥ· ὡς ἄρα ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ, ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ. ὡς δὲ ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, ὡς δὲ ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ, τὸ ΘΚ πρὸς ΚΝ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΔ πρὸς τὸ ΔΑ, τὸ ΘΚ πρὸς ΚΝ. ἴσον δὲ τὸ ΑΔ τῷ εἶναι ἄρα τὸ ΔΓ x ΓΑ = ΚΓ x ΓΗ. Εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΔΓ : ΓΚ = ΓΗ : ΑΓ (Εὐκλ. 6, 16). Εἶναι δὲ ΔΓ = 2ΓΚ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΓΗ = 2ΑΓ. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΑ = ΑΗ.

35

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀχθῇ εὐθεῖά τις τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, θὰ εἶναι, ὡς ὅλη ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, οὕτως τὰ τμήματα τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης εὐθείας μεταξύ των.

Διότι ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι ΓΔ, ΔΕ καὶ ἡ ΓΒΕ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ΘΒ παράλληλος καὶ διὰ τοῦ Γ ἂς διαχθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΓΑΛΖΗ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ τὰ σημεῖα Α, Ζ. Λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΖΓ : ΓΑ = ΖΛ : ΑΛ.



Διότι ἂς ἀχθῶσιν διὰ τῶν Γ, Α, Β, Ζ παράλληλοι πρὸς τὴν ΔΕ αἱ ΓΝΞ, ΚΑΜ, ΟΠΒΡ, ΖΥ, διὰ δὲ τῶν Α, Ζ παράλληλοι πρὸς τὴν ΓΔ αἱ ΑΠΣ, ΤΖΡΜΞ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ἡ ΑΓ = ΖΗ (2, 8), εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΚΑ = ΤΗ (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι δὲ ἡ ΚΑ = ΔΣ (Εὐκλ. 1, 34)· καὶ ἡ ΤΗ ἄρα = ΔΣ. Ὥστε καὶ ἡ ΓΚ = ΔΥ (Εὐκλ. 6, 4 .1, 34). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΚ = ΔΥ, εἶναι καὶ ἡ ΔΚ = ΓΥ· ὡς ἄρα ἡ ΔΚ : ΚΓ = ΥΓ : ΓΚ (Εὐκλ. 5, 7). Ὡς δὲ ἡ ΥΓ : ΓΚ = ΖΓ : ΓΑ (Εὐκλ. 6, 4), ὡς δὲ ἡ ΖΓ : ΓΑ = ΜΚ : ΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΜΚ : ΚΑ = τὸ ΜΔ : ΔΑ, ὡς δὲ ἡ ΔΚ : ΚΓ = τὸ ΘΚ : ΚΝ (Εὐκλ. 6, 1)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΔ : ΔΑ = τὸ ΘΚ : ΚΝ. Εἶναι δὲ τὸ ΑΔ =

ΔΒ, τουτέστι τῷ ΟΝ· ἴση γὰρ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ καὶ ἡ ΔΟ τῇ ΟΓ. ὡς ἄρα τὸ ΔΜ πρὸς ΟΝ, τὸ ΚΘ πρὸς ΚΝ, καὶ λοιπὸν τὸ ΜΘ πρὸς λοιπὸν τὸ ΒΚ ἐστιν, ὡς ὅλον τὸ ΔΜ πρὸς ὅλον τὸ ΟΝ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΣ τῷ ΘΟ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΠ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΠ ἴσον ἐστὶ τῷ ΠΘ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΚΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως τὸ ΜΘ πρὸς ΘΑ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, τουτέστιν ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ τὸ ΜΘ πρὸς ΘΑ, ἡ ΜΦ πρὸς ΦΑ, τουτέστιν ἡ ΖΛ πρὸς ΛΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΖΛ πρὸς ΛΑ.

λϛ'

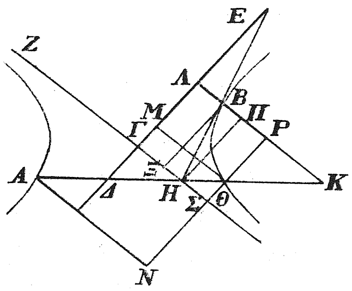
*Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου διαγομένη
εὐθεῖα μήτε τὴν τομὴν τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα μήτε παράλ-
H400 ληλος ᾖ τῇ ἀσυμπτώτῳ, συμπεσεῖται μὲν τῇ ἀντικειμένῃ
τομῇ, ἔσται δέ, ὡς ὅλη πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς
διὰ τῆς ἁφῆς παραλλήλου, ἡ μεταξὺ τῆς ἀντικειμένης καὶ
τῆς ἀσυμπτώτου πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἀσυμπτώτου καὶ τῆς
ἑτέρας τομῆς.*

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΕ, ΖΗ, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΗ σημεῖον εἰλήφθω τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἤχθω ἡ μὲν ΗΒΕ ἐφαπτομένη, ἡ δὲ

ΔΒ (2, 12) = ΘΝ (Εὐκλ. 6, 1)· διότι ἡ ΓΒ = ΒΕ (2, 3) καὶ ἡ ΔΟ = ΟΓ (Εὐκλ. 6, 2). Ὡς ἄρα τὸ ΔΜ : ΟΝ = ΚΘ : ΚΝ, καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΜΘ : τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΒΚ = ὅλον τὸ ΔΜ : ὅλον τὸ ΟΝ (Εὐκλ. 5, 19). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι τὸ ΚΣ = ΘΟ (2, 12), ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΔΠ· εἶναι ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΚΠ = ΠΘ. Ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τὸ ΑΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΚΒ = ΑΘ. Εἶναι ἄρα, ὡς τὸ ΜΔ : ΔΑ = τὸ ΜΘ : ΘΑ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΜΔ : ΔΑ = ΜΚ : ΚΑ (Εὐκλ. 6, 1) = ἡ ΖΓ : ΓΑ, ὡς δὲ τὸ ΜΘ : ΘΑ ἡ ΜΦ : ΦΑ (Εὐκλ. 6, 1) = ΖΛ : ΛΑ (Εὐκλ. 6, 2)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ : ΓΑ = ΖΛ : ΛΑ.

36

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου ἀγομένη εὐθεῖα οὔτε τὴν τομὴν τέμνει κατὰ δύο σημεῖα οὔτε εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον, θὰ συναντήσῃ μὲν τὴν ἀντικειμένην τομήν, θὰ εἶναι δέ, ὡς ὅλη πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀγομένης παραλλήλου, οὕτως ἡ μεταξὺ τῆς ἀντικειμένης καὶ τῆς ἀσυμπτώτου πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἀσυμπτώτου καὶ τῆς ἄλλης τομῆς.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, τῶν ὁποίων κέντρον εἶναι τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΕ, ΖΗ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΓΗ τὸ σημεῖον Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ

ΗΘ μήτε παράλληλος οὖσα τῇ ΓΕ μήτε τὴν τομὴν τέμνουσα κατὰ δύο σημεῖα.

ὅτι μὲν ἡ ΘΗ ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τε ΓΔ καὶ διὰ τοῦτο καὶ τῇ Α τομῇ, δέδεικται. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Λ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΓΗ παράλληλος ἡ ΚΒΛ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΛΚ πρὸς ΚΘ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ.

ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Λ, Θ σημείων παρὰ τὴν ΓΗ αἱ ΘΜ, ΛΝ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η, Θ παρὰ τὴν ΔΕ αἱ ΒΞ, ΗΠ, ΡΘΣΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΛΔ τῇ ΗΘ, ἔστιν, ὡς ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, ὡς δὲ ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ, ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ, τὸ ΡΓ πρὸς ΡΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ, τὸ ΓΡ πρὸς τὸ ΡΗ. καὶ ὡς ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, ὅλον τὸ ΝΛ πρὸς ΓΘ καὶ ΡΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΛΒ τῇ ΒΠ καὶ τὸ ΛΞ τῷ ΒΗ. τὸ δὲ ΛΞ ἴσον τῷ ΓΘ· καὶ τὸ ΒΗ ἄρα ἴσον τῷ ΓΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, οὕτως ὅλον H402 *τὸ ΛΝ πρὸς τὸ ΒΗ καὶ ΡΗ, τουτέστι τὸ ΡΞ. ἴσον δὲ τὸ ΡΞ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΒΓ καὶ τὸ ΜΒ τῷ ΞΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς ΛΘ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, τουτέστιν ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς ΛΘ, ἡ ΝΡ πρὸς ΡΘ, τουτέστιν ἡ ΛΚ πρὸς ΚΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΚ πρὸς ΚΘ, ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ.*

ἂς ἀχθῇ ἡ μὲν ΗΒΕ ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΗΘ οὔτε παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ οὔτε νὰ τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα.

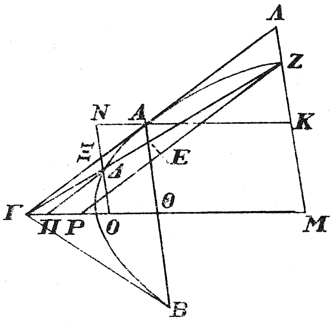
Ὅτι μὲν ἡ ΘΗ ἐκβαλλομένη συναντᾷ καὶ τὴν ΓΔ καὶ διὰ τοῦτο καὶ τὴν τομὴν Α, ἔχει ἀποδειχθῇ (2, 11). Ἂς τὴν συναντᾷ κατὰ τὸ Α, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν ΓΗ ἡ ΚΒΛ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς ἡ ΑΚ : ΚΘ = ΑΗ : ΗΘ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Α, Θ παράλληλοι πρὸς τὴν ΓΗ αἱ ΘΜ, ΑΝ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η, Θ παράλληλοι πρὸς τὴν ΔΕ αἱ ΒΞ, ΗΠ, ΡΘΣΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ἡ ΑΔ = ΗΘ (2, 16), εἶναι, ὡς ἡ ΑΗ:ΗΘ = ΔΘ:ΘΗ (Εὐκλ. 5, 7). Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ:ΗΘ = ΝΣ:ΣΘ (Εὐκλ. 6, 2), ὡς δὲ ἡ ΔΘ:ΘΗ = ΓΣ:ΣΗ (Εὐκλ. 6, 4 . 5, 12, 16)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΣ:ΣΘ = ΓΣ:ΣΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΣ : ΣΘ = τὸ ΝΓ : τὸ ΓΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΣ : ΣΗ = τὸ ΡΓ : ΡΗ (Εὐκλ. 6, 1)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ, τὸ ΓΡ πρὸς τὸ ΡΗ. Καὶ ὡς ὁ ἀριθμητὴς πρὸς τὸν παρονομαστήν, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν (Εὐκλ. 5, 12)· ὡς ἄρα τὸ ΝΓ : ΓΘ = ὅλον τὸ ΝΛ:ΓΘ + ΡΗ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἡ ΕΒ = ΒΗ (2, 3), εἶναι καὶ ἡ ΛΒ = ΒΠ (Εὐκλ. 6, 2 . 1, 34) καὶ τὸ ΛΞ = ΒΗ (Εὐκλ. 6, 1). Τὸ δὲ ΛΞ = ΓΘ (2, 12)· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΒΗ = ΓΘ. Εἶναι ἄρα, ὡς τὸ ΝΓ : ΓΘ = ὅλον τὸ ΛΝ : ΒΗ + ΡΗ = ΛΝ : ΡΞ. Εἶναι δὲ τὸ ΡΞ = ΛΘ, ἐπειδὴ καὶ τὸ ΓΘ = ΒΓ (2, 12) καὶ τὸ ΜΒ = ΞΘ. Εἶναι ἄρα, ὡς τὸ ΝΓ : ΓΘ = ΝΛ : ΛΘ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΝΓ : ΓΘ = ἡ ΝΣ : ΣΘ (Εὐκλ. 6, 1), = ἡ ΑΗ : ΗΘ (Εὐκλ. 6, 2), ὡς δὲ τὸ ΝΛ : ΛΘ = ΝΡ : ΡΘ (Εὐκλ. 6, 1) = ΑΚ : ΚΘ (Εὐκλ. 6, 4 . 5, 12, 16)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΚ : ΚΘ = ΑΗ : ΗΘ.

λζ'

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ ἐπὶ μὲν τὰς ἁφὰς αὐτῶν ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων διαχθῇ τις τέμνουσα τὴν γραμμὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἔσται, ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης.

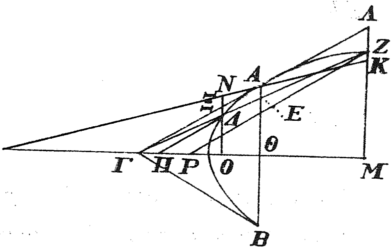
ἔστω κώνου τομὴ ἡ ΑΒ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΓΔΕΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΓΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ.



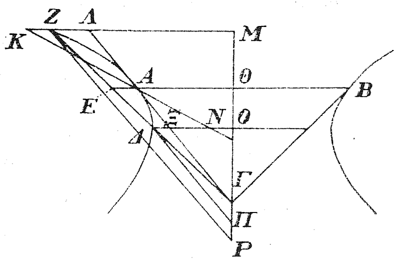
ἤχθωσαν διὰ τῶν Γ, Α διά-
H404 *μετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΘ, ΑΚ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Δ παρὰ τὰς ΑΘ, ΑΓ αἱ ΔΠ, ΖΡ, ΛΖΜ, ΝΔΟ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΖΜ τῇ ΞΔΟ, ἔστιν, ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΛΖ πρὸς ΞΔ καὶ ἡ ΖΜ πρὸς ΔΟ καὶ ἡ ΛΜ πρὸς ΞΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ΛΜΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΓΟ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, τὸ ΖΡΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΛΓΜ πρὸς τὸ ΞΟΓ, τὸ ΖΡΜ πρὸς τὸ ΔΠΟ,*

37

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τομῆς κώνου ἢ περιφερείας κύκλου ἢ τῶν ἀντικειμένων συναντῶνται, καὶ πρὸς μὲν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν αὐτῶν ἀχθῇ εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων διαχθῇ εὐθεῖά τις τέμνουσα τὴν γραμμὴν κατὰ δύο σημεῖα, θὰ εἶναι, ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐπαφῶν μεταξύ των.



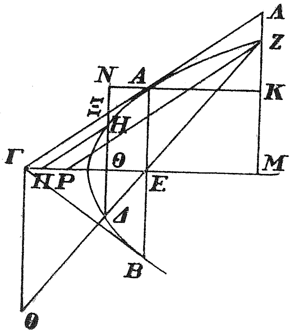
Ἔστω τομὴ κώνου ἡ ΑΒ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ, καὶ ἂς διαχθῇ ἡ ΓΔΕΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς ἡ ΓΖ : ΓΔ = ΖΕ : ΕΔ.



Ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν Γ, Α διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΘ, ΑΚ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Δ παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΘ, ΑΓ αἱ ΔΠ, ΖΡ, ΛΖΜ, ΝΔΟ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΛΖΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΞΔΟ, εἶναι, ὡς ἡ ΖΓ : ΓΔ = ΛΖ : ΞΔ (Εὐκλ. 6, 4) = ΖΜ : ΔΟ = ΛΜ : ΞΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΛΜ² : ΞΟ² = ΖΜ² : ΔΟ². Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΛΜ² : ΞΟ² = τὸ τρίγωνον ΛΜΓ : τρίγ. ΞΓΟ (Εὐκλ. 6, 19), ὡς δὲ τὸ ΖΜ² : ΟΔ² = τρίγωνον ΖΡΜ : τρίγ. ΔΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΛΓΜ : ΞΟΓ = ΖΡΜ : ΔΠΟ, καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ καὶ λοιπὸν τὸ $ΛΓΡΖ$ τετράπλευρον πρὸς λοιπὸν τὸ $ΞΓΠΔ$. ἴσον δὲ τὸ μὲν $ΛΓΡΖ$ τετράπλευρον τῷ $ΛΛΚ$ τριγώνῳ, τὸ δὲ $ΞΓΠΔ$ τῷ $ΑΝΞ$· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ $ΛΜ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΞΟ$, τὸ $ΛΛΚ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΝΞ$. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ $ΛΜ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΞΟ$, τὸ ἀπὸ $ΖΓ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΓΔ$, ὡς δὲ τὸ $ΛΛΚ$ πρὸς τὸ $ΑΝΞ$, τὸ ἀπὸ $ΛΑ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΑΞ$ καὶ τὸ ἀπὸ $ΖΕ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΕΔ$· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ $ΖΓ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΓΔ$, τὸ ἀπὸ $ΖΕ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΕΔ$. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ $ΖΓ$ πρὸς $ΓΔ$, ἡ $ΖΕ$ πρὸς $ΔΕ$.

λη'

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ διὰ μέσης τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα καὶ τὴν διὰ τῆς συμπτώσεως παράλληλον τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ, ἔσται, ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς H406 τομῆς καὶ τῆς παραλλήλου, τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένης.

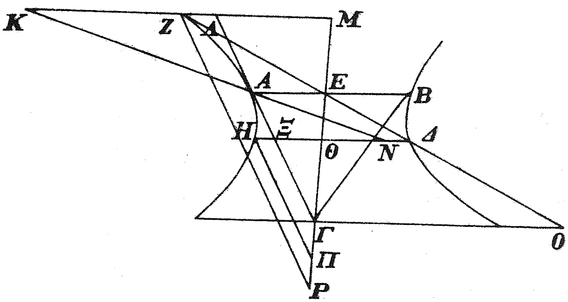


ἔστω ἡ $ΑΒ$ τομὴ καὶ αἱ $ΑΓ$, $ΒΓ$ ἐφαπτόμεναι καὶ ἡ $ΑΒ$ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα καὶ αἱ $ΑΝ$, $ΓΜ$ διάμετροι· φανερὸν δή, ὅτι ἡ $ΑΒ$ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ $Ε$.

τετράγωνον ΛΓΡΖ : τὸ ὑπόλοιπον ΞΓΠΔ (Εὐκλ. 5, 19). Εἶναι δὲ τὸ μὲν τετράπλευρον ΛΓΡΖ = τρίγωνον ΑΛΚ, τὸ δὲ ΞΓΠΔ = ΑΝΞ (2, 30 . 2, 5, 6 . 3, 2, 11)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΛΜ^2 : ΞΟ^2 =$ ΑΛΚ τρίγωνον : ΑΝΞ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΛΜ^2 : ΞΟ^2 = ΖΓ^2 : ΓΔ^2$ ὡς δὲ τὸ ΑΛΚ : ΑΝΞ $= ΛΑ^2 : ΑΞ^2$ (Εὐκλ. 5, 19) $= ΖΕ^2 : ΕΔ^2$ (Εὐκλ. 6, 2)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΖΓ^2 : ΓΔ^2 = ΖΕ^2 : ΕΔ^2$. Καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΖΓ : ΓΔ = ΖΕ : ΔΕ.

38

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν διὰ τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, καὶ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐ-



παφῶν ἀφοῦ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνῃ αὕτη τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα καὶ τὴν διὰ τοῦ σημείου συναντήσεως παράλληλον πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, θὰ εἶναι, ὡς ὅλη ἡ διαχθεῖσα πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς παραλλήλου, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐπαφῶν.

Ἔστω ἡ τομὴ ΑΒ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΒΓ καὶ ἡ ΑΒ ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα ἐπαφῶν καὶ διάμετροι αἱ ΑΝ, ΓΜ· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι ἡ ΑΒ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε.

ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ AB παράλληλος ἡ ΓO, καὶ διήχθω διὰ τοῦ E ἡ $ZE\Delta O$. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ZO πρὸς $O\Delta$, ἡ ZE πρὸς $E\Delta$.

ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Z, Δ παρὰ τὴν AB αἱ ΛZKM, $\Delta\Theta H\Xi N$, διὰ δὲ τῶν Z, H παρὰ τὴν $\Lambda\Gamma$ αἱ ZP, $H\Pi$. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΛM πρὸς τὸ ἀπὸ $\Xi\Theta$, τὸ ἀπὸ ΛA πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Xi$. καὶ ἔστιν, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛM πρὸς τὸ ἀπὸ $\Xi\Theta$, τὸ ἀπὸ $\Lambda\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Gamma\Xi$ καὶ τὸ ἀπὸ ZO πρὸς τὸ ἀπὸ $O\Delta$, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΛA πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Xi$, τὸ ἀπὸ ZE πρὸς τὸ ἀπὸ $E\Delta$· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ZO πρὸς τὸ ἀπὸ $O\Delta$, τὸ ἀπὸ ZE πρὸς τὸ ἀπὸ $E\Delta$, καὶ ὡς ἡ ZO πρὸς $O\Delta$, ἡ ZE πρὸς $E\Delta$.

λθ′

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς
H408 συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται, ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ A, B, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ $A\Delta$, ΔB, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ AB, $\Gamma\Delta$ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ $E\Delta ZH$. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ EH πρὸς HZ, ἡ $E\Delta$ πρὸς ΔZ.

ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $A\Gamma$ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ διὰ τῶν E, Z

Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΒ παράλληλος ἡ ΓΟ, καὶ ἂς διαχθῇ διὰ τοῦ Ε ἡ ΖΕΔΟ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς ἡ ΖΟ : ΟΔ = ΖΕ : ΕΔ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Ζ, Δ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ αἱ ΛΖΚΜ, ΔΘΗΞΝ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Η παράλληλοι πρὸς τὴν ΛΓ αἱ ΖΡ, ΗΠ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ὡς εἰς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ $ΛΜ^2 : ΞΘ^2 = ΛΑ^2 : ΑΞ^2$ (θ. 37). Καὶ εἶναι, ὡς μὲν τὸ $ΛΜ^2 : ΞΘ^2 = ΛΓ^2 : ΓΞ^2$ (Εὐκλ. 6, 4) = $ΖΟ^2 : ΟΔ^2$ (Εὐκλ. 6, 2), ὡς δὲ τὸ $ΛΑ^2 : ΑΞ^2 = ΖΕ^2 : ΕΔ^2$ (Εὐκλ. 6, 2)· ὡς ἄρα τὸ $ΖΟ^2 : ΟΔ^2 = ΖΕ^2 : ΕΔ^2$ καὶ ὡς ἡ ΖΟ : ΟΔ = ΖΕ : ΕΔ.

39

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀντικειμένων συναντῶνται, καὶ διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς ἐκβληθῇ εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀφοῦ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, θὰ εἶναι ὡς ὅλη ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, τῶν ὁποίων κέντρον εἶναι τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΓΔ ἂς ἐκβληθῶσι, καὶ διὰ τοῦ Δ ἂς διαχθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΕΔΖΗ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς ἡ ΕΗ : ΗΖ = ΕΔ : ΔΖ.

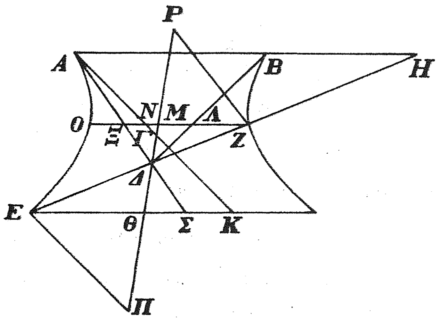
Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΓ καὶ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ ἂς *παρὰ μὲν τὴν ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΕΘΣ, ΖΛΜΝΞΟ, παρὰ δὲ τὴν ΑΔ αἱ ΕΠ, ΖΡ.*

ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ ΖΞ, ΕΣ καὶ διηγμέναι εἰς αὐτὰς αἱ ΕΖ, ΞΣ, ΘΜ, ἔστιν, ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΣ, ἡ ΖΜ πρὸς ΜΞ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΖΜ, ἡ ΘΣ πρὸς ΞΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΖ, τὸ ἀπὸ ΘΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΕΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΖ, τὸ ΕΘΠ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΡΜ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ, τὸ ΔΘΣ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΜΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΘΠ πρὸς τὸ ΖΡΜ, τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΜΔ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΘΠ τοῖς ΑΣΚ, ΘΔΣ, τὸ δὲ ΡΜΖ τοῖς ΑΞΝ, ΔΜΞ· ὡς ἄρα τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΜΔ, τὸ ΑΣΚ μετὰ τοῦ ΘΔΣ πρὸς τὸ ΑΞΝ μετὰ τοῦ ΞΜΔ, καὶ λοιπὸν τὸ ΑΣΚ πρὸς λοιπὸν τὸ ΑΝΞ ἐστιν, ὡς τὸ ΔΣΘ πρὸς τὸ ΔΞΜ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ
H410 *ΑΣΚ πρὸς τὸ ΑΝΞ, τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, ὡς δὲ τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΔΜ, τὸ ἀπὸ ΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΜ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ.*

μʹ

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ ἀπὸ μέσης τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται, ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀχθῶσι πρὸς μὲν τὴν ΑΒ παράλληλοι αἱ ΕΘΣ, ΖΛΜΝΞΟ, πρὸς δὲ τὴν ΑΔ παράλληλοι αἱ ΕΠ, ΖΡ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΖΞ, ΕΣ εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουσι διαχθῇ εἰς αὐτὰς αἱ ΕΖ, ΞΣ, ΘΜ, εἶναι, ὡς ἡ ΕΘ : ΘΣ = ΖΜ : ΜΞ (Εὐκλ. 6, 4). Καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΕΘ : ΖΜ = ΘΣ : ΞΜ (Εὐκλ. 5, 16)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΘΕ^2 : ΜΖ^2 = ΘΣ^2 : ΞΜ^2$. Ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ $ΕΘ^2 : ΜΖ^2$ = τρίγωνον ΕΘΠ : τρίγ. ΖΡΜ, ὡς δὲ τὸ $ΘΣ^2 : ΞΜ^2$ = τρίγωνον ΔΘΣ : τρίγ. ΞΜΔ (Εὐκλ. 6, 19)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΘΠ : ΖΡΜ



= τὸ ΔΘΣ : ΞΜΔ. Εἶναι δὲ τὸ μὲν ΕΘΠ = ΑΣΚ + ΘΔΣ, τὸ δὲ ΡΜΖ = ΑΞΝ + ΔΜΞ (θ. 11)· ὡς ἄρα τὸ ΔΘΣ : ΞΜΔ = ΑΣΚ + ΘΔΣ : ΑΞΝ + ΞΜΔ (Εὐκλ. 5, 19), καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΑΣΚ : τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΑΝΞ = ΔΣΘ : ΔΞΜ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΣΚ : ΑΝΞ $= ΚΑ^2 : ΑΝ^2$ (Εὐκλ. 5, 19) $= ΕΗ^2 : ΖΗ^2$ (Εὐκλ. 6, 2 . 6,4 . 5, 12 . 5, 16), ὡς δὲ τὸ ΔΘΣ : ΞΔΜ $= ΘΔ^2 : ΔΜ^2$ (Εὐκλ. 6, 19) $= ΕΔ^2 : ΔΖ^2$ (Εὐκλ. 6, 4). Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΗ : ΗΖ = ΕΔ : ΔΖ.

40

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν διὰ τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, καὶ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐπαφῶν ἀφοῦ ἀχθῇ εὐθεῖα αὕτη τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, θὰ εἶναι, ὡς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς παραλλήλου καὶ τῆς τομῆς, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ *Α*, *Β*, ὧν κέντρον τὸ *Γ*, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ *ΑΔ*, *ΔΒ*, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΑΒ* καὶ ἡ *ΓΔΕ*· ἴση ἄρα ἡ *ΑΕ* τῇ *ΕΒ*. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ *Δ* παρὰ τὴν *ΑΒ* ἤχθω ἡ *ΖΔΗ*, ἀπὸ δὲ τοῦ *Ε*, ὡς ἔτυχεν, ἡ *ΛΕ*. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ *ΘΛ* πρὸς *ΛΚ*, ἡ *ΘΕ* πρὸς *ΕΚ*.

ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν *Θ*, *Κ* παρὰ μὲν τὴν *ΑΒ* αἱ *ΝΜΘΞ*, *ΚΟΠ*, παρὰ δὲ τὴν *ΑΔ* αἱ *ΘΡ*, *ΚΣ*, καὶ διήχθω ἡ *ΞΑΓΤ*.

ἐπεὶ οὖν εἰς παραλλήλους τὰς *ΞΜ*, *ΚΠ* διηγμέναι εἰσὶν αἱ *ΞΑΥ*, *ΜΑΠ*, ἔστιν, ὡς ἡ *ΞΑ* πρὸς *ΑΥ*, ἡ *ΜΑ* πρὸς *ΑΠ*. H412 ἀλλ' ὡς ἡ *ΞΑ* πρὸς *ΑΥ*, ἡ *ΘΕ* πρὸς *ΕΚ*· ὡς δὲ ἡ *ΘΕ* πρὸς *ΕΚ*, ἡ *ΘΝ* πρὸς *ΚΟ* διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν *ΘΕΝ*, *ΚΕΟ* τριγώνων· ὡς ἄρα ἡ *ΘΝ* πρὸς *ΚΟ*, ἡ *ΜΑ* πρὸς *ΑΠ*· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ *ΘΝ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΚΟ*, τὸ ἀπὸ *ΜΑ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΑΠ*. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ *ΘΝ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΟΚ*, τὸ *ΘΡΝ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΚΣΟ*, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ *ΜΑ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΑΠ*, τὸ *ΞΜΑ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΑΥΠ*· καὶ ὡς ἄρα τὸ *ΘΝΡ* πρὸς τὸ *ΚΟΣ*, τὸ *ΞΜΑ* πρὸς τὸ *ΑΥΠ*. ἴσον δὲ τὸ *ΘΝΡ* τοῖς *ΞΑΜ*, *ΜΝΔ*, τὸ δὲ *ΣΟΚ* τοῖς *ΑΥΠ*, *ΔΟΠ*· καὶ ὡς ἄρα τὸ *ΞΜΑ* μετὰ τοῦ *ΜΝΔ* τριγώνου πρὸς τὸ *ΑΥΠ* τρίγωνον μετὰ τοῦ *ΠΔΟ* τριγώνου, οὕτως τὸ *ΞΜΑ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΠΥΑ* τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ *ΝΜΔ* πρὸς λοιπὸν τὸ *ΔΟΠ* τρίγωνόν ἐστιν, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀλλ' ὡς τὸ *ΞΜΑ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΑΥΠ* τρίγωνον, τὸ ἀπὸ *ΞΑ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΑΥ*, ὡς δὲ τὸ *ΜΔΝ* πρὸς τὸ *ΠΔΟ*, τὸ ἀπὸ *ΜΝ* πρὸς τὸ ὅλη ἡ διαχθεῖσα πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς παραλλήλου καὶ τῆς τομῆς, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐπαφῶν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, τῶν ὁποίων κέντρον εἶναι τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔΕ· εἶναι ἄρα ἡ ΑΕ = ΕΒ (2, 39). Καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΖΔΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε, τυχοῦσα, ἡ ΛΕ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς ἡ ΘΛ : ΛΚ = ΘΕ : ΕΚ.

Ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Θ, Κ πρὸς μὲν τὴν ΑΒ παράλληλοι αἱ ΝΜΘΞ, ΚΟΠ, πρὸς δὲ τὴν ΑΔ παράλληλοι αἱ ΘΡ, ΚΣ, καὶ ἂς διαχθῇ ἡ ΞΑΓΤ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὰς παραλλήλους ΞΜ, ΚΠ διήχθησαν αἱ ΞΑΥ, ΜΑΠ, εἶναι, ὡς ἡ ΞΑ : ΑΥ = ΜΑ : ΑΠ (Εὐκλ. 6, 4). Ἀλλ' ὡς ἡ ΞΑ : ΑΥ = ΘΕ : ΕΚ (Εὐκλ. 6, 2)· ὡς δὲ ἡ ΘΕ : ΕΚ = ΘΝ : ΚΟ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΘΕΝ, ΚΕΟ (Εὐκλ. 6, 4)· ὡς ἄρα ἡ ΘΝ : ΚΟ = ΜΑ : ΑΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΘΝ^2 : ΚΟ^2 = ΜΑ^2 : ΑΠ^2. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΘΝ^2 : ΟΚ^2 = τρίγωνον ΘΡΝ : τρίγ. ΚΣΟ, ὡς δὲ τὸ ΜΑ^2 : ΑΠ^2 = τρίγωνον ΞΜΑ : τρίγ. ΑΥΠ (Εὐκλ. 5, 19)· καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγ. ΘΝΡ : τρίγ. ΚΟΣ = ΞΜΑ : ΑΥΠ. Εἶναι δὲ τὸ ΘΝΡ = ΞΑΜ + ΜΝΔ (θ. 11), τὸ δὲ ΣΟΚ = ΑΥΠ + ΔΟΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγ. ΞΜΑ + τρίγ. ΜΝΔ : τρίγωνον ΑΥΠ + τρίγ. ΠΔΟ = τρίγ. ΞΜΑ : τρίγ. ΠΥΑ· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΝΜΔ : τὸ ὑπόλοιπον τὸ τρίγωνον ΔΟΠ = ὅλον : ὅλον. Ἀλλ' ὡς τὸ τρίγωνον ΞΜΑ : τρίγωνον ΑΥΠ = ΞΑ^2 : ΑΥ^2, ὡς δὲ τὸ ΜΔΝ : ΠΔΟ = ΜΝ^2 : ΠΟ^2

ἀπὸ ΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ, τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ, τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ, ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ.

μα′

Ἐὰν παραβολῆς τρεῖς εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσονται.

H414 *ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔΕ, ΕΖΓ, ΔΒΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ καὶ ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ.*

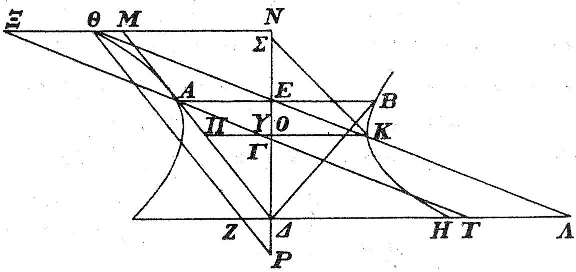
ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Η.

ὅτι μὲν οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Η διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς, φανερόν.

εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ Β ἔρχεται, παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Β ὑπὸ τῆς ΕΗ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἔσται ἡ ΑΔ τῇ ΔΕ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΕ, καὶ φανερὸν τὸ ζητούμενον.

μὴ ἐρχέσθω διὰ τοῦ Β, ἀλλὰ διὰ τοῦ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΚΘΛ· ἐφάψεται ἄρα τῆς τομῆς κατὰ

(Εὐκλ. 5, 19)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΜΝ^2 : ΠΟ^2 = ΞΑ^2 : ΑΥ^2$. Ὡς δὲ τὸ $ΜΝ^2 : ΠΟ^2 = ΝΔ^2 : ΟΔ^2$ (Εὐκλ. 6, 4), ὡς δὲ τὸ $ΞΑ^2 : ΑΥ^2 =$



$ΘΕ^2 : ΕΚ^2$ (Εὐκλ. 6, 2), ὡς δὲ τὸ $ΝΔ^2 : ΔΟ^2 = ΘΛ^2 : ΛΚ^2$ (Εὐκλ. 6, 4 . 6, 2 . 5, 12 . 5, 16)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΘΕ^2 : ΕΚ^2 = ΘΛ^2 : ΛΚ^2$. Εἶναι ἄρα, ὡς ἡ $ΘΕ : ΕΚ = ΘΛ : ΛΚ$.

41

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι παραβολῆς συναντῶνται μεταξύ των, θὰ τέμνωνται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

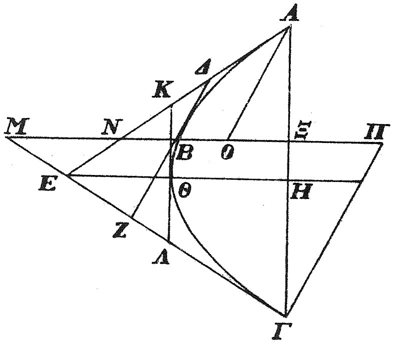
Ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔΕ, ΕΖΓ, ΔΒΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς ἡ $ΓΖ : ΖΕ = ΕΔ : ΔΑ = ΖΒ : ΒΔ$.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΓ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Η.

Ὅτι μὲν λοιπὸν ἡ ἀπὸ τοῦ Ε μέχρι τοῦ Η εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς, εἶναι φανερὸν (2, 29).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν διέρχηται διὰ τοῦ Β, ἡ ΔΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ (2, 5) καὶ θὰ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Β ὑπὸ τῆς ΕΗ (Εὐκλ. 6, 4), καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι ἡ $ΑΔ = ΔΕ$ καὶ ἡ $ΓΖ = ΖΕ$ (1, 35. Εὐκλ. 6, 2), καὶ εἶναι φανερὸν τὸ ζητούμενον.

Ἀλλ' ἂς μὴ διέρχηται διὰ τοῦ Β, ἀλλὰ διὰ τοῦ Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Θ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ΚΘΛ· θὰ ἐφάπτηται *τὸ Θ, καὶ διὰ τὰ εἰρημένα ἴση ἔσται ἡ ΑΚ τῇ ΚΕ καὶ ἡ ΛΓ τῇ ΛΕ. ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Β παρὰ τὴν ΕΗ ἡ ΜΝΒΞ, διὰ δὲ τῶν Α, Γ παρὰ τὴν ΔΖ αἱ ΑΟ, ΓΠ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΒ τῇ ΕΘ, διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ· καὶ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β ἡ ΔΖ· κατηγμέναι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΟ, ΓΠ. καὶ ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΜ, κατηγμένη δὲ ἡ ΓΠ, ἴση ἔσται ἡ ΜΒ τῇ ΒΠ· ὥστε καὶ ἡ ΜΖ*



τῇ ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΖ τῇ ΖΓ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΓ, ἔστιν, ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΖ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΛ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ, ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ, ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ, ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ. ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς ΓΛ, ἡ ΛΓ πρὸς ΓΕ [διπλασία γὰρ ἑκατέρα]·
II416 *δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΞ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΖ, καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΕΓ πρὸς ΕΖ, ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ· διελόντι, ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ. πάλιν ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΝ καὶ κατηγμένη ἡ ΑΟ, ἴση ἐστὶν ἡ ΝΒ τῇ ΒΟ καὶ ἡ ΝΔ τῇ ΔΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΑ· ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΑΚ, ἡ ΝΑ πρὸς ΑΔ· ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ, ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ. ἀλλ' ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ, ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ, ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ, ἡ ΕΑ πρὸς ΑΚ [διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας]· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, ἡ ΕΑ πρὸς ΑΔ· διελόντι, ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ, ἡ*

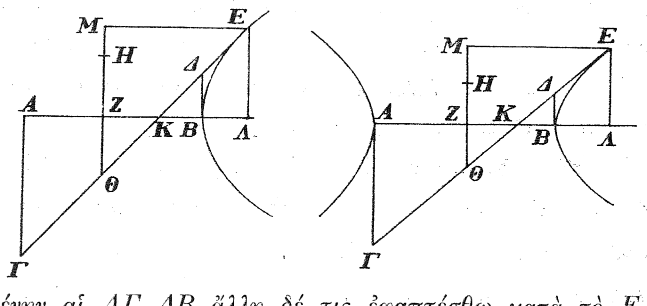
ἄρα τῆς τομῆς κατὰ τὸ Θ (1, 32), καὶ διὰ τὰ λεχθέντα θὰ εἶναι ἡ ΑΚ = ΚΕ καὶ ἡ ΛΓ = ΛΕ. Ἄς ἀχθῇ διὰ μὲν τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ ἡ ΜΝΒΞ, διὰ δὲ τῶν Α, Γ παράλληλοι πρὸς τὴν ΔΖ αἱ ΑΟ, ΓΠ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΜΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΘ, ἡ ΜΒ εἶναι διάμετρος (1, 51 πόρ.)· καὶ ἡ ΔΖ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β· εἶναι ἄρα κατηγμέναι αἱ ΑΟ, ΓΠ (1 ὁρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΜΒ εἶναι διάμετρος, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΜ, κατηγμένη δὲ ἡ ΓΠ, θὰ εἶναι ἡ ΜΒ = ΒΠ (1, 35)· ὥστε καὶ ἡ ΜΖ = ΖΓ (Εὐκλ. 6, 2). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἡ ΜΖ = ΖΓ (Εὐκλ. 6, 2) καὶ ἡ ΕΛ = ΛΓ, εἶναι, ὡς ἡ ΜΓ : ΓΖ = ΕΓ : ΓΛ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΜΓ : ΓΕ = ΖΓ : ΓΛ (Εὐκλ. 5, 16). Ἀλλ' ὡς ἡ ΜΓ : ΓΕ = ΞΓ : ΓΗ (Εὐκλ. 6, 4)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ : ΓΛ = ΞΓ : ΓΗ. Ὡς δὲ ἡ ΗΓ : ΓΑ = ΛΓ : ΓΕ [διότι ἑκατέρα εἶναι διπλασία]· δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη), εἶναι, ὡς ἡ ΑΓ : ΓΞ = ΕΓ : ΓΖ (Εὐκλ. 5, 22), καὶ δι' ἀναστροφῆς εἶναι, ὡς ἡ ΕΓ : ΕΖ = ΓΑ : ΑΞ (Εὐκλ. 5, 19 πόρ.)· καὶ διὰ διαιρέσεως (διελόντι) εἶναι, ὡς ἡ ΓΖ : ΖΕ = ΓΞ : ΞΑ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΜΒ εἶναι διάμετρος καὶ ἡ ΑΝ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ΑΟ κατηγμένη, εἶναι ἡ ΝΒ = ΒΟ (1, 35) καὶ ἡ ΝΔ = ΔΑ (Εὐκλ. 6, 2). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΕΚ = ΚΑ· ὡς ἄρα ἡ ΑΕ : ΑΚ = ΝΑ: ΑΔ· ἐναλλάξ, εἶναι, ὡς ἡ ΕΑ : ΑΝ = ΚΑ : ΑΔ (Εὐκλ. 5, 16). Ἀλλ' ὡς ἡ ΕΑ : ΑΝ = ΗΑ : ΑΞ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΑ : ΑΔ = ΗΑ : ΑΞ (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΑ : ΑΗ = ΕΑ : ΑΚ [διότι εἶναι διπλασία ἑκατέρας]· δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι, ὡς ἡ ΓΑ : ΑΞ = ΕΑ : ΑΔ (Εὐκλ. 5, 22)· καὶ διὰ διαιρέσεως (διελόντι) (Εὐκλ. 5, 17), εἶναι, ὡς ἡ ΓΞ : ΞΑ = ΕΔ : ΔΑ. Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ ΓΞ :

ΕΔ πρὸς ΔΑ. ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΑΞ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ· ὡς ἄρα ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΕΔ πρὸς ΑΔ. πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ, ἡ ΓΠ πρὸς ΑΟ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΓΠ τῆς ΒΖ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ, ἡ δὲ ΑΟ τῆς ΒΔ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΝ τῆς ΝΔ, ὡς ἄρα ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ, ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ καὶ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ.

μβ′

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ᾽ ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσι παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, ἄλλη δέ τις, ὡς ἔτυχεν, ἀχθῇ ἐφαπτομένη, ἀποτεμεῖ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἴδους.

ἔστω γάρ τις τῶν προειρημένων τομῶν, ἧς διάμετρος
H418 ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Α, Β ἤχθωσαν παρὰ τεταγμένως κατη-



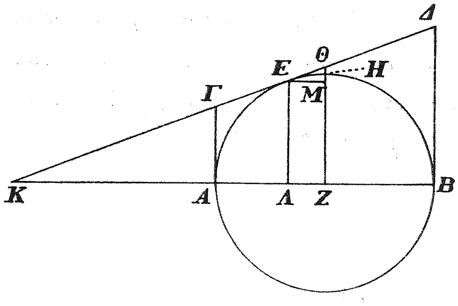
γμένην αἱ ΑΓ, ΔΒ, ἄλλη δέ τις ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Ε ἡ ΓΕΔ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

ἔστω γὰρ κέντρον τὸ Ζ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὰς ΑΓ, ΒΔ ἡ ΖΗΘ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ παράλληλοί εἰσιν, ΛΞ = ΓΖ : ΖΕ· ὡς ἄρα ἡ ΓΖ : ΖΕ = ΕΔ : ΑΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΓΞ : ΞΛ = ΓΠ : ΛΟ (Εὐκλ. 6, 4 . 6, 16), καὶ εἶναι ἡ μὲν ΓΠ = 2ΒΖ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΓΜ = 2ΜΖ (Εὐκλ. 6, 4), ἡ δὲ ΛΟ = 2ΒΔ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΛΝ = 2ΝΔ, θὰ εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΓΞ : ΞΛ = ΖΒ : ΒΔ = ΓΖ : ΖΕ = ΕΔ : ΔΑ.

42

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἢ ἔλλειψιν ἢ περιφέρειαν κύκλου ἢ εἰς τὰς ἀντικειμένας ἐκ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τεταγμένως κατηγμένην, ἄλλη δὲ εὐθεῖά τις ἀχθῇ, ὡς ἔτυχεν, ἐφαπτομένη, θὰ τμήσῃ αὕτη ἀπ' αὐτῶν εὐθείας τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν αὐτὴν διάμετρον ὀρθογωνίου.

Διότι ἔστω μία ἐκ τῶν ἀνωτέρω τομῶν, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Α, Β ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τεταγμένως κατηγμένην αἱ ΑΓ, ΔΒ, ἂς ἐφάπτηται δὲ ἄλλη τυχοῦσα κατὰ τὸ Ε ἡ ΓΕΔ. Λέγω, ὅτι τὸ



ὀρθογώνιον ΑΓ x ΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένου ὀρθογωνίου.

Διότι ἔστω κέντρον τὸ Ζ, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΗΘ παράλληλος πρὸς τὰς ΑΓ, ΒΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΓ, ΒΔ εἶναι ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ παράλληλος, συζυγὴς ἄρα διάμετρός ἐστι τῇ ΑΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

εἰ μὲν οὖν ἡ ΖΗ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου διὰ τοῦ Ε ἔρχεται, ἴσαι γίνονται αἱ ΑΓ, ΖΗ, ΒΔ, καὶ φανερὸν αὐτόθεν, ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

μὴ ἐρχέσθω δή, καὶ συμπιπτέτωσαν αἱ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ μὲν τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΕΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΒ ἡ ΕΜ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΖΛ τῷ ἀπὸ ΑΖ, ἔστιν, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΑ, ἡ ΖΑ πρὸς ΖΛ, καὶ ἡ ΚΑ πρὸς ΑΛ ἐστίν, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΑ, τουτέστι
H420 πρὸς ΖΒ· ἀνάπαλιν, ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΚ, ἡ ΛΑ πρὸς ΑΚ· συνθέντι ἢ διελόντι, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΖ, ἡ ΛΚ πρὸς ΚΑ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς ΖΘ, ἡ ΕΛ πρὸς ΓΑ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΒ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΘ, ΕΛ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΘΖΜ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΖΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους· καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒ, ΓΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

μγʹ

Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύῃ, ἀποτεμεῖ ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων εὐθειῶν παράλληλοι, εἶναι δὲ καὶ ΖΗ παράλληλος, εἶναι ἄρα συζυγὴς διάμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (1 ὁρισ. 6)· ὥστε τὸ $ΖΗ^2 = 1/4$ τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένου ὀρθογωνίου (δηλ. = ΑΒ x τὴν παράμετρον ΑΓ) (1 ὁρισ. πρῶτοι 3).

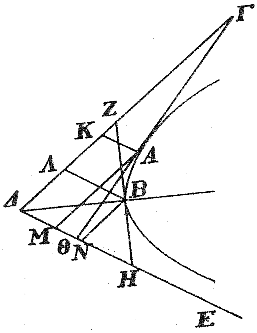
Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ ΖΗ εἰς τὴν ἔλλειψιν καὶ τὸν κύκλον διέρχηται διὰ τοῦ Ε, γίνονται ΑΓ = ΖΗ = ΒΔ, καὶ εἶναι ἐξ αὐτοῦ φανερόν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ x ΒΔ = $ΖΗ^2$, τουτέστι = 1/4 ΑΒ x ΑΓ.

Ἀλλ' ἂς μὴ διέρχηται διὰ τοῦ Ε, καὶ αἱ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Ε πρὸς μὲν τὴν ΑΓ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΕΛ, πρὸς δὲ τὴν ΑΒ παράλληλος ἡ ΕΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΚΖ x ΖΛ = $ΑΖ^2$, εἶναι, ὡς ἡ ΚΖ : ΖΑ = ΖΑ : ΖΛ (Εὐκλ. 6, 17) καὶ ἡ ΚΑ : ΑΛ = ΚΖ : ΖΑ (Εὐκλ. 5, 12 . 5, 19, πόρ. 5, 16) = ΚΖ : ΖΒ· ἀνάπαλιν εἶναι, ὡς ἡ ΒΖ : ΖΚ = ΛΑ : ΑΚ (Εὐκλ. 5, 7 πόρ.)· διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18) ἢ διὰ διαιρέσεως (διελόντι) εἶναι, ὡς ἡ ΒΚ : ΚΖ = ΛΚ : ΚΑ (Εὐκλ. 5, 17). Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ : ΖΘ = ΕΛ : ΓΑ (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι ἄρα τὸ ΔΒ x ΓΑ = ΖΘ x ΕΛ = ΘΖ x ΖΜ (Εὐκλ. 1, 34). Τὸ δὲ ΘΖ x ΖΜ = $ΖΗ^2$ (1, 38), τουτέστι = 1/4 τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ παραβεβλημένου σχήματος (1/4 ΑΒ x παράμετρον ΑΓ, εἰς τὴν ἔλλειψιν καὶ τὴν ὑπερβολήν)· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΔΒ x ΓΑ = 1/4 τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένου σχήματος.

43

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται ὑπερβολῆς, θὰ τμήσῃ ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων πρὸς τὸ κέντρον τῆς τομῆς εὐθείας, τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀποτεμνομένων *ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης κατὰ τὴν πρὸς τῷ ἄξονι κορυφὴν τῆς τομῆς.*

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔΕ, ἄξων δὲ ὁ ΒΔ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη ἡ ΖΒΗ, ἄλλη δέ τις, ὡς ἔτυχεν, ἐφαπτομένη ἡ ΓΑΘ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΔΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΔΘ.



ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β παρὰ μὲν τὴν ΔΗ αἱ ΑΚ, ΒΛ, παρὰ δὲ τὴν ΓΔ αἱ ΑΜ, ΒΝ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΓΑΘ, ἴση ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ· ὥστε ἡ ΓΘ τῆς ΘΑ διπλῆ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΑΜ καὶ ἡ ΔΘ τῆς ΑΚ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΔΘ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΚΑΜ. ὁμοίως
H422 *δὴ δειχθήσεται τὸ ὑπὸ ΖΔΗ τετραπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΛΒΝ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΚΑΜ τῷ ὑπὸ ΛΒΝ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΓΔΘ τῷ ὑπὸ ΖΔΗ.*

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, κἂν ἡ ΔΒ ἑτέρα τις ᾖ διάμετρος καὶ μὴ ἄξων.

μδ'

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι ταῖς ἀσυμπτώτοις, αἱ ἐπὶ τὰς τομὰς ἀγόμεναι παράλληλοι ἔσονται τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ.

ἔστω γὰρ ἡ ὑπερβολὴ ἢ ἀντικείμεναι ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔΕ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΑΘΖ, ΕΒΘΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΖΗ, ΓΕ. λέγω, ὅτι παράλληλοί εἰσιν.

εὐθειῶν ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης κατὰ τὴν πρὸς τὸν ἄξονα κορυφὴν τῆς τομῆς.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔ, ΔΕ, ἄξων δὲ ὁ ΒΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη ἡ ΖΒΗ, ἄλλη δὲ μία ὡς ἔτυχεν, ἐφαπτομένη ἡ ΓΑΘ. Λέγω, ὅτι τὸ ΖΔ x ΔΗ = ΓΔ x ΔΘ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Α, Β πρὸς μὲν τὴν ΔΗ παράλληλοι αἱ ΑΚ, ΒΛ, πρὸς δὲ τὴν ΓΔ παράλληλοι αἱ ΑΜ, ΒΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΑΘ ἐφάπτεται, εἶναι ἡ ΓΑ = ΑΘ (2, 3)· ὥστε ἡ ΓΘ = 2ΘΑ καὶ ἡ ΓΔ = 2ΑΜ καὶ ἡ ΔΘ = 2ΑΚ (Εὐκλ. 6, 4). Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΓΔ x ΔΘ = 4ΚΑ x ΑΜ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ΖΔ x ΔΗ = 4ΛΒ x ΒΝ. Εἶναι δὲ τὸ ΚΑ x ΑΜ = ΛΒ x ΒΝ (2, 12)· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΓΔ x ΔΘ = ΖΔ x ΔΗ.

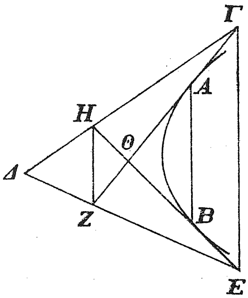
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, καὶ ἂν ἡ ΔΒ εἶναι ἄλλη τις διάμετρος καὶ ὄχι ἄξων.

44

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων συναντῶνται μὲ τὰς ἀσυμπτώτους, αἱ ἀγόμεναι εἰς τὰς τομὰς εὐθεῖαι θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῶν εὐθεῖαν.

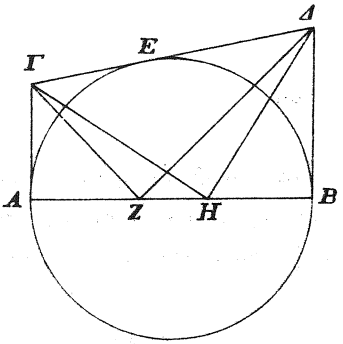
Διότι ἔστω ἢ ὑπερβολὴ ἢ ἀντικείμεναι ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔ, ΔΕ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΑΘΖ, ΕΒΘΗ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΖΗ, ΓΕ. Λέγω, ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΓΔΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΔΕ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΗΔ πρὸς ΔΖ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΖΗ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΖΓ, ἡ ΘΗ πρὸς ΗΕ. ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς ΗΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΑΖ· διπλῆ γὰρ ἑκατέρα· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΑΒ.

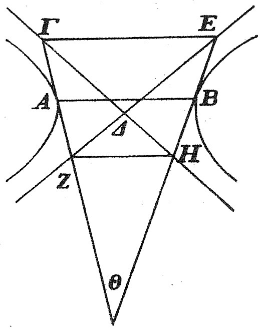


με΄

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ᾽ ἄκρου τοῦ ἄξονος ἀχθῶσιν εὐ-
H424 θεῖαι πρὸς ὀρθάς, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον παρὰ τὸν ἄξονα παραβληθῇ ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἐλλεῖπον, ἀχθῇ δέ τις εὐθεῖα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς συμπίπτουσα ταῖς πρὸς ὀρθὰς εὐθείαις, αἱ ἀπὸ τῶν συμ-

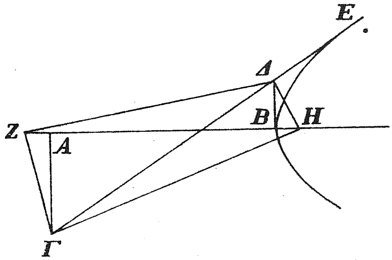


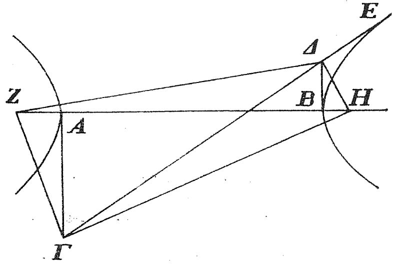
Διότι ἐπειδὴ τὸ ΓΔ x ΔΖ = ΗΔ x ΔΕ (θ. 43), εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ : ΔΕ = ΗΔ : ΔΖ (Εὐκλ. 6, 16)· εἶναι ἄρα ἡ ΓΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ. Καὶ διὰ τοῦτο εἶναι, ὡς ἡ ΘΖ : ΖΓ = ΘΗ : ΗΕ (Εὐκλ. 6, 2). Ὡς δὲ ἡ ΗΕ : ΗΒ = ΓΖ : ΑΖ· διότι ἑκατέρα εἶναι διπλασία (2,3)· δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλ/σμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι ὡς ἡ ΘΗ : ΗΒ = ΘΖ : ΖΑ (Εὐκλ. 5, 22). Εἶναι ἄρα ἡ ΖΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.



45

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἢ ἔλλειψιν ἢ περιφέρειαν κύκλου ἢ εἰς τὰς ἀντικειμένας ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν ἄκρων τοῦ ἄξονος εὐθεῖαι κάθετοι, καὶ παρὰ τὸν ἄξονα, πρὸς τὰ δύο μέρη αὐτοῦ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ σχήματος (τοῦ ὀρθογ. τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸν ἄξονα καὶ τὴν παράμετρον, εἰς τὴν ἔλλειψιν καὶ τὴν ὑπερβολήν), ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ὑπερβάλλον κατὰ σχῆμα τετράγωνον, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἐλλεῖπον (κατὰ σχῆμα τε-





πτώσεων ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γενηθέντα σημεῖα ὀρθὰς ποιοῦσι γωνίας πρὸς τοῖς εἰρημένοις σημείοις.

ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, πρὸς ὀρθὰς δὲ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΕΔ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον παραβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, ὡς εἴρηται, τὸ ὑπὸ ΑΖΒ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΓΗ, ΔΖ, ΔΗ. λέγω, ὅτι ἥ τε ὑπὸ ΓΖΔ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ γωνία ὀρθή ἐστιν.

ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΖ, ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Β σημείοις γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΖΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΖ ὀρθή ἐστιν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΖ,
H426 ΑΖΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΖ ἴση τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΖΑ, ΔΖΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΓ ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ ὀρθή.

μς'

Τῶν αὐτῶν ὄντων αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις.

τῶν γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ.

τράγωνον), ἀχθῇ δὲ εὐθεῖά τις ἐφαπτομένη τῆς τομῆς συναντῶσα τὰς καθέτους εὐθείας, αἱ ἀπὸ τῶν σημείων συναντήσεως ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τὰ τῆς παραβολῆς γενηθέντα σημεῖα σχηματίζουσι τὰς πρὸς τὰ εἰρημένα σημεῖα γωνίας ὀρθάς.

Ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ὁ ΑΒ, κάθετοι δὲ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΕΔ, καὶ πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ σχήματος ἂς παραβληθῇ, πρὸς τὰ δύο ἄκρα τοῦ ἄξονος, ὡς ἐλέχθη, τὸ ὀρθογώνιον ΑΖ x ΖΒ καὶ τὸ ΑΗ x ΗΒ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΖ, ΓΗ, ΔΖ, ΔΗ. Λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΓΖΔ καὶ ἡ ΓΗΔ εἶναι ὀρθή.

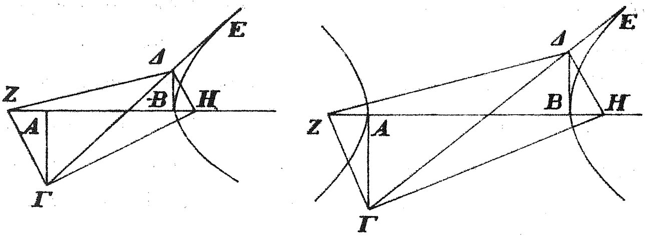
Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΓ x ΒΔ ἐδείχθη ἴσον πρὸς τὸ 1/4 τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ σχήματος (θ. 42), εἶναι δὲ καὶ τὸ ΑΖ xΖΒ = 1/4 τοῦ σχήματος, εἶναι ἄρα τὸ ΑΓ x ΔΒ = ΑΖ x ΖΒ. Εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΓΑ : ΑΖ = ΖΒ : ΒΔ (Εὐκλ. 6, 16). Καὶ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Α, Β γωνίαι εἶναι ὀρθαί· εἶναι ἄρα ἡ μὲν γωνία ΑΓΖ = γων. ΒΖΔ, ἡ δὲ ΑΖΓ = ΖΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΑΖ εἶναι ὀρθή, αἱ γωνίαι ἄρα ΑΓΖ + ΑΖΓ = 1 ὀρθὴ (Εὐκλ. 1, 32). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΓΖ = γων. ΔΖΒ· εἶναι ἄρα ΓΖΑ + ΔΖΒ = 1 ὀρθήν. Ἡ ὑπόλοιπος ἄρα γωνία ἡ ΔΖΓ εἶναι ὀρθὴ (Εὐκλ. 1, 13). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ γωνία ΓΗΔ εἶναι ὀρθή.

46

Τῶν αὐτῶν δεδομένων αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι σχηματίζουσι μὲ τὰς ἐφαπτομένας γωνίας ἴσας.

Διότι τῶν αὐτῶν δεδομένων λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΑΓΖ = γων. ΔΓΗ, ἡ δὲ ΓΔΖ = ΒΔΗ.

ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθη ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΖΔ, ΓΗΔ, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν



Ζ, Η σημείων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΗ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι τοῦ κύκλου εἰσίν. ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΖ· ὥστε ἡ ὑπὸ ΔΓΗ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΖ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ.

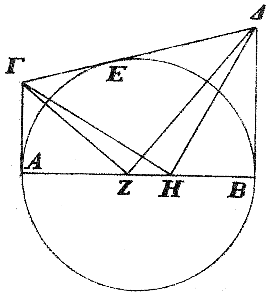
μζʹ

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ ἐφαπτομένῃ.

ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ συμπιπτέ-
H428 τωσαν ἀλλήλαις αἱ μὲν ΓΗ, ΖΔ κατὰ τὸ Θ, αἱ δὲ ΓΔ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ. λέγω, ὅτι κάθετός ἐστιν ἡ ΕΘ ἐπὶ τὴν ΓΔ.

εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΛΘ ἴση, ὅμοιον ἄρα τὸ ΔΗΒ τρίγωνον τῷ ΛΘΔ. ὡς ἄρα ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΖΓ πρὸς ΓΘ διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι

Διότι, ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΓΖΔ, ΓΗΔ ἐδείχθη ὀρθὴ (θ, 45), ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Ζ, Η (Εὐκλ. 3, 31)· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΔΓΗ = γων. ΔΖΗ (Εὐκλ. 3, 21)· διότι εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τοῦ κύκλου. Ἡ δὲ γωνία ΔΖΗ ἐδείχθη = γων. ΑΓΖ (θ. 45)· ὥστε ἡ γωνία ΔΓΗ = γων. ΑΓΖ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ γωνία ΓΔΖ = γων. ΒΔΗ.



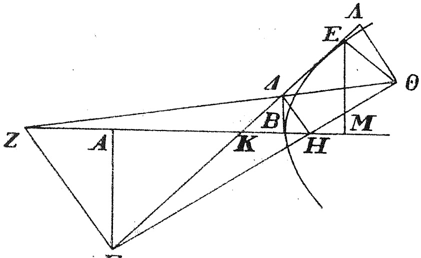
47

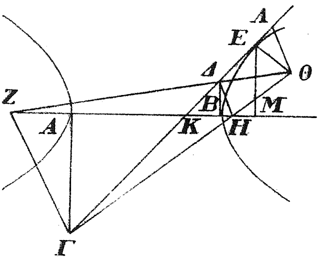
Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἡ ἀγομένη εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν ἀχθεισῶν ἐπὶ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Διότι ἂς ὑπόκεινται τὰ αὐτὰ ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα, καὶ ἂς συναντῶνται μεταξύ των αἱ μὲν ΓΗ, ΖΔ κατὰ τὸ Θ, αἱ δὲ ΓΔ, ΒΑ ἀφοῦ ἐκβληθῶσι κατὰ τὸ Κ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΘ. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΘΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΓΔΖ = γων. ΗΔΒ (θ. 46), εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ γωνία ΔΒΗ = πρὸς τὴν ὀρθὴν ΔΛΘ, εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΔΗΒ πρὸς τὸ ΛΘΔ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΗΔ : ΔΘ = ΒΔ : ΔΛ (Εὐκλ. 6, 4). Ἀλλ' ὡς ἡ ΗΔ : ΔΘ = ΖΓ : ΓΘ, διότι αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Ζ, Η γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ

τὰς πρὸς τοῖς Ζ, Η καὶ τὰς πρὸς τῷ Θ ἴσας· ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς ΓΘ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΖΓ, ΛΓΘ τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ. ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ, ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΛ πρὸς ΓΛ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΕΜ· τεταγμένως ἄρα ἔσται κατηγμένη ἐπὶ τὴν ΑΒ· καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ, ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ. ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ, ἡ ΔΕ πρὸς
H430 *ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΘΛ κάθετός ἐστιν, οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΘΕ.*



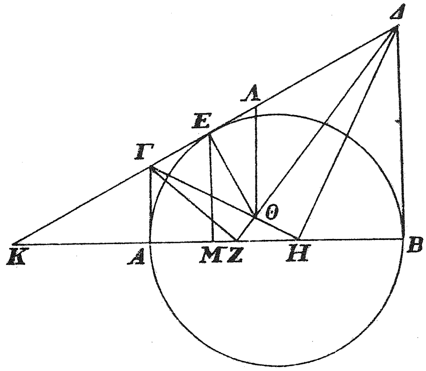


μη'

Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον, ὅτι αἱ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γινόμενα σημεῖα ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ.

ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΔ.

ἐπεὶ γὰρ ὀρθαί εἰσιν αἱ ὑπὸ ΔΗΘ, ΔΕΘ γωνίαι, ὁ περὶ (θ. 45) καὶ ἴσαι πρὸς τὰς παρὰ τὸ Θ· ὡς δὲ ἡ ΓΖ : ΓΘ = ΑΓ : ΓΛ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΖΓ, ΛΓΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ : ΔΛ = ΑΓ : ΓΛ. Ἐναλλὰξ εἶναι, ὡς ἡ ΔΒ : ΓΑ = ΔΛ : ΛΓ (Εὐκλ. 5, 16). Ἀλλ' ὡς ἡ ΔΒ : ΓΑ = ΒΚ : ΚΑ (Εὐκλ. 6, 4)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΛ : ΓΛ = ΒΚ : ΚΑ. Ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ε παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ΕΜ· θὰ εἶναι ἄρα αὕτη τεταγμένως κατηγμένη ἐπὶ τὴν ΑΒ (1 ὁρισ. 4)· καὶ θὰ εἶναι ὡς ἡ ΒΚ: ΚΑ = ΒΜ : ΜΑ (1, 36). Ὡς δὲ ἡ ΒΜ : ΜΑ = ΔΕ : ΕΓ (Εὐκλ. 6, 2)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΛ : ΛΓ =ΔΕ : ΕΓ· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΘΛ κάθετος, οὔτε ἄλλη καμμία πλὴν τῆς ΘΕ.



48

Τῶν αὐτῶν δεδομένων νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς πρὸς τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γινόμενα σημεῖα σχηματίζουσιν ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης γωνίας ἴσας.

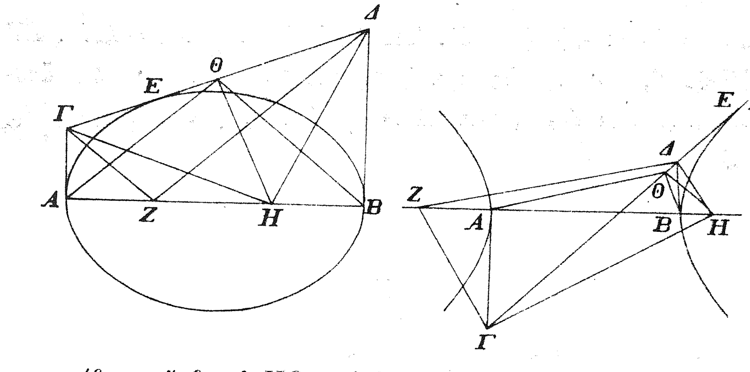
Διότι ἂς ὑπόκεινται τὰ αὐτά, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΖ, ΕΗ. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΓΕΖ = γων. ΗΕΔ.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΔΗΘ, ΔΕΘ εἶναι ὀρθαί, ὁ κύκλος *διάμετρον τὴν ΔΘ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Ε, Η σημείων· ὥστε ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΔΘΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΓΘΖ ἐστιν ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ ΓΘΖ τῇ ὑπὸ ΔΘΗ ἴση· κατὰ κορυφὴν γάρ· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστιν ἴση.*

μθ'

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἀπό τινος τῶν σημείων κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, αἱ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος ὀρθὴν ποιοῦσι γωνίαν.

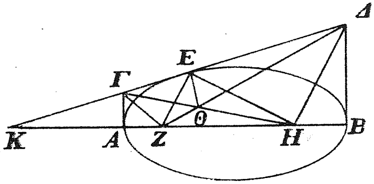
ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΓΔ

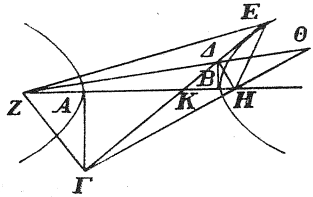


κάθετος ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΒΘ. λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΑΘΒ γωνία ὀρθή ἐστιν.

ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΘΗ, ὁ περὶ διά-
H432 *μετρον τὴν ΔΗ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Θ, Β, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΗΘΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΗ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΗΓ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΗ ἄρα τῇ*

ὁ γραφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΔΘ θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Ε, Η (Εὐκλ. 3, 31)· ὥστε ἡ γωνία ΔΘΗ θὰ εἶναι = γων. ΔΕΗ·





διότι εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ κυκλικὸν τμῆμα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ ἡ γων. ΓΕΖ = ΓΘΖ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γων. ΓΘΖ = γων. ΔΘΗ· διότι εἶναι κατὰ κορυφὴν (Εὐκλ. 1, 15)· εἶναι ἄρα καὶ γων. ΓΕΖ = ΔΕΗ.

49

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἀπό τινος τῶν σημείων ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, αἱ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος ἀγόμεναι εὐθεῖαι σχηματίζουσι γωνίαν ὀρθήν.

Διότι ἃς ὑπόκεινται τὰ αὐτά, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἃς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἡ ΗΘ, καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΑΘ, ΒΘ. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΑΘΒ εἶναι ὀρθή.

Διότι ἐπειδὴ ἡ γων. ΔΒΗ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ΔΘΗ, ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΔΗ θὰ διέλθῃ διὰ τῶν Θ, Β (Εὐκλ. 3, 31), καὶ θὰ εἶναι γων. ΗΘΒ = ΒΔΗ (Εὐκλ. 3, 21). Ἡ δὲ γων. ΑΗΓ ἐδείχθη = ΒΔΗ (θ. 45)· εἶναι ἄρα καὶ γων.

ὑπὸ ΑΗΓ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΑΘΓ, ἐστιν ἴση. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΒ.

ν′

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς προσπέσῃ τις τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ ἑνὸς τῶν σημείων ἠγμένῃ εὐθείᾳ, ἴση ἔσται τῇ ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος.

ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ αἱ ΔΓ, ΒΑ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΕΖ ἤχθω ἡ ΘΛ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΛ τῇ ΘΒ.

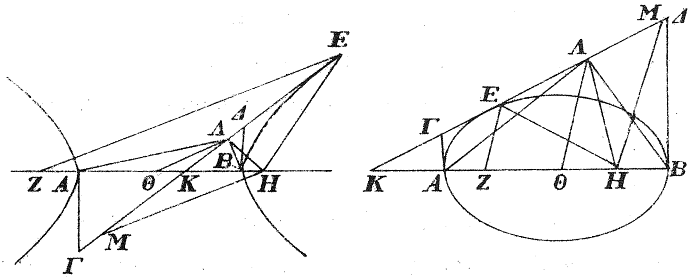
ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΕΗ, ΑΛ, ΛΗ, ΛΒ, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὴν ΕΖ ἤχθω ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΗΒ, ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΗΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ
H434 *τῇ ΘΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΘ ἄρα τῇ ΘΗ ἴση. ὥστε καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΜΗ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΜΗ τῇ ὑπὸ ΜΕΗ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΗΜ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἐδείχθη ἴση· κάθετος ἄρα ἡ ΗΛ ἐπὶ τὴν ΕΜ. ὥστε διὰ τὸ προδειχθὲν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΛΒ, καὶ ὁ*

ΒΘΗ = ΑΗΓ = ΑΘΓ (Εὐκλ. 3, 31). Ὥστε καὶ ἡ γων. ΓΘΗ = ΑΘΒ. Εἶναι δὲ γων. ΑΘΒ ὀρθή· εἶναι ἄρα καὶ γων. ΑΘΒ ὀρθή.

50

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς προσπέσῃ εὐθεῖά τις πρὸς τὴν ἐφαπτομένην παράλληλος πρὸς τὴν διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ ἑνὸς τῶν σημείων ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν, θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἄξονος.

Διότι ἔστω τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ προηγούμενα καὶ κέντρον τὸ Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ, καὶ αἱ ΔΓ, ΒΑ ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Κ,



καὶ διὰ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΕΖ παράλληλος ἡ ΘΛ. Λέγω, ὅτι ἡ ΘΛ = ΘΒ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΗ, ΑΛ, ΛΗ, ΛΒ, καὶ διὰ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ ἡ ΗΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΑΖ x ΖΒ = ΑΗ x ΗΒ, εἶναι ἄρα ΑΖ = ΗΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΘ = ΘΒ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΖΘ = ΘΗ. Ὥστε καὶ ἡ ΕΛ = ΛΜ (Εὐκλ. 6, 2). Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη γων. ΓΕΖ = ΔΕΗ, καὶ εἶναι γων. ΓΕΖ = ΕΜΗ (Εὐκλ. 1, 29), εἶναι ἄρα γων. ΕΜΗ = ΜΕΗ. Εἶναι ἄρα καὶ ΕΗ = ΗΜ (Εὐκλ. 1, 6). Ἀλλ' ἐδείχθη καὶ ἡ ΕΛ = ΛΜ· εἶναι ἄρα ἡ ΗΛ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΜ (Εὐκλ. 1, 8). Ὥστε διὰ τὸ *περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τοῦ Λ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΘΑ τῇ ΘΒ· καὶ ἡ ΘΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα τοῦ ἡμικυκλίου ἴση ἐστὶ τῇ ΘΒ.*

να΄

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων παρὰ τὸν ἄξονα ἴσον ἐφ᾿ ἑκάτερα παραβληθῇ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὁποτερανοῦν τῶν τομῶν, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος ὑπερέχει τῷ ἄξονι.

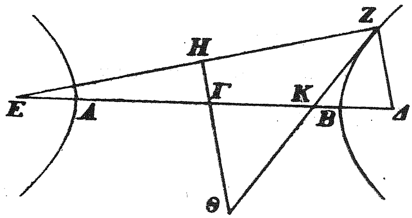
ἔστω γὰρ ὑπερβολὴ ἢ ἀντικείμεναι, ὧν ἄξων ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον ἔστω ἑκάτερον τῶν ὑπὸ ΑΔΒ, ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Δ σημείων κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΕΖ, ΖΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ.

ἤχθω διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη ἡ ΖΚΘ, διὰ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΔ ἡ ΗΓΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΘΗ τῇ ὑπὸ ΚΖΔ· ἐναλλὰξ γάρ. ἡ δὲ ὑπὸ ΚΖΔ ἴση τῇ ὑπὸ ΗΖΘ· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. ἴση ἄρα ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ. ἡ δὲ ΖΗ τῇ ΗΕ ἴση, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΒΔ καὶ ἡ ΑΓ τῇ
H436 *ΓΒ καὶ ἡ ΕΓ τῇ ΓΔ· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση.*

προαποδειχθὲν (θ. 49) ἡ γων. ΑΛΒ εἶναι ὀρθή, καὶ ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Λ (Εὐκλ. 3, 31). Καὶ εἶναι ἡ ΘΑ = ΘΒ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΘΛ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἡμικυκλίου ἀχθεῖσα = ΘΒ.

51

Ἐὰν παρὰ τὸν ἄξονα ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων, παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ 1/4 τοῦ σχήματος (δηλ. 1/4 ΑΒ x παράμετρον), ὑπερβάλλον κατὰ σχῆμα τετράγωνον, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ ἄξονος ἴσον, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς (δηλ. παρατάσεως) σημείων ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς οἱανδήποτε τῶν τομῶν, ἡ μεγαλυτέρα ὑπερέχει τῆς μικροτέρας κατὰ τὸν ἄξονα.



Διότι ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων ἄξων εἶναι ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ σχήματος ἴσον ἔστω ἑκάτερον τῶν ΑΔ x ΔΒ, ΑΕ x ΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Ε, Δ ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὴν γραμμὴν (τομὴν) αἱ ΕΖ, ΖΔ. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ = ΖΔ + ΑΒ.

Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη ἡ ΖΚΘ, διὰ δὲ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΔ ἡ ΗΓΘ· εἶναι ἄρα γων. ΚΘΗ = ΚΖΔ· διότι εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 1, 29). Εἶναι δὲ γων. ΚΖΔ = ΗΖΘ (θ. 48)· εἶναι ἄρα καὶ γων. ΗΖΘ = ΗΘΖ. Ἑπομένως ΗΖ = ΗΘ (Εὐκλ. 1, 6). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΗ = ΗΕ ἐπειδὴ ΑΕ = ΒΔ καὶ ΑΓ = ΓΒ καὶ ΕΓ = ΓΔ· εἶναι ἄρα καὶ ΗΘ = ΕΗ. Ὥστε

ὥστε ἡ ΖΕ τῆς ΗΘ ἐστι διπλῆ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΘ ἴση δέδεικται τῇ ΓΒ, ἡ ΕΖ ἄρα διπλῆ ἐστι συναμφοτέρου τῆς ΗΓΒ. ἀλλὰ τῆς μὲν ΗΓ διπλῆ ἡ ΖΔ, τῆς δὲ ΓΒ διπλῆ ἡ ΑΒ· ἡ ΕΖ ἄρα ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΖΔ, ΑΒ. ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ.

νβ′

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει παρὰ τὸν μείζονα τῶν ἀξόνων τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον ἐφ᾽ ἑκάτερα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν γραμμήν, ἴσαι ἔσονται τῷ ἄξονι.

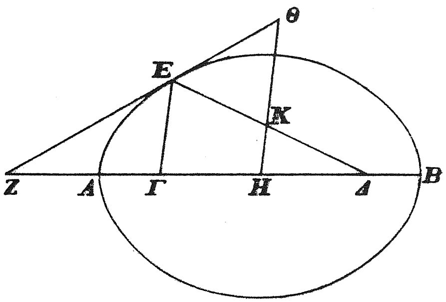
ἔστω ἔλλειψις, ἧς μείζων τῶν ἀξόνων ὁ ΑΒ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἑκάτερον ἴσον ἔστω τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΓΕΔ. λέγω, ὅτι αἱ ΓΕΔ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΒ.

ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΖΕΘ, καὶ κέντρον τὸ Η, καὶ δι᾽ αὐτοῦ παρὰ τὴν ΓΕ ἡ ΗΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΘΕΚ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΚ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΘΕΚ ἐστὶν ἴση. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ ἴση καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ, καὶ ἡ ΓΗ ἡ ΖΕ = 2ΗΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη ἡ ΓΘ = ΓΒ (θ. 50), εἶναι ἄρα ἡ ΕΖ = 2 (ΗΓ + ΓΒ). Ἀλλὰ ἡ μὲν ΖΔ = 2ΗΓ, καὶ ἡ ΑΒ = 2ΓΒ (Εὐκλ. 6, 4)· εἶναι ἄρα ἡ ΕΖ = ΖΔ + ΑΒ. Ὥστε ἡ ΕΖ ὑπερέχει τῆς ΖΔ κατὰ τὴν ΑΒ.

52

Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν παραβληθῇ παρὰ τὸν μεγαλύτερον τῶν ἀξόνων καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη αὐτοῦ ἴσον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ σχήματος, ἐλλεῖπον σχῆμα τετράγωνον, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν γραμμὴν (τομὴν) αὗται θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὸν ἄξονα.

Ἔστω ἔλλειψις, τῆς ὁποίας μεγαλύτερος ἄξων ὁ ΑΒ καὶ πρὸς τὸ ἓν τέταρτον μέρος τοῦ σχήματος ἑκάτερον τῶν ΑΓ x ΓΒ, ΑΔ x ΔΒ ἔστω ἴσον, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΓΕ, ΕΔ. Λέγω, ὅτι αἱ ΓΕ + ΕΔ = ΑΒ.



Ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη ἡ ΖΕΘ, καὶ κέντρον τὸ Η, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ ἡ ΗΚΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι γων. ΓΕΖ = ΘΕΚ (θ. 48) καὶ γων. ΖΕΓ = ΕΘΚ (Εὐκλ. 1, 29), εἶναι ἄρα γων. ΕΘΚ = ΘΕΚ. Εἶναι ἄρα ΘΚ = ΚΕ (Εὐκλ. 1, 6). Καὶ ἐπειδὴ ΑΗ = ΗΒ καὶ ΑΓ = ΔΒ, εἶναι ἄρα καὶ ΓΗ =

ἄρα τῇ ΗΔ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΔ. καὶ διὰ τοῦτο διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΕΔ τῆς ΘΚ, ἡ δὲ ΕΓ τῆς ΚΗ, καὶ συναμφότερος ἡ ΓΕΔ διπλῆ ἐστι τῆς ΗΘ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ διπλῆ τῆς ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ ταῖς ΓΕΔ.

H438 *νγ'*

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσιν παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι τέμνωσι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἴδει.

ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΓ, καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΕ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΒΕ, ΓΒΔ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ εἴδει τῷ πρὸς τῇ ΑΓ.

ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΒΖ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ πρὸς τὸ εἶδος τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΑΖ πρὸς ΖΒ καὶ τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΒ· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΖΒ πρὸς ΖΑ καὶ τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΓΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΓΑ πρὸς ΑΔ· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΓΕ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΓΑ. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ πρὸς

ΗΔ· ὥστε καὶ ΕΚ = ΚΔ (Εὐκλ. 6, 2). Καὶ διὰ τοῦτο ἡ μὲν ΕΔ = 2ΘΚ, ἡ δὲ ΕΓ = 2ΚΗ (Εὐκλ. 6, 4), καὶ ΓΕ + ΕΔ = 2ΗΘ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ = 2ΗΘ (θ. 50)· εἶναι ἄρα ΑΒ = ΓΕ + ΕΔ.

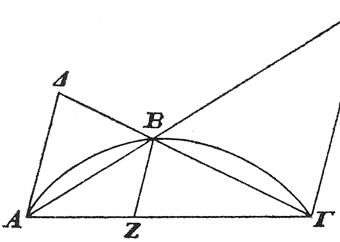
53

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἢ ἔλλειψιν ἢ περιφέρειαν κύκλου ἢ εἰς τὰς ἀντικειμένας ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἄκρων πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς (τομῆς), ἀφοῦ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, αὗται τέμνωσι τὰς παραλλήλους, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ἀποτεμνομένας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ πρὸς τὴν αὐτὴν διάμετρον.

Ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΓ καὶ ἃς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τεταγμένως κατηγμένην αἱ ΑΔ, ΓΕ, καὶ ἃς διαχθῶσιν αἱ ΑΒΕ, ΓΒΔ. Λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ x ΕΓ = πρὸς τὸ σχῆμα τὸ πρὸς τὴν ΑΓ.

Διότι ἃς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Β παραλλήλως πρὸς τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΒΖ. Εἶναι ἄρα, ὡς τὸ ΑΖ x ΖΓ : ΖΒ^2 (1, 21) = ὁ πλάγιος ἄξων : τὴν διάμετρον = ΑΓ^2 : πλάγιος ἄξων x τὴν παράμετρον. Εἶναι δὲ ΑΖ x ΖΓ : ΒΖ^2 = (ΑΖ : ΖΒ) x (ΓΖ : ΖΒ)· ὁ λόγος ἄρα τοῦ σχήματος πρὸς τὸ ΑΓ^2 = (ΖΒ : ΖΑ) x (ΒΖ x ΓΖ). Ἀλλ' ὡς μὲν ΑΖ : ΖΒ = ΑΓ : ΓΕ, ὡς δὲ ΓΖ : ΖΒ = ΓΑ : ΑΔ (Εὐκλ. 6, 4)· ὁ λόγος ἄρα τοῦ σχήματος πρὸς τὸ ΑΓ^2 = (ΓΕ : ΓΑ) x (ΑΔ : ΓΑ). Εἶναι δὲ καὶ ΑΔ x ΓΕ :

τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ εἶδος
H440 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ τῷ παρὰ τὴν ΑΓ εἴδει.



νδʹ

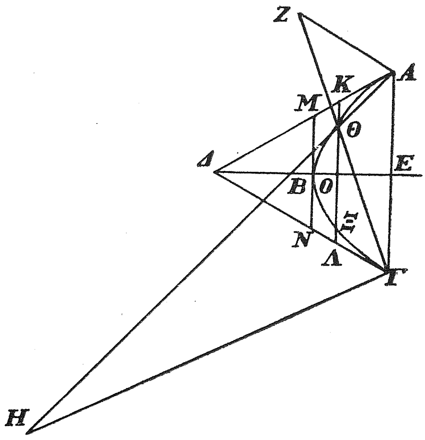
Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰς ἁφὰς τετράγωνον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τὸ ἐντὸς τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν δυνάμει, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετραγώνου.

ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒΕ, καὶ ἤχθω

$ΑΓ^2 = (ΓΕ : ΓΑ) \times (ΑΔ : ΓΑ)$· ὡς ἄρα τὸ σχῆμα : $ΑΓ^2 = ΑΔ \times ΓΕ : ΑΓ^2$. Εἶναι ἄρα τὸ $ΑΔ \times ΓΕ$ = πρὸς τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβληθὲν σχῆμα.

54

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τομῆς κώνου ἢ περιφερείας κύκλου συναντῶνται, διὰ δὲ τῶν ἀφῶν (σημείων ἐπαφῆς) ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας, καὶ ἀπὸ τῶν ἀφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς (τομῆς) διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἑνούσης τὰς ἀφὰς ἔχει λόγον, τὸ γινόμενον τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ἐντὸς τμῆμα τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὸ σημεῖον συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν διχοτομίαν τῆς ἑνούσης τὰς ἀφὰς πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα, εἰς τὸ τετράγωνον, ἐπὶ τὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ἐφαπτομένας πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς ἑνούσης τὰς ἀφάς.



Ἔστω τομὴ κώνου ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒΓ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΓ καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΒΕ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ μὲν *ἀπὸ μὲν τοῦ Α παρὰ τὴν ΓΔ ἡ ΑΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΓΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΘ, ΓΘ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Ζ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τὸν συγκείμενον* H442 *ἔχει λόγον ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΕΓ.*

ἤχθω γὰρ ἀπὸ μὲν τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΚΘΟΞΛ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἡ ΜΒΝ· φανερὸν δή, ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΜΒ τῇ ΒΝ καὶ ἡ ΚΟ τῇ ΟΛ καὶ ἡ ΘΟ τῇ ΟΞ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΞΛ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΜΒ, ΜΑ, καὶ παρὰ τὴν ΜΒ ἦκται ἡ ΚΘΛ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΒΝ, τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΚΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΛΘΚ [καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ, τὸ ὑπὸ ΝΒΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ]. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΑ, τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΓΛ πρὸς ΛΘ, τουτέστι τῆς ΖΑ πρὸς ΑΓ, καὶ τοῦ τῆς ΑΚ πρὸς ΚΘ, τουτέστι τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ. τὸ δὲ ὑπὸ ΓΝ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ τοῦ ὑπὸ ΝΔΜ μέσου λαμβανομένου τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΓΝ, ΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ ΓΝ, ΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τοῦ ὑπὸ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΑΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΓΗ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς γραμμῆς (τομῆς) τὸ Θ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ ΑΘ, ΓΘ ἂς ἐκβληθῶσι μέχρι τῶν σημείων Η, Ζ. Λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΖ x ΓΗ πρὸς τὸ $ΑΓ^2$ ἔχει λόγον, τὸ γινόμενον τοῦ λόγου $ΕΒ^2 : ΒΔ^2$ ἐπὶ τὸν λόγον $ΑΔ \times ΔΓ : 1/4ΑΓ^2$, τουτέστι τὸ $(ΕΒ^2 : ΒΔ^2) \times (ΑΔ \times ΔΓ : ΑΕ \times ΕΓ)$.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ μὲν τοῦ Θ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ΚΘΟΞΛ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β παράλληλος ἡ ΜΒΝ· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι ἡ ΜΝ ἐφάπτεται (1, 32). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ἡ ΑΕ = ΕΓ, εἶναι καὶ ἡ ΜΒ = ΒΝ καὶ ἡ ΚΟ = ΟΛ (Εὐκλ. 6, 4 . 5, 16) καὶ ἡ ΘΟ = ΟΞ (2, 7 . 1, 46, 47) καὶ ἡ ΚΘ = ΞΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐφάπτονται αἱ ΜΒ, ΜΑ, καὶ πρὸς τὴν ΜΒ ἔχει ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΚΘΛ, εἶναι, ὡς τὸ $ΑΜ^2 : ΜΒ^2 = ΑΚ^2 : ΞΚ \times ΚΘ$, τουτέστι $ΑΜ^2 : ΜΒ \times ΒΝ = ΑΚ^2 : ΛΘ \times ΘΚ$ (θ. 16) [καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ $ΑΜ^2 : ΑΚ^2 = ΝΒ \times ΒΜ : ΛΘ \times ΘΚ$]. Ὡς δὲ τὸ $ΝΓ \times ΜΑ : ΜΑ^2 = ΛΓ \times ΚΑ : ΚΑ^2$ (Εὐκλ. 6, 2 . 5, 18)· δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλ/σμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι, ὡς τὸ $ΝΓ \times ΜΑ : ΝΒ \times ΒΜ = ΛΓ \times ΚΑ : ΛΘ \times ΘΚ$ (Εὐκλ. 5, 22). Τὸ δὲ $ΛΓ \times ΚΑ : ΛΘ \times ΘΚ = (ΓΛ : ΛΘ) \times (ΑΚ : ΚΘ) = (ΖΑ : ΑΓ) \times (ΗΓ : ΓΑ)$ (Εὐκλ. 6, 4) $= ΗΓ \times ΖΑ : ΓΑ^2$· ὡς ἄρα τὸ $ΝΓ \times ΜΑ : ΝΒ \times ΒΜ = ΗΓ \times ΖΑ : ΓΑ^2$. Τὸ δὲ $ΓΝ \times ΜΑ : ΝΒ \times ΒΜ$, τοῦ $ΝΔ \times ΔΜ$ λαμβανομένου ὡς μέσου, $= (ΓΝ \times ΑΜ : ΝΔ \times ΔΜ) \times (ΝΔ \times ΔΜ : ΝΒ \times ΒΜ)$· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΗΓ \times ΖΑ : ΓΑ^2 = (ΓΝ \times ΑΜ : ΝΔ \times ΔΜ) \times (ΝΔ \times ΔΜ :$

ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ. ἀλλʼ ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΑΜ πρὸς H444 *τὸ ὑπὸ ΝΔΜ, τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ, ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τοῦ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.*

νε΄

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν διαχθῶσι παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις, προσβληθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον λόγον ἕξει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης διὰ τῆς συμπτώσεως παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἕως τῆς τομῆς.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΗ, ΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΔ ἤχθω ἡ ΓΗΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α παρὰ τὴν ΔΗ ἡ ΑΜ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΗ ἡ ΔΜ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΖ τομῆς τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΝΖ, ΖΔΘ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΖΛΚΒ.

ΝΒ x ΒΜ). Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΝΓ x ΑΜ : ΝΔ x ΔΜ = ΕΒ^2 : ΒΔ^2, ὡς δὲ τὸ ΝΔ x ΔΜ : ΝΒ x ΒΜ = ΓΔ x ΔΑ : ΓΕ x ΕΑ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΗΓ x ΑΖ : ΑΓ^2 = (ΒΕ^2 : ΒΔ^2) x (ΓΔ x ΔΑ : ΓΕ x ΕΑ).

55

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀντικειμένων συναντῶνται, καὶ διὰ μὲν τοῦ σημείου συναντήσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰς ἁφὰς (=σημεῖα ἐπαφῶν), ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν διαχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας, προσεκβληθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἄλλης τομῆς τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰς ἁφὰς θὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ἐφαπτομένας πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἠγμένης διὰ τοῦ σημείου συναντήσεως παραλλήλως πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰς ἁφὰς μέχρι τῆς τομῆς.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΗ, ΗΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Η παραλλήλως πρὸς τὴν ΑΔ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΗΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α παραλλήλως πρὸς τὴν ΔΗ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΜ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ παραλλήλως πρὸς τὴν ΑΗ ἡ ΔΜ, ἂς ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς ΔΖ, τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΝΖ, ΖΔΘ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ ΓΗ^2 : ΑΗ x ΗΔ = ΑΔ^2 : ΑΘ x ΝΔ.

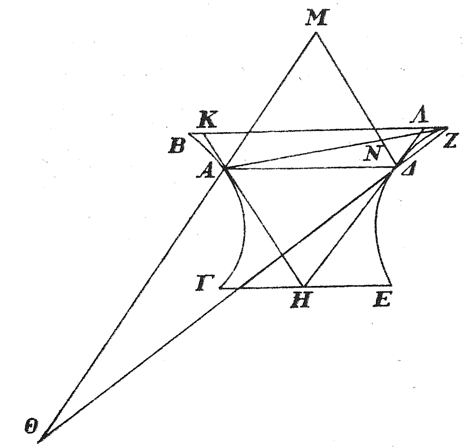
Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ζ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΖΛΚΒ.

ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ H446 ἀπὸ ΗΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΛΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΛ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΕΗ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ΛΖ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τὸ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ. ἔστι δὲ καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, τὸ ἀπὸ ΔΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΛ, ΑΚ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, τὸ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΛ, ΑΚ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΔΛ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΑ καὶ τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΔ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΚ πρὸς ΚΑ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΝ, ὡς δὲ ἡ ΖΛ πρὸς ΛΔ, ἡ ΑΔ πρὸς ΘΑ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΔΝ καὶ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΘ. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔ, ΑΘ. [ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ , τὸ ὑπὸ ΝΔ, ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ].

νς'

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἔχει ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ $ΕΗ^2 : ΗΔ^2 = ΒΛ \times ΛΖ : ΔΛ^2$ (θ. 20), εἶναι δὲ ἡ μὲν ΓΗ=ΕΗ, ἡ δὲ ΒΚ=ΛΖ, εἶναι ἄρα ὡς τὸ $ΓΗ^2 : ΗΔ^2 = ΚΖ \times ΖΛ : ΛΔ^2$. Εἶναι δὲ καί, ὡς τὸ $ΔΗ^2 : ΔΗ \times ΗΑ = ΔΛ^2 : ΔΛ \times ΑΚ$ (Εὐκλ. 6, 2)· δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλ/σμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι, ὡς τὸ $ΓΗ^2 : ΔΗ \times ΗΑ = ΚΖ \times ΖΛ : ΔΛ \times ΑΚ$ (Εὐκλ. 5, 22). Εἶναι δὲ $ΚΖ \times ΖΛ : ΑΚ \times ΔΛ = (ΖΚ : ΚΑ) \times (ΖΛ : ΛΔ)$. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΖΚ : ΚΑ = ΑΔ : ΔΝ$, ὡς δὲ ἡ $ΖΛ : ΛΔ = ΑΔ : ΘΑ$ (Εὐκλ. 6, 4)· ὁ λόγος ἄρα $ΓΗ^2 : ΔΗ \times ΗΑ = (ΑΔ : ΔΝ) \times (ΔΑ : ΑΘ)$. Εἶναι δὲ καὶ $ΑΔ^2 : ΑΘ \times ΝΔ = (ΑΔ : ΔΝ) \times (ΔΑ : ΑΘ)$· εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $ΓΗ^2 : ΑΗ \times ΗΔ = ΑΔ^2 : ΝΔ \times ΑΘ$. [ἀνάπαλιν, ὡς τὸ $ΑΗ \times ΗΔ : ΓΗ^2 = ΝΔ \times ΛΘ : ΑΔ^2$].



56

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀντικειμένων συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἀφῶν (σημείων ἐπαφῆς) ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας, καὶ ἀπὸ τῶν ἀφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἄλλης τομῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς *τετράγωνον τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν καὶ τὴν διχοτομίαν ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς πρὸς τὴν μεταξὺ* H448 *τῆς αὐτῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως δυνάμει, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης.*

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ὧν κέντρον τὸ Ο, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΕΖΗ, ΒΕΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΛΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΕ ἡ ΑΜ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΒΝ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔ τομῆς τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒΜ, ΓΑΝ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΒΝ, ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΑΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΛΒ.

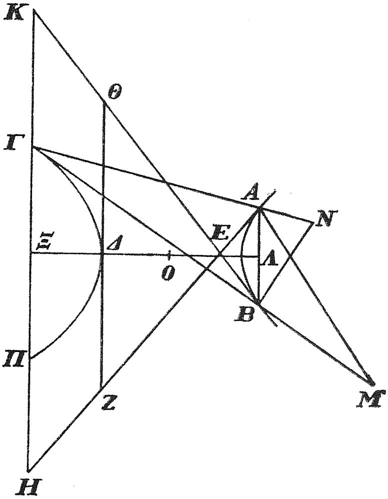
ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Γ, Δ παρὰ τὴν ΑΒ αἱ ΗΓΚ, ΘΔΖ· φανερὸν δή, ὅτι [ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΛΒ] ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΔ τῇ ΔΖ καὶ ἡ ΚΞ τῇ ΞΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΞΓ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΗΠ. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΔΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΒΕΘ, ΘΔ, καὶ παρὰ τὴν ΔΘ ἡ ΚΗ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ, τὸ ἀπὸ ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΚΓ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΘΔ τῷ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΠΚΓ τῷ ὑπὸ ΚΓΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ ἀπὸ ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ. ἔστι δὲ καί, H450 *ὡς τὸ ὑπὸ ΖΑ, ΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, τὸ ὑπὸ ΗΑ, ΚΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ* τὸ τετράγωνον τῆς ἑνούσης τὰς ἁφὰς τὸ γινόμενον τοῦ λόγου εἰς τὸ τετράγωνον, τῆς ἑνούσης τὸ σημεῖον συναντήσεως καὶ τῆς διχοτομίας, δηλ. τῆς ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς διχοτομίας μέχρι τῆς ἄλλης τομῆς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀπὸ τῆς τομῆς αὐτῆς μέχρι τοῦ σημείου συναντήσεως, ἐπὶ τὸν λόγον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς ἐφαπτομένας πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς ἑνούσης τὰς ἁφάς.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, τῶν ὁποίων κέντρον εἶναι τὸ Ο, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΕΖΗ, ΒΕΘΚ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἃς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Λ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΛΕ ἃς διαχθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Δ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ ἡ ΑΜ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ ἡ ΒΝ, ἃς ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς ΓΔ τομῆς τὸ Γ, καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΓΒΜ, ΓΑΝ. Λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $ΒΝ \times ΑΜ : ΑΒ^2 = (ΛΔ^2 : ΔΕ^2) \times (ΑΕ \times ΕΒ : 1/4 ΑΒ^2)$, τουτέστι $= (ΛΔ^2 : ΔΕ^2) \times (ΑΕ \times ΕΒ : ΑΛ \times ΛΒ)$.

Διότι ἃς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Γ, Δ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ αἱ ΗΓΚ, ΘΔΖ· εἶναι φανερὸν λοιπὸν ὅτι [εἶναι $ΑΛ = ΛΒ$] καὶ ἡ $ΘΔ = ΔΖ$ καὶ ἡ $ΚΞ = ΞΗ$ (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι δὲ καὶ ἡ $ΞΓ = ΞΠ$ (1, 47)· ὥστε καὶ ἡ $ΓΚ = ΗΠ$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΔΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΒΕΘ, ΘΔ, καὶ πρὸς τὴν ΔΘ εἶναι παράλληλος ἡ ΚΗ, εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $ΒΘ^2 : ΘΔ^2 = ΒΚ^2 : ΠΚ \times ΚΓ$ (θ. 18). Εἶναι δὲ τὸ μὲν $ΘΔ^2 = ΘΔ \times ΔΖ$, τὸ δὲ $ΠΚ \times ΚΓ = ΚΓ \times ΓΗ$· εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $ΒΘ^2 : ΘΔ \times ΔΖ = ΒΚ^2 : ΚΓ \times ΓΗ$. Εἶναι δὲ καί, ὡς $ΖΑ \times ΘΒ : ΘΒ^2 = ΗΑ \times ΚΒ : ΚΒ^2$ (Εὐκλ. 6, 2, 4 . 6, 12)· δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι $ΑΖ \times ΘΒ : ΘΔ \times ΔΖ = ΚΒ \times$

ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ λόγος τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ μέσου λαμβανομένου σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ καὶ τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ· καὶ ἔστιν, ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ, τὸ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ ὑπὸ ΛΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΔΒ· ὁ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΛΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΔΒ. ἔχει δὲ τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΒΚ πρὸς ΚΓ καὶ τοῦ τῆς ΑΗ πρὸς ΗΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΚΒ πρὸς ΚΓ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΒΝ πρὸς ΒΑ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΜΑ πρὸς ΑΒ καὶ τοῦ τῆς ΝΒ πρὸς ΒΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΒΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΛΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΔΒ.

ΑΗ : ΚΓ x ΓΗ (Εὐκλ. 5, 22). Ὁ δὲ λόγος ΑΖ x ΘΒ : ΘΔ x ΔΖ λαμβανομένου ὡς μέσου τοῦ ΘΕ x ΕΖ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν λόγων (ΑΖ x ΘΒ : ΘΕ x ΕΖ) x (ΘΕ x ΕΖ : ΘΔ x ΔΖ)· καὶ εἶναι ΑΖ x ΘΒ : ΘΕ x ΕΖ = $ΛΔ^2 : ΔΕ^2$ (Εὐκλ. 6, 4 . 5, 12, 16), καὶ ΘΕ x ΕΖ : ΘΔ x ΔΖ = ΑΕ x ΕΒ : ΑΛ x ΛΒ· εἶναι ἄρα ΑΗ x ΒΚ : ΚΓ x ΓΗ = ($ΛΔ^2 : ΔΕ^2$) x (ΑΕ x ΕΒ : ΑΛ x ΛΒ). Εἶναι δὲ καὶ ΑΗ x ΚΒ: ΚΓ x ΓΗ = (ΒΚ : ΚΓ) x (ΑΗ : ΗΓ). Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΚΒ : ΚΓ = ΜΑ : ΑΒ , ὡς



δὲ ἡ ΑΗ : ΗΓ = ΒΝ : ΒΑ (Εὐκλ. 6, 4)· εἶναι ἄρα (ΜΑ : ΑΒ) x (ΝΒ : ΒΑ) = ($ΛΔ^2 : ΔΕ^2$) x (ΑΕ x ΕΒ : ΑΛ x ΛΒ) = ΑΜ x ΒΝ : $ΑΒ^2$.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Α

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

Β

Γ

Δ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Ε

Η

Θ

Ι

Κ

Λ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Μ

Ο

Π

Σ

Τ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Υ

Φ

Χ

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ — ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ «ΠΑΤΡΙΣ» Α.Ε
ΑΘΗΝΑΙ, ΙΕΡΑ ΟΔΟΣ 58
ΤΗΛΕΦ. 3465.347—3468.216