ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

ΤΟΜΟΣ Γ′

ΒΙΒΛΙΑ Δ′, Ε′ ΚΑΙ ΣΤ′

ΥΠΟ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ

ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

ΤΕΧΝΙΚΟΝ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τῆς ἐκδόσεως τοῦ γ΄ τόμου

ἐπεμελήθη

ΚΩΝ. Γ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

ΤΟΜΟΣ Γ′

ΒΙΒΛΙΑ Δ′, Ε′ ΚΑΙ ΣΤ′

ΥΠΟ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ

ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

τινὲς εἰς τὸ κείμενον τῶν ε′ καὶ στ′ βιβλίων τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, ἐκδόσεως Paul ver Eecke, 1922 καὶ 1959, Παρίσιοι.

Σελὶς 106, 14. Ἀντὶ *καὶ ἐπὶ τούτου*, νὰ τεθῇ ⟨*ΑΒΓ*⟩ *καὶ ἐπὶ τούτου*

» 164, 21. Ἀντὶ *εὐθεῖα ΑΓ*, νὰ τεθῇ *εὐθεῖα ΑΓ* ⟨*κέντρον δὲ τὸ Ε*⟩

» 165, 5. Ἀντὶ *ἡ εὐθεῖα ΕΚ*, νὰ τεθῇ *ἡ εὐθεῖα ΕΚ* ⟨ *τέμνουσα τὴν ΟΒ εἰς τὸ σημεῖον Λ. Halley* ⟩

» 168, 2. Ἀντὶ *συναντᾷ τὴν ΕΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ*, νὰ τεθῇ *συναντᾷ τὴν ΕΒ* ⟨ *ἐκβαλλομένην* ⟩ *εἰς τὸ σημεῖον Δ* ⟨ *καὶ τὴν τομὴν εἰς τὸ σημεῖον Α. Halley* ⟩

» 172, 26. Ἀντὶ *ἠγμέναι πρὸς τὸν ἄξονα*, νὰ τεθῇ *ἠγμέναι* ⟨ *ἐκ τῆς τομῆς* ⟩ *πρὸς τὸν ἄξονα*

» 174, 7. Ἀντὶ *ὑπὸ τοῦ ἡμιάξονος*, νὰ τεθῇ *ὑπὸ τοῦ* ⟨*μεγάλου*⟩ *ἡμιάξονος*

» 177, 10. Ἀντὶ *Καὶ ἂν ἡ πλαγία*, νὰ τεθῇ *Καὶ ἂν* ⟨*εἰς ὑπερβολὴν*⟩ *ἡ πλαγία*

» 180, 14. Ἀντὶ *Ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΗ, ΒΠ, ΓΝ, ΚΜ καὶ ἂς ληφθῇ*, νὰ τεθῇ *Ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΗ, ΒΠ, ΓΝ, ΚΜ* ⟨*ἐπὶ τὸν ἄξονα*⟩, *καὶ ἂς ληφθῇ*

» 183, 11. Ἀντὶ *ἡ κάθετος ἡ Υξ*, νὰ τεθῇ *ἡ κάθετος* ⟨*ἐπὶ τὸν ἄξονα*⟩ *ἡ Υξ*

Σελὶς	194, 12.	Ἀντὶ *αἱ εὐθεῖαι ΚΓ*, νὰ τεθῇ *αἱ εὐθεῖαι ⟨ἐλάχισται⟩ ΚΓ*,
»	197, 4.	Ἀντὶ *ἡ κάθετος ΑΗ*, νὰ τεθῇ *ἡ κάθετος ⟨ἐπὶ τὸν ἄξονα⟩ ΑΗ*
»	249, 4.	Ἀντὶ *πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, καὶ ὅτι*, νὰ τεθῇ *πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ ⟨ἐκ τοῦ Ζ⟩, καὶ ὅτι*
»	250, 13.	Ἀντὶ *συναντᾷ τὴν ΗΕ*, νὰ τεθῇ *συναντᾷ τὴν ⟨ἐκβληθεῖσαν⟩ ΗΕ*
»	270, 6.	Ἀντὶ *τῆς αὐτῆς εὐθείας : ΗΝ*, νὰ τεθῇ *τῆς αὐτῆς εὐθείας ⟨ΖΜ⟩ : ΗΝ*
»	285, 11.	Ἀντὶ *καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι αἱ ΑΕ, ΒΗ*, νὰ τεθῇ *καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ⟨ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα⟩ αἱ ΑΕ, ΒΗ*
»	288, 22.	Ἀντὶ *τὰ ὁποῖα ἐφαρμοζόμενα θὰ εἶναι ἴσα*, νὰ τεθῇ *τὰ ὁποῖα ἐφαρμοζόμενα ⟨ἐπ᾿ ἄλληλα⟩ θὰ εἶναι ἴσα*
»	290, 18.	Ἀντὶ *ἄγονται ἐπὶ τὸν ἄξονα*, νὰ τεθῇ *ἄγονται ⟨ἐκ τῆς τομῆς⟩ ἐπὶ τὸν ἄξονα*
»	303, 19.	Ἀντὶ *πρὸς τὰς εὐθείας ΓΖ, ΜΟ*, νὰ τεθῇ *πρὸς τὰς εὐθείας ⟨ἐφαπτομένας⟩ ΓΖ, ΜΟ.*

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

H2 # ΚΩΝΙΚΩΝ δ′

Ἀπολλώνιος Ἀττάλῳ χαίρειν.

Πρότερον μὲν ἐξέθηκα γράψας πρὸς Εὔδημον τὸν Περγαμηνὸν τῶν συντεταγμένων ἡμῖν κωνικῶν ἐν ὀκτὼ βιβλίοις τὰ πρῶτα τρία, μετηλλαχότος δ᾽ ἐκείνου τὰ λοιπὰ διεγνωκότες πρός σε γράψαι διὰ τὸ φιλοτιμεῖσθαί σε μεταλαμβάνειν τὰ ὑφ᾽ ἡμῶν πραγματευόμενα πεπόμφαμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος σοι τὸ τέταρτον. περιέχει δὲ τοῦτο, κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα δυνατόν ἐστι τὰς τῶν κώνων τομὰς ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλειν, ἐάνπερ μὴ ὅλαι ἐπὶ ὅλας ἐφαρμόζωσιν, ἔτι κώνου τομὴ καὶ κύκλου περιφέρεια ταῖς ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα συμβάλλουσι, καὶ ἐκτὸς τούτων ἄλλα οὐκ ὀλίγα ὅμοια τούτοις. τούτων δὲ τὸ μὲν προειρημένον Κόνων ὁ Σάμιος ἐξέθηκε πρὸς Θρασυδαῖον οὐκ ὀρθῶς ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν ἀναστραφείς· διὸ καὶ μετρίως αὐτοῦ ἀνθήψατο Νικοτέλης ὁ Κυρηναῖος. περὶ δὲ τοῦ δευτέρου μνείαν μόνον πεποίηται ὁ Νικοτέλης σὺν τῇ πρὸς τὸν Κόνωνα ἀντιγραφῇ ὡς δυναμένου δειχθῆναι, δεικνυμένῳ δὲ οὔτε ὑπ᾽ αὐτοῦ τούτου οὔθ᾽ ὑπ᾽ ἄλλου τινὸς ἐντετεύχαμεν. τὸ μέντοι τρίτον
H4 καὶ τὰ ἄλλα τὰ ὁμογενῆ τούτοις ἁπλῶς ὑπὸ οὐδενὸς νενοημένα εὕρηκα. πάντα δὲ τὰ λεχθέντα, ὅσοις οὐκ ἐντέτευχα, πολλῶν καὶ ποικίλων προσεδεῖτο ξενιζόντων θεωρημάτων,

ΚΩΝΙΚΩΝ

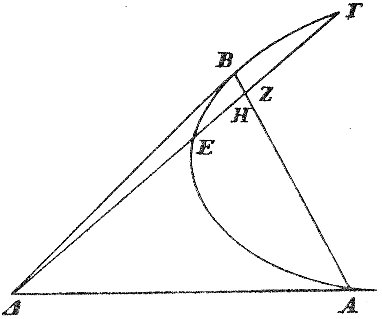
Βιβλίον 4ον

᾿Απολλώνιος ᾿Αττάλῳ χαίρειν.

Πρό τινος ἐδημοσίευσα ἐκ τῶν ὀκτὼ βιβλίων τῶν κωνικῶν μου τὰ πρῶτα τρία, ἀποστείλας αὐτὰ εἰς τὸν ἐκ Περγάμου Εὔδημον, ὅταν δὲ ἐκεῖνος ἀπέθανε, σκεφθέντες ν᾿ ἀποστείλωμεν τὰ ὑπόλοιπα πρὸς σέ, ἐπειδὴ ἐνδιαφέρεσαι νὰ λάβῃς γνῶσιν τῶν ὑφ᾿ ἡμῶν πραγματευομένων, ἀπεστείλαμεν εἰς σὲ ἐπὶ τοῦ παρόντος τὸ τέταρτον. Περιέχει δὲ τοῦτο, κατὰ πόσα σημεῖα εἶναι δυνατὸν αἱ κωνικαὶ τομαὶ νὰ συναντῶνται μεταξύ των καὶ μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἐὰν ὅλαι δὲν συμπίπτωσι μὲ ὅλας, καὶ ἀκόμη κώνου τομὴ καὶ περιφέρεια κύκλου κατὰ πόσα σημεῖα συναντῶνται μὲ τὰς ἀντικειμένας (τοὺς ἀπέναντι κλάδους ὑπερβολῆς), καὶ ἐκτὸς τούτων ἄλλα ὄχι ὀλίγα ὅμοια πρὸς ταῦτα. ᾿Εκ τούτων δὲ τὸ μὲν προειρημένον ὁ Κόνων ὁ Σάμιος ἀνεκοίνωσε πρὸς τὸν Θρασυδαῖον ὄχι ὀρθῶς κατὰ τοὺς ἀποδεικτικοὺς τρόπους· διὰ τὸν λόγον αὐτὸν τὸν ἐπέκρινε δικαίως ὁ Νικοτέλης ὁ Κυρηναῖος. Περὶ δὲ τοῦ δευτέρου, ἀναφέρει μόνον ὁ Νικοτέλης εἰς τὴν διὰ τὸν Κόνωνα ἀνακοίνωσίν του, ὅτι δύναται τοῦτο ν᾿ ἀποδειχθῇ, ἀλλὰ δὲν εὕρομεν τοιαύτην ἀπόδειξιν οὔτε ὑπὸ τούτου οὔτε ὑπὸ ἄλλου τινός. Τὸ τρίτον δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ ὅμοια πρὸς ταῦτα δὲν τὰ εὑρῆκα καθόλου. ῞Ολα δὲ τὰ λεχθέντα, ὅσα δὲν ἀπήντησα, εἶχον ἀνάγκην πολλῶν καὶ ποικίλων ἀσυνηθίστων *ὧν τὰ μὲν πλεῖστα τυγχάνω ἐν τοῖς πρώτοις τρισὶ βιβλίοις ἐκτεθεικώς, τὰ δὲ λοιπὰ ἐν τούτῳ. ταῦτα δὲ θεωρηθέντα χρείαν ἱκανὴν παρέχεται πρός τε τὰς τῶν προβλημάτων συνθέσεις καὶ τοὺς διορισμούς. Νικοτέλης μὲν γὰρ ἕνεκα τῆς πρὸς τὸν Κόνωνα διαφορᾶς οὐδεμίαν ὑπὸ τῶν ἐκ τοῦ Κόνωνος εὑρημένων εἰς τοὺς διορισμούς φησιν ἔρχεσθαι χρείαν οὐκ ἀληθῆ λέγων· καὶ γὰρ εἰ ὅλως ἄνευ τούτων δύναται κατὰ τοὺς διορισμοὺς ἀποδίδοσθαι, ἀλλά τοί γε δι' αὐτῶν ἔστι κατανοεῖν προχειρότερον ἔνια, οἷον ὅτι πλεοναχῶς ἢ τοσαυταχῶς ἂν γένοιτο, καὶ πάλιν ὅτι οὐκ ἂν γένοιτο· ἡ δὲ τοιαύτη πρόγνωσις ἱκανὴν ἀφορμὴν συμβάλλεται πρὸς τὰς ζητήσεις, καὶ πρὸς τὰς ἀναλύσεις δὲ τῶν διορισμῶν εὔχρηστα τὰ θεωρήματά ἐστι ταῦτα. χωρὶς δὲ τῆς τοιαύτης εὐχρηστίας καὶ δι' αὐτὰς τὰς ἀποδείξεις ἄξια ἔσται ἀποδοχῆς· καὶ γὰρ ἄλλα πολλὰ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι διὰ τοῦτο καὶ οὐ δι' ἄλλο τι ἀποδεχόμεθα.*

α′

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ τομῇ προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἐφάπτεται, ἡ δὲ τέμνει κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον ὅλη ἡ τέμνουσα πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς γραμμῆς, τοῦτον



θεωρημάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ περισσότερα τὰ ἔχω ἐκθέσει εἰς τὰ πρῶτα τρία βιβλία, τὰ ἄλλα δὲ θεωρήματα τὰ ἐκθέτω εἰς αὐτὸ ἐδῶ. Τὰ ἐξετασθέντα δὲ θεωρήματα παρέχουσιν ἀρκετὰς βάσεις καὶ διὰ τὰς συνθέσεις τῶν προβλημάτων καὶ διὰ τοὺς διορισμοὺς (δηλ. τὰς ἱκανὰς καὶ ἀναγκαίας συνθήκας ἐπιλύσεως ἑνὸς προβλήματος). Διότι ὁ μὲν Νικοτέλης, ἕνεκα τῆς ἀντιγνωμίας πρὸς τὸν Κόνωνα, λέγει ὅτι οὐδεμίαν ἀνάγκην ἔχει τῶν ὑπὸ τοῦ Κόνωνος εὑρεθέντων διορισμῶν, χωρὶς νὰ εἶναι τοῦτο ἀληθές· διότι καὶ ἂν τυχὸν ἦτο δυνατὸν ἄνευ τῶν θεωρημάτων τούτων (τῶν ὑπὸ τοῦ Κόνωνος εὑρεθέντων) νὰ καθορισθῶσιν οἱ προσδιορισμοί, μερικοὶ ἐξ αὐτῶν εἶναι δυνατὸν νὰ καταστήσωσι θεωρήματά τινα εὐκολώτερα, ὡς π. χ. ἂν πρόβλημά τι ἦτο δυνατὸν κατὰ πολλοὺς τρόπους νὰ λυθῇ, ἢ κατὰ πόσους τρόπους, ἢ πάλιν ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ λυθῇ· μία τοιαύτη ἐκ τῶν προτέρων γνῶσις παρέχει ἱκανὴν ἀφορμὴν εἰς τὰς ἐρεύνας, καὶ οὕτω τὰ θεωρήματα αὐτὰ διὰ τὰς ἀναλύσεις τῶν διορισμῶν εἶναι εὔχρηστα. Ἀλλὰ καὶ χωρὶς τὴν τοιαύτην ὠφέλειαν, εἶναι τὰ θεωρήματα αὐτὰ διὰ τὰς ἀποδείξεις ἄξια ἀποδοχῆς· διότι εἰς τὰ Μαθηματικὰ διὰ τὸν λόγον αὐτόν, καὶ ὄχι δι' ἄλλον, ἀποδεχόμεθα πολλὰ θεωρήματα.

1

Ἐὰν τομῆς κώνου ἢ περιφερείας κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσπίπτωσι πρὸς τὴν τομὴν δύο εὐθεῖαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία μὲν ἐφάπτεται, ἡ ἄλλη δὲ τέμνει αὐτὴν κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ὃν λόγον ἔχει ὅλη ἡ τέμνουσα πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ καὶ τοῦ σημείου καὶ τῆς γραμ-

H6 *τμηθῇ ἡ ἐντὸς ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὥστε τὰς ὁμολόγους εὐθείας πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ εἶναι, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς γραμμῆς.*

ἔστω γὰρ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Β, ἡ δὲ ΔΕΓ τεμνέτω τὴν τομὴν κατὰ τὰ Ε, Γ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, τοῦτον ἐχέτω ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ.

λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἀγομένη συμπίπτει τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

[ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΓ τέμνει τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, οὐκ ἔσται διάμετρος αὐτῆς. δυνατὸν ἄρα ἐστὶ διὰ τοῦ Δ διάμετρον ἀγαγεῖν· ὥστε καὶ ἐφαπτομένην.] ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ τεμνέτω τὴν ΕΓ, εἰ δυνατόν, μὴ κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΒΔ, ΔΑ, καὶ ἐπὶ τὰς ἁφάς ἐστιν ἡ ΒΑ, καὶ διῆκται ἡ ΓΔ τέμνουσα τὴν μὲν τομὴν κατὰ τὰ Γ, Ε, τὴν δὲ ΑΒ κατὰ τὸ Η, ἔσται ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ. οὐκ ἄρα ἡ ΒΑ καθ᾽ ἕτερον σημεῖον τέμνει τὴν ΓΕ· κατὰ τὸ Ζ ἄρα.

H8 *β′*

Ταῦτα μὲν κοινῶς ἐπὶ πασῶν τῶν τομῶν δείκνυται, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς μόνης· ἐὰν ἡ μὲν ΔΒ ἐφάπτηται, ἡ μῆς (τομῆς), κατὰ τοῦτον νὰ τμηθῇ ἡ ἐντὸς ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα, ὥστε αἱ ὁμόλογοι εὐθεῖαι νὰ εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν θὰ συναντήση τὴν γραμμὴν (τομήν), καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως πρὸς τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς γραμμῆς.

Διότι ἔστω τομὴ κώνου ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΒ ἂς ἐφάπτηται κατὰ τὸ Β, ἡ δὲ ΔΕΓ ἂς τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ τὰ Ε, Γ, καὶ ἂς εἶναι ἡ ΓΔ : ΔΕ = ΓΖ : ΖΕ.

Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸ Ζ ἀγομένη συναντᾷ τὴν τομήν, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως πρὸς τὸ Δ ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

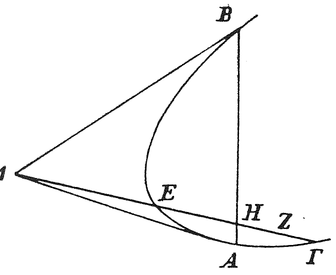
['Επειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΓ τέμνει τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα δὲν θὰ εἶναι διάμετρος αὐτῆς. Εἶναι ἄρα δυνατὸν ν' ἀχθῇ διὰ τοῦ Δ διάμετρος· ὥστε καὶ ἐφαπτομένη.] Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΒΑ ἂς τέμνῃ τὴν ΕΓ, εἰ δυνατόν, ὄχι κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ κατὰ τὸ Η. 'Επειδὴ λοιπὸν ἐφάπτονται αἱ ΒΔ, ΔΑ, καὶ ἡ ΒΑ συνδέει τὰς ἀφάς, καὶ ἡ ΓΔ ἔχει διαχθῇ τέμνουσα τὴν μὲν τομὴν κατὰ τὰ Γ, Ε τὴν δὲ ΑΒ κατὰ τὸ Η, θὰ εἶναι ὡς ἡ ΓΔ : ΔΕ = ΓΗ : ΗΕ (3, 37)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἔχει ληφθῇ, ὡς ἡ ΓΔ : ΔΕ = ΓΖ : ΖΕ. Δὲν τέμνει ἄρα ἡ ΒΑ εἰς ἄλλο σημεῖον τὴν ΓΕ· τὴν τέμνει ἄρα κατὰ τὸ Ζ.

2

Ταῦτα μὲν ἀποδεικνύονται γενικῶς δι' ὅλας τὰς τομάς· ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς δὲ μόνον εἰδικώτερον ἰσχύουσι τὰ ἑξῆς· ἐὰν ἡ μὲν δὲ ΔΓ τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Γ, τὰ δὲ Ε, Γ περιέχῃ τὴν κατὰ τὸ Β ἁφήν, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, ὁμοίως ἡ ἀπόδειξις γενήσεται· δυνατὸν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἄλλην ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν ΔΑ καὶ τὰ λοιπὰ τῆς ἀποδείξεως ὁμοίως ποιεῖν.

γ′

Τῶν αὐτῶν ὄντων τὰ Ε, Γ σημεῖα μὴ περιεχέτωσαν τὴν κατὰ τὸ Β ἁφὴν μεταξὺ αὐτῶν, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἐντὸς ἔστω τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας. δυνατὸν ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἑτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τὴν ΔΑ καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως ἀποδεικνύειν.



δ′

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν αἱ μὲν Ε, Γ συμπτώσεις τὴν κατὰ τὸ Β ἁφὴν περιέχωσι, τὸ δὲ Δ σημεῖον ᾖ ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ ἀντι-

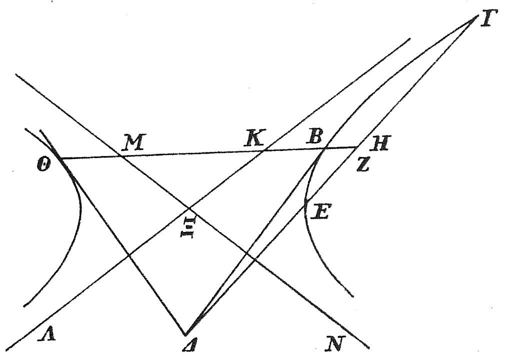
ΔΒ ἐφάπτηται, ἡ δὲ ΔΓ τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Γ, τὰ δὲ Ε, Γ περιέχουσι τὴν κατὰ τὸ Β ἀφήν, καὶ τὸ σημεῖον Δ εἶναι ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, ἡ ἀπόδειξις θὰ γίνῃ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· διότι εἶναι δυνατὸν ἀπὸ τοῦ σημείου Δ νὰ φέρωμεν ἄλλην εὐθεῖαν ἐφαπτομένην, τὴν ΔΑ καὶ νὰ ἐνεργήσωμεν τὴν ἀπόδειξιν κατὰ τὰ λοιπὰ ὁμοίως.

3

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, τὰ σημεῖα Ε, Γ ἂς μὴ περιέχωσι μεταξύ των τὴν κατὰ τὸ Β ἀφήν, τὸ δὲ σημεῖον Δ ἔστω ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας. Εἶναι ἄρα δυνατὸν ἀπὸ τοῦ Δ νὰ φέρωμεν ἄλλην ἐφαπτομένην, τὴν ΔΑ καὶ τὰ ἄλλα νὰ τὰ ἀποδείξωμεν ὁμοίως.

4

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν τὰ σημεῖα συναντήσεως Ε, Γ περιέχωσι τὴν κατὰ τὸ Β ἀφήν, τὸ δὲ σημεῖον Δ εἶναι εἰς τὴν ἐφεξῆς γωνίαν, τῆς γωνίας τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα θὰ συναντήσῃ τὴν ἀντικειμένην τομήν, καὶ ἡ ἀπὸ



κειμένῃ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς ἀντικειμένης.

H10 *ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Β, Θ καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΚΛ, ΜΞΝ καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ὑπὸ ΛΞΝ γωνίᾳ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐφαπτέσθω μὲν ἡ ΔΒ, τεμνέτω δὲ ἡ ΔΓ, καὶ αἱ Ε, Γ συμπτώσεις περιεχέτωσαν τὴν Β ἁφήν, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἐχέτω ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ.*

δεικτέον, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ Θ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΒ πιπτέτω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Ζ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ.

ε'

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπί τινος ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ αὐτῇ ἀσυμπτώτῳ.

ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΜΝ. δεικτέον, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΜΝ παράλληλος ἀγομένη ἐπὶ τὸ Ζ πεσεῖται.

H12 *μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω ἡ ΒΗ. ἔσται δή, ὡς ἡ* τοῦ σημείου συναντήσεως ἀγομένη εὐθεῖα θὰ ἐφάπτηται τῆς ἀντικειμένης.

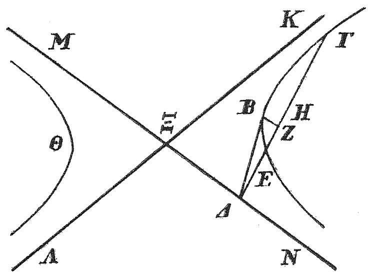
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Β, Θ καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΚΛ, ΜΞΝ καὶ τὸ σημεῖον Δ εἰς τὴν γωνίαν ΛΞΝ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἂς ἐφάπτηται μὲν ἡ ΔΒ, ἂς τέμνῃ δὲ ἡ ΔΓ, καὶ τὰ σημεῖα συναντήσεως Ε, Γ ἂς περιέχωσι τὴν ἁφὴν Β, καὶ ἂς εἶναι ΓΔ : ΔΕ = ΓΖ : ΖΕ.

Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸ Ζ ἀγομένη θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν Θ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως πρὸς τὸ Δ θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΘ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΘΒ ἂς διέλθῃ, εἰ δυνατόν, ὄχι διὰ τοῦ Ζ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. Εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ : ΔΕ = ΓΗ : ΗΕ (3, 37)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐλήφθη ὡς ἡ ΓΔ : ΔΕ = ΓΖ : ΖΕ.

5

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν τὸ σημεῖον Δ εἶναι ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἀγομένη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν αὐτὴν ἀσύμπτωτον.



Διότι ἂς ληφθῶσι τὰ αὐτά, καὶ ἔστω τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΜΝ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΜΝ θὰ πέσῃ εἰς τὸ Ζ.

Διότι ἔστω, ὅτι δὲν θὰ πέσῃ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω ἡ ΒΗ.

ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ· ὅπερ ἀδύνατον.

ϛ′

Ἐὰν ὑπερβολῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ πρὸς τὴν τομὴν διαχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἐφάπτεται, ἡ δὲ παράλληλος [ᾖ] μιᾷ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένῃ ἀπὸ τῆς παραλλήλου μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ σημείου ἴση ἐπ᾽ εὐθείας ἐντὸς τῆς τομῆς τεθῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸ γινόμενον σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἔστω πρότερον ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας τὸ Δ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἡ μὲν ΒΔ ἐφαπτέσθω, ἡ δὲ ΔΕΖ παράλληλος ἔστω τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ τεμνέτω τὴν ΔΕ, εἰ δυνατόν, μὴ κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ καθ᾽ ἕτερόν τι τὸ Η. ἔσται δὴ ἴση ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση.

H14

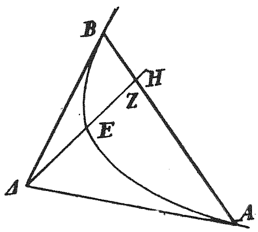
ζ′

Τῶν αὐτῶν ὄντων τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐν τῇ ἐφεξῆς γω-

Θὰ εἶναι λοιπὸν (3,35), ὡς ἡ ΓΔ : ΔΕ = ΓΗ : ΗΕ· ὅπερ ἀδύνατον.

6

Ἐὰν σημεῖόν τι ληφθῇ ἐκτὸς ὑπερβολῆς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διαχθῶσι πρὸς τὴν τομὴν δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων ἡ μὲν μία ἐφάπτεται, ἡ ἄλλη δὲ [εἶναι] παράλληλος πρὸς μίαν τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ἀπὸ τῆς παραλλήλου μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ σημείου ἴση ἐπ' εὐθείας τεθῇ ἐντὸς τῆς τομῆς, ἡ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὸ γινόμενον σημεῖον ἀγομένη εὐθεῖα θὰ συμπέσῃ πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς.

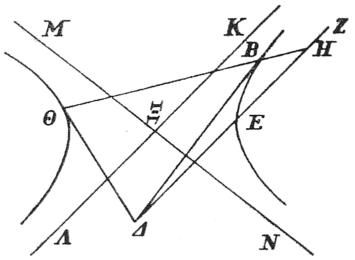


Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΕΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖόν τι τὸ Δ, καὶ ἔστω προηγουμένως τὸ Δ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΒΔ ἂς ἐφάπτηται, ἡ δὲ ΔΕΖ ἔστω παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην τῶν ἀσυμπτώτων καὶ ἂς ληφθῇ ΔΕ = ΕΖ. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸ Ζ ἀγομένη εὐθεῖα θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως ἀγομένη πρὸς τὸ Δ θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΒΑ ἂς τέμνῃ τὴν ΔΕ, εἰ δυνατόν, ὄχι κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ κατ' ἄλλο τι σημεῖον τὸ Η. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΔΕ = ΕΗ (3, 30)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐλήφθη ἡ ΔΕ = ΕΖ.

7

Τῶν αὐτῶν δεδομένων ἔστω, ὅτι τὸ σημεῖον Δ εἶναι εἰς τὴν *νίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης. λέγω, ὅτι καὶ οὕτως τὰ αὐτὰ συμβήσεται.*



ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ ΔΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΒ πιπτέτω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Ζ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση.

η′

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω τὰ αὐτά.

λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπ᾿ ἄκραν τὴν ἀποληφθεῖσαν ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ, ἐφ᾿ ἧς ἔσται τὸ Δ σημεῖον.

ἔστω γὰρ τὰ εἰρημένα, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β παράλληλος τῇ ΜΝ ἤχθω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΗ. ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση.

θ′

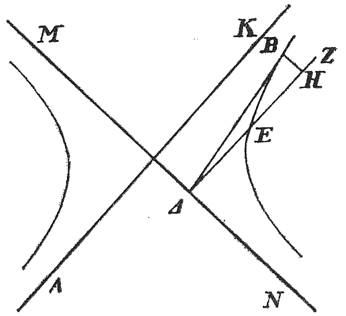
Ἐὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσι τέμνουσαι κώνου τομὴν ἢ κύκλου περιφέρειαν ἑκατέρα κατὰ
H16 *δύο σημεῖα, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ ὅλαι πρὸς τὰς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένας, οὕτως αἱ ἐντὸς ἀπολαμβανόμεναι διαιρεθῶ-*

ἐφεξῆς γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων. Λέγω, ὅτι καὶ ὑπ' αὐτὰς τὰς συνθήκας θὰ συμβῶσι τὰ αὐτά.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη ἡ ΔΘ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΘΒ ἂς διέλθῃ, εἰ δυνατόν, ὄχι διὰ τοῦ Ζ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΔΕ = ΕΗ (3, 34)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἔχει ληφθῇ ἡ ΔΕ = ΕΖ.

8

Τῶν αὐτῶν δεδομένων ἔστω, ὅτι τὸ σημεῖον Δ εἶναι ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ ἂς γίνωσι τὰ αὐτά.



Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς ἀφῆς μέχρι τοῦ ἄκρου τῆς ἀποληφθείσης ἀγομένη εὐθεῖα θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶναι τὸ σημεῖον Δ.

Διότι ἔστωσαν τὰ εἰρημένα, καὶ ἂς ληφθῇ ΕΖ = ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΜΝ, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΗ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΔΕ = ΕΗ (3, 34)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐλήφθη ΔΕ = ΕΖ.

9

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι τομὴν κώνου ἢ περιφέρειαν κύκλου κατὰ δύο σημεῖα ἑκατέρα, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ ὅλαι πρὸς τὰς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένας, οὕτως διαιρεθῶσιν αἱ ἐντὸς ἀπολαμβανόμεναι, ὥστε αἱ ὁμόλογοι νὰ σιν, ὥστε τὰς ὁμολόγους πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ εἶναι, ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγόμεναι ἐφάψονται τῆς γραμμῆς.

ἔστω γὰρ τῶν προειρημένων γραμμῶν τις ἡ ΑΒ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ τέμνουσαι τὴν γραμμὴν ἡ μὲν κατὰ τὰ Θ, Ε, ἡ δὲ κατὰ τὰ Ζ, Η, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΔΕ πρὸς ΘΔ, τοῦτον ἐχέτω ἡ ΕΛ πρὸς ΛΘ, ὃν δὲ ἡ ΔΖ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται ἐφ᾽ ἑκάτερα τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῆς τομῆς.

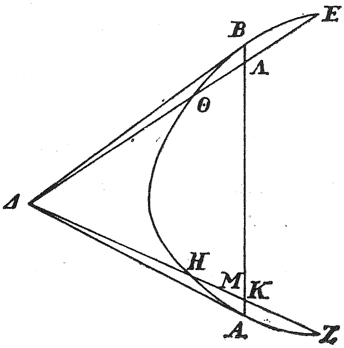
ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΔ, ΖΔ ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα τέμνει τὴν τομήν, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Δ διάμετρον ἀγαγεῖν τῆς τομῆς· ὥστε καὶ ἐφαπτομένας ἐφ᾽ ἑκάτερα. ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΒ, ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Λ, Κ, ἀλλ᾽ ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἢ δι᾽ οὐδετέρου.

ἐρχέσθω πρότερον διὰ μόνου τοῦ Λ καὶ τεμνέτω τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Μ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΜ πρὸς ΜΗ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ.

ἐὰν δὲ ἡ ΒΑ μηδὲ δι᾽ ἑτέρου τῶν Λ, Κ πορεύηται, ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΔΕ, ΔΖ συμβήσεται τὸ ἄτοπον.

εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων συναντήσεων πρὸς τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι θὰ ἐφάπτωνται τῆς γραμμῆς (τομῆς).

Διότι ἔστω γραμμή τις ἐκ τῶν προειρημένων ἡ ΑΒ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Δ ἂς διαχθῶσιν αἱ ΔΕ, ΔΖ τέμνουσαι τὴν γραμμὴν ἡ μὲν μία κατὰ τὰ Θ, Ε, ἡ δὲ ἄλλη κατὰ τὰ Ζ, Η, καὶ ἂς εἶναι ΔΕ : ΘΔ = ΕΛ : ΛΘ, καὶ ΔΖ : ΔΗ = ΖΚ : ΚΗ. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Λ πρὸς τὸ Κ ἀγομένη θὰ συναντήσῃ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τὴν τομήν, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων συναντήσεων πρὸς τὸ Δ ἀγόμεναι θὰ ἐφάπτωνται τῆς τομῆς.



Διότι, ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΕΔ, ΖΔ τέμνει τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, εἶναι δυνατὸν νὰ φέρωμεν ἀπὸ τοῦ Δ διάμετρον τῆς τομῆς· ὥστε εἶναι δυνατὸν νὰ φέρωμεν καὶ πρὸς τὰ δύο σημεῖα ἐφαπτομένας. Ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΒ, ΔΑ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΒΑ, ἂς μὴ διέρχηται, εἰ δυνατόν, διὰ τῶν Λ, Κ, ἀλλ' ἢ διὰ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἢ διὰ κανενός.

Ἂς διέρχηται προηγουμένως μόνον διὰ τοῦ Λ καὶ ἂς τέμνῃ τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Μ. Εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΖΔ : ΔΗ = ΖΜ : ΜΗ (3, 37)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἔχει ληφθῇ, ὡς ἡ ΖΔ : ΔΗ = ΖΚ : ΚΗ.

Ἐὰν δὲ ἡ ΒΑ δὲν διέρχηται διὰ κανενὸς τῶν σημείων Λ, Κ, θὰ συμβῇ τὸ ἄτοπον ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΔΕ, ΔΖ.

H18

ι'

Ταῦτα μὲν κοινῶς, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς μόνης· ἐὰν τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ὑπάρχῃ, αἱ δὲ τῆς μιᾶς εὐθείας συμπτώσεις περιέχωσι τὰς τῆς ἑτέρας συμπτώσεις, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, τὰ αὐτὰ συμβήσεται τοῖς προειρημένοις, ὡς προείρηται ἐν τῷ $\overline{β}$ θεωρήματι.

ια'

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν αἱ τῆς μιᾶς συμπτώσεις μὴ περιέχωσι τὰς τῆς ἑτέρας συμπτώσεις, τὸ μὲν Δ σημεῖον ἐντὸς ἔσται τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, καὶ ἡ καταγραφὴ καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ τῷ $\overline{θ}$.

ιβ'

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν περιέχωσιν αἱ τῆς μιᾶς εὐθείας συμπτώσεις τὰς τῆς ἑτέρας, καὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης ᾖ, ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ συμπεσεῖται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΕΗ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΝΞ, ΟΠ, καὶ κέντρον τὸ Ρ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐν τῇ ὑπὸ ΞΡΠ γωνίᾳ, καὶ ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ τέμνουσαι τὴν ὑπερβολὴν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, καὶ περιεχέσθω τὰ Ε, Θ ὑπὸ τῶν Ζ, Η, καὶ ἔστω, ὡς μὲν ἡ ΕΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ, ὡς δὲ

10

Ταῦτα μὲν γενικῶς, εἰδικώτερον δὲ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἰσχύουσι τὰ ἑξῆς· ἐὰν τὰ μὲν ἄλλα ὑπάρχωσι τὰ αὐτά, αἱ δὲ συναντήσεις τῆς μιᾶς εὐθείας περιέχωσι τὰς συναντήσεις τῆς ἄλλης, καὶ τὸ σημεῖον Δ εὑρίσκηται ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, θὰ συμβῶσι τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ προειρημένα, ὡς προελέχθη εἰς τὸ β′ θεώρημα.

11

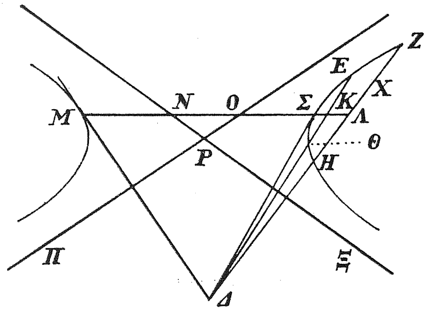
Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν αἱ συναντήσεις τῆς μιᾶς εὐθείας δὲν περιέχωσι τὰς συναντήσεις τῆς ἄλλης, τὸ μὲν σημεῖον Δ θὰ εἶναι ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, καὶ τὸ σχῆμα καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι τὰ αὐτά, ὅπως εἰς τὸ 9ον θεώρημα.

12

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν αἱ συναντήσεις τῆς μιᾶς εὐθείας περιέχωσι τὰς συναντήσεις τῆς ἄλλης, καὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον εὑρίσκηται εἰς τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων σχηματιζομένης, ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν ἀντικειμένην τομήν, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων τῶν συναντήσεων ἀγόμεναι πρὸς τὸ Δ εὐθεῖαι θὰ ἐφάπτωνται τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΕΗ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΝΞ, ΟΠ, καὶ κέντρον τὸ Ρ, καὶ τὸ σημεῖον Δ ἔστω ἐντὸς τῆς γωνίας ΞΡΠ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΕ, ΔΖ τέμνουσαι ἑκατέρα τὴν ὑπερβολὴν κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ἂς περιέχωνται τὰ Ε, Θ ὑπὸ τῶν Ζ, Η, καὶ ἔστω, ὡς μὲν ἡ ΕΔ : ΔΘ = ΕΚ : ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΖΔ : ΔΗ =

H20 *ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ. δεικτέον, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Λ συμπεσεῖταί τε τῇ ΕΖ τομῇ καὶ τῇ ἀντικειμένῃ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν.*



ἔστω δὴ ἀντικειμένη ἡ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔΜ, ΔΣ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΣ, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Λ, ἀλλ' ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἢ δι' οὐδετέρου.

ἐρχέσθω πρότερον διὰ τοῦ Κ καὶ τεμνέτω τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Χ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΧΖ πρὸς ΧΗ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ.

ἐὰν δὲ μηδὲ δι' ἑτέρου τῶν Κ, Λ ἔρχηται ἡ ΜΣ, ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΕΔ, ΔΖ τὸ ἀδύνατον συμβαίνει.

ιγ'

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων ᾖ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ ὑπάρχῃ, ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ, ἐφ' ἧς ἐστι τὸ σημεῖον, καὶ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ σημεῖον ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ἔστω γὰρ ὑπερβολὴ καὶ ἀσύμπτωτοι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ

ΖΛ : ΛΗ. Πρέπει νὰ δειχθῆ, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Λ διερχομένη εὐθεῖα θὰ συναντήση καὶ τὴν τομὴν ΕΖ καὶ τὴν ἀντικειμένην, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων συναντήσεων πρὸς τὸ Δ ἀγόμεναι θὰ ἐφάπτωνται τῶν τομῶν.

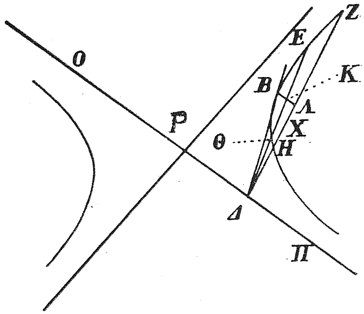
Ἔστω λοιπὸν ἀντικειμένη ἡ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔΜ, ΔΣ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῆ ἡ ΜΣ, εἰ δυνατόν, ἂς μὴ διέρχηται διὰ τῶν Κ, Λ, ἀλλ' ἢ διὰ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἢ διὰ κανενός.

Ἂς διέρχηται προηγουμένως διὰ τοῦ Κ καὶ ἂς τέμνη τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Χ. Εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΖΔ : ΔΗ = ΧΖ : ΧΗ (3, 37)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐλήφθη, ὡς ἡ ΖΔ : ΔΗ = ΖΛ : ΛΗ.

Ἐὰν δὲ ἡ ΜΣ δὲν διέρχηται διὰ κανενὸς τῶν Κ, Λ, τὸ ἀδύνατον συμβαίνει εἰς ἑκατέραν τῶν ΕΔ, ΔΖ.

13

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν τὸ σημεῖον Δ εὑρίσκηται ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ ὑπάρχωσι τὰ αὐτά, ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη παράλληλος θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτου, ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶναι τὸ σημεῖον, καὶ ἐκβαλλομένη θὰ συναντήση τὴν τομήν, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως πρὸς τὸ σημεῖον θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς.



Διότι ἔστω ὑπερβολὴ καὶ ἀσύμπτωτοι, καὶ ἂς ληφθῆ ἐπὶ

μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τὸ Δ, καὶ διήχθωσαν αἱ εὐθεῖαι καὶ
διῃρήσθωσαν, ὡς εἴρηται, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη
H22 τῆς τομῆς ἡ ΔΒ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀ-
γομένη ἥξει διὰ τῶν Κ, Λ.

εἰ γὰρ μή, ἤτοι διὰ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἐλεύσεται ἢ δι᾽ οὐδετέρου.

ἐρχέσθω διὰ μόνου τοῦ Κ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΧ πρὸς ΧΗ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀγομένη διὰ μόνου τοῦ Κ ἐλεύσεται· δι᾽ ἀμφοτέρων ἄρα.

ιδ′

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἡ μὲν ΔΕ τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἡ δὲ ΔΗ κατὰ μόνον τὸ Η παράλληλος οὖσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ γένηται, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΔΘ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ, τῇ δὲ ΔΗ ἴση ἐπ᾽ εὐθείας τεθῇ ἡ ΗΛ, ἡ διὰ τῶν Κ, Λ σημείων ἀγομένη παράλληλός τε ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ὁμοίως γὰρ τῷ προειρημένῳ ἀγαγὼν τὴν ΔΒ ἐφαπτομένην λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀσύμπτωτον ἀγομένη ἥξει διὰ τῶν Κ, Λ σημείων.

εἰ οὖν διὰ τοῦ Κ μόνου ἥξει, οὐκ ἔσται ἡ ΔΗ τῇ ΗΛ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἃς διαχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι καὶ ἃς διαιρεθῶσιν, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἃς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΒ. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΠΟ θὰ διέλθη διὰ τῶν Κ, Λ.

Διότι, ἐὰν δὲν διέλθη, θὰ διέλθη ἢ διὰ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἢ διὰ κανενός.

Ἂς διέρχηται μόνον διὰ τοῦ Κ. Εἶναι ἄρα τότε, ὡς ἡ ΖΔ : ΔΗ = ΖΧ : ΧΗ (3, 35)· ὅπερ ἄτοπον· δὲν θὰ διέλθη ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Β παραλλήλως πρὸς τὴν ΠΟ ἀγομένη μόνον διὰ τοῦ Κ· θὰ διέλθη ἄρα καὶ διὰ τῶν δύο.

14

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἐὰν τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἡ μὲν ΔΕ τέμνη τὴν τομὴν εἰς δύο σημεῖα, ἡ δὲ ΔΗ μόνον εἰς τὸ Η, ἐνῷ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ γίνη, ὡς ἡ ΔΕ : ΔΘ = ΕΚ : ΚΘ, πρὸς δὲ τὴν ΔΗ τεθῇ ἐπ' εὐθείας ἴση ἡ ΗΛ, ἡ διὰ τῶν σημείων Κ, Λ ἀγομένη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον καὶ θὰ συναντᾷ τὴν τομήν, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως ἀγομένη πρὸς τὸ Δ εὐθεῖα θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς.

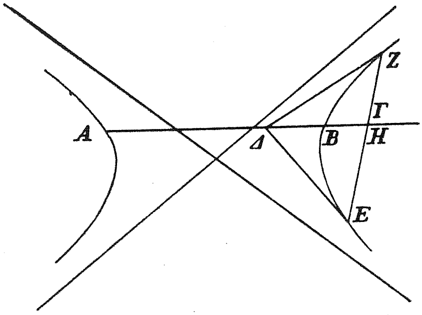
Διότι ὁμοίως, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον, ἀφοῦ φέρω τὴν ἐφαπτομένην ΔΒ λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον ΠΟ θὰ διέλθη διὰ τῶν σημείων Κ, Λ.

Ἐὰν λοιπὸν διέλθη μόνον διὰ τοῦ Κ δὲν θὰ εἶναι ἡ ΔΗ ἴση

ἴση· ὅπερ ἄτοπον. εἰ δὲ διὰ τοῦ *Λ* μόνου, οὐκ ἔσται, ὡς
H24 ἡ *ΕΔ* πρὸς *ΔΘ*, ἡ *ΕΚ* πρὸς *ΚΘ*. εἰ δὲ μήτε διὰ τοῦ *Κ* μήτε διὰ τοῦ *Λ*, κατ᾽ ἀμφότερα συμβήσεται τὸ ἄτοπον. δι᾽ ἀμφοτέρων ἄρα ἐλεύσεται.

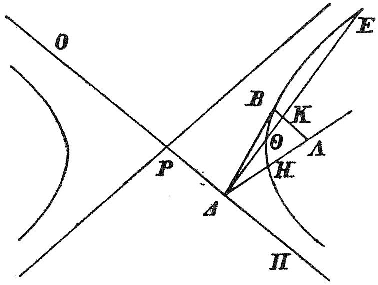
ιε´

᾽Εὰν ἐν ἀντικειμέναις ληφθῇ τι σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἡ μὲν ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ τέμνῃ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων, καὶ ὡς ἔχει ἡ μεταξὺ τῆς ἑτέρας τομῆς, ἧς οὐκ ἐφάπτεται ἡ εὐθεῖα, καὶ τοῦ σημείου πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς ἑ-



τέρας τομῆς, οὕτως ἔχῃ μείζων τις εὐθεῖα τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῆς κειμένην ἐπ᾽ εὐθείας τε καὶ πρὸς τῷ αὐτῷ πέρατι τῇ ὁμολόγῳ, ἡ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς μείζονος εὐθείας ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἀγομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

πρὸς τὴν ΗΛ (3, 34)· ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν δὲ διέλθῃ μόνον διὰ τοῦ Λ, δὲν θὰ εἶναι, ὡς ἡ ΕΔ : ΔΘ = ΕΚ : ΚΘ (3, 35). Ἐὰν δὲ



δὲν διέλθῃ οὔτε διὰ τοῦ Κ οὔτε διὰ τοῦ Λ, θὰ συμβῇ τὸ ἄτοπον καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις. Συνεπῶς θὰ διέρχηται διὰ τῶν δύο σημείων.

15

Ἐὰν εἰς ἀντικειμένας ληφθῇ σημεῖόν τι μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν μία εὐθεῖα ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ἡ ἄλλη δὲ τέμνῃ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων, καὶ (νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία) ὡς εἶναι ἡ μεταξὺ τῆς ἄλλης τομῆς, τῆς ὁποίας δὲν ἐφάπτεται ἡ εὐθεῖα, καὶ τοῦ σημείου πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς ἄλλης τομῆς, οὕτως νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τις εὐθεῖα τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῆς κειμένην ἐπ' εὐθείας καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ πέρας πρὸς τὴν ὁμόλογον, ἡ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς μεγαλυτέρας εὐθείας πρὸς τὴν ἁφὴν ἀγομένη εὐθεῖα θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως πρὸς τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον μεταξὺ τῶν τομῶν τὸ Δ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΖ διήχθω ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΑΔΒ τέμνουσα τὰς τομάς, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἐχέτω ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ. δεικτέον, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ἐπεὶ γὰρ τὸ Δ σημεῖον ἐντός ἐστι τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας, δυνατόν ἐστι καὶ ἑτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Δ. ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΕ ἐρχέ-
H26 *σθω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Γ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. ἔσται δή, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ.*

ιϛʹ

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω.

λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς ἀντικειμένης τομῆς.

ἔστω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς Α τομῆς ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι μεταξὺ τῶν τομῶν τὸ Δ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΖ ἂς διαχθῇ ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΑΔΒ τέμνουσα τὰς τομάς, καὶ ἂς εἶναι ΑΔ : ΔΒ = ΑΓ : ΓΒ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸ Γ εὐθεῖα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως πρὸς τὸ Δ ἀγομένη θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Δ καὶ ἄλλη ἐφαπτομένη (2, 49). Ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΕ ἂς διέρχηται, εἰ δυνατόν, ὄχι διὰ τοῦ Γ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. Θὰ εἶναι λοιπόν, ὡς ἡ ΑΔ : ΔΒ = ΑΗ : ΗΒ (3, 37)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐλήφθη, ὡς ἡ ΑΔ : ΔΒ = ΑΓ : ΓΒ.

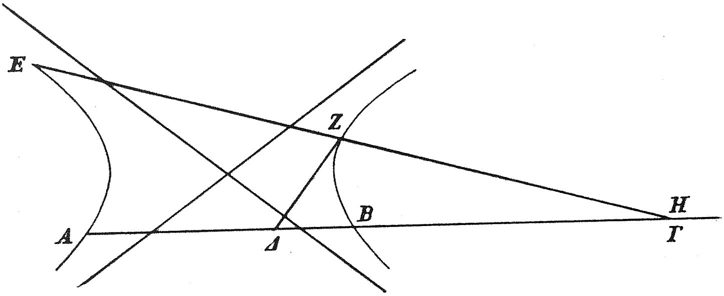
16

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἔστω τὸ σημεῖον Δ εὑρισκόμενον εἰς τὴν ἐφεξῆς πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένην γωνίαν, καὶ τὰ λοιπὰ ἂς γίνωσι τὰ αὐτά.

Λέγω, ὅτι ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸ Γ ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν ἀντικειμένην τομήν, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως πρὸς τὸ Δ ἀγομένη θὰ ἐφάπτηται τῆς ἀντικειμένης τομῆς.

Διότι ἔστω τὰ αὐτά, καὶ τὸ σημεῖον Δ εὑρισκόμενον εἰς τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς Α ἡ ΔΕ, καὶ ἂς ἐπι-

ἡ ΕΖ καὶ ἐκβαλλομένη, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω ἐπὶ τὸ Γ, ἀλλ᾽ ἐπὶ τὸ Η. ἔσται δή, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΑΔ πρὸς



ΔΒ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ.

ιζʹ

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐπί τινος τῶν ἀσυμπτώτων.

H28 *λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ, ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ σημεῖον.*

ἔστωσαν τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ζ παράλληλος, καὶ εἰ δυνατόν, μὴ πιπτέτω ἐπὶ τὸ Γ, ἀλλ᾽ ἐπὶ τὸ Η. ἔσται δή, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ· ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐπὶ τὸ Γ πίπτει.

ιηʹ

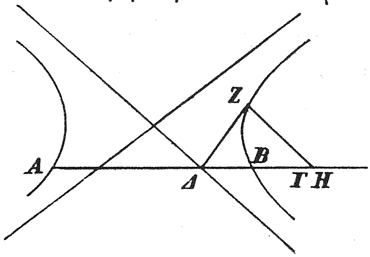
Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ληφθῇ τι σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι διαχθῶσι τέμνουσαι ἑ-

ζευχθῇ ἡ ΕΖ καὶ ἐκβαλλομένη, εἰ δυνατόν, ἂς μὴ διέρχηται διὰ τοῦ Γ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. Θὰ εἶναι λοιπόν, ὡς ἡ ΑΗ : ΗΒ = ΑΔ : ΔΒ (3, 39)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐλήφθη, ὡς ἡ ΑΔ : ΔΒ = ΑΓ : ΓΒ.

17

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἔστω τὸ σημεῖον Δ ἐπί τινος τῶν ἀσυμπτώτων.

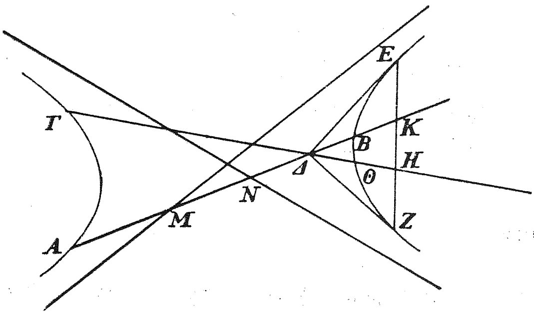
Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸ Γ ἀγομένη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τὸ σημεῖον.



Ἔστωσαν τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ προηγούμενα, τὸ δὲ σημεῖον Δ νὰ εἶναι ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ζ παράλληλος, καὶ εἰ δυνατόν, ἂς μὴ συναντᾷ τὸ Γ, ἀλλὰ τὸ Η. Θὰ εἶναι λοιπόν, ὡς ἡ ΑΔ : ΔΒ = ΑΗ : ΗΒ (3, 36)· ὅπερ ἄτοπον. Ἡ ἀγομένη ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ παραλλήλως πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον θὰ συναντήσῃ τὸ Γ.

18

Ἐὰν εἰς ἀντικειμένας ληφθῇ σημεῖόν τι μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ διαχθῶσι δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι ἑκατέ-



κατέραν τῶν τομῶν, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ μεταξὺ τῆς μιᾶς τομῆς πρὸς τὰς μεταξὺ τῆς ἑτέρας τομῆς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, οὕτως ἔχωσιν αἱ μείζους τῶν ἀπολαμβανομένων μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων πρὸς τὰς ὑπεροχὰς αὐτῶν, ἡ διὰ τῶν περάτων ἀγομένη εὐθεῖα τῶν μειζόνων εὐθειῶν ταῖς τομαῖς συμπεσεῖται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐφάψονται τῶν γραμμῶν.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον μεταξὺ τῶν τομῶν. πρότερον ὑποκείσθω ἐν τῇ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένῃ γωνίᾳ καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ ΑΔΒ, ΓΔΘ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΔ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΓΔ
H30 τῆς ΔΘ, διότι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΝ τῇ ΑΜ. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἐχέτω ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἐχέτω ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ. λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις ἐφάψονται τῆς τομῆς.

ἐπεὶ γὰρ τὸ Δ ἐντός ἐστι τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, δυνατὸν ἀπὸ τοῦ Δ δύο ἐφαπτομένας ἀγαγεῖν. ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ· ἐλεύσεται δὴ διὰ τῶν Κ, Η σημείων [εἰ γὰρ μή, ἢ διὰ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἐλεύσεται μόνου ἢ δι᾿ οὐδετέρου]. εἰ μὲν γὰρ δι᾿ ἑνὸς αὐτῶν μόνου, ἡ ἑτέρα τῶν εὐθειῶν εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσεται καθ᾿ ἕτερον σημεῖον· ὅπερ ἀδύνατον· εἰ δὲ δι᾿ οὐδετέρου, ἐπ᾿ ἀμφοτέρων τὸ ἀδύνατον συμβήσεται.

H32

ιθ'

Εἰλήφθω δή τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ ραν τῶν τομῶν, καὶ εἰς οἷον λόγον εὑρίσκονται αἱ μεταξὺ τῆς μιᾶς τομῆς πρὸς τὰς μεταξὺ τῆς ἄλλης τομῆς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἰς τὸν αὐτὸν λόγον νὰ εἶναι αἱ μεγαλύτεραι τῶν ἀπολαμβανομένων μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων πρὸς τὰς διαφορὰς αὐτῶν, ἡ διὰ τῶν περάτων ἀγομένη εὐθεῖα τῶν μεγαλυτέρων εὐθειῶν θὰ συναντηθῇ μὲ τὰς τομάς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων συναντήσεως πρὸς τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι θὰ ἐφάπτωνται τῶν γραμμῶν.

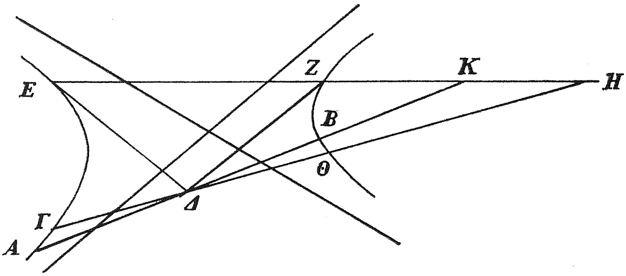
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ σημεῖον Δ μεταξὺ τῶν τομῶν. Ἃς ληφθῇ τοῦτο πρῶτον εἰς τὴν ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένην γωνίαν, καὶ διὰ τοῦ Δ ἃς διαχθῶσιν αἱ ΑΔΒ, ΓΔΘ. Εἶναι ἄρα ἡ μὲν $ΑΔ > ΔΒ$, ἡ δὲ $ΓΔ > ΔΘ$, διότι εἶναι ἡ $ΒΝ = ΑΜ$. Καὶ ἃς γίνῃ $ΑΔ : ΔΒ = ΑΚ : ΚΒ$ καὶ $ΓΔ : ΔΘ = ΓΗ : ΗΘ$. Λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η διερχομένη εὐθεῖα θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὰ σημεῖα συναντήσεως ἀγόμεναι θὰ ἐφάπτωνται τῆς τομῆς.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εἶναι ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, εἶναι δυνατὸν ἀπὸ τοῦ Δ νὰ ἀχθῶσι δύο ἐφαπτόμεναι (2, 49). Ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΖ· θὰ διέλθῃ λοιπὸν αὕτη διὰ τῶν σημείων Κ, Η [διότι ἐὰν δὲν διέλθῃ, ἢ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ ἑνὸς μόνον ἐξ αὐτῶν ἢ διὰ κανενός]. Διότι ἐὰν μὲν διέλθῃ δι' ἑνὸς ἐξ αὐτῶν μόνον, ἡ ἄλλη τῶν εὐθειῶν θὰ τμηθῇ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον κατ' ἄλλο σημεῖον (3, 37)· ὅπερ ἀδύνατον· ἐὰν δὲ δὲν διέλθῃ διὰ κανενὸς τὸ ἀδύνατον θὰ συμβῇ καὶ εἰς τὰ δύο.

19

Ἃς ληφθῇ τώρα τὸ σημεῖον Δ εἰς τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ διήχθωσαν αἱ εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς τομάς, καὶ διηρήσθωσαν, ὡς εἴρηται.

λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται



ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν.

ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν τομῶν αἱ ΔΕ, ΔΖ· ἡ ἄρα διὰ τῶν Ε, Ζ διὰ τῶν Κ, Η ἐλεύσεται. εἰ γὰρ μή, ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἥξει ἢ δι' οὐδετέρου, καὶ πάλιν ὁμοίως συναχθήσεται τὸ ἄτοπον.

[κ'

Ἐὰν δὲ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπί τινος ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ γένηται τὰ αὐτά, ἡ διὰ τῶν περάτων τῶν ὑπεροχῶν ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ, ἐφ' ἧς ἐστι τὸ σημεῖον, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν σύμπτωσιν τῆς τομῆς καὶ τῆς διὰ τῶν περάτων ἠγμένης εὐθείας ἐφάψεται τῆς τομῆς.

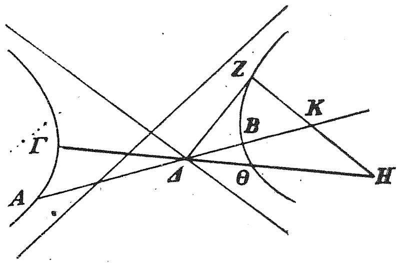
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω. λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων γωνίας, καὶ ἂς διαχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς τομάς, καὶ ἂς διαιρεθῶσιν, ὡς ἐλέχθη.

Λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν σημείων Κ, Η διερχομένη, ὅταν ἐκβληθῇ θὰ συναντήσῃ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων συναντήσεων πρὸς τὸ Δ ἀγόμεναι θὰ ἐφάπτωνται τῶν τομῶν.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν τομῶν αἱ ΔΕ, ΔΖ· ἡ διὰ τῶν Ε, Ζ ἄρα διερχομένη θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Κ, Η. Διότι, ἐὰν δὲν διέλθῃ ἢ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἢ διὰ κανενός, καὶ πάλιν καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ συναχθῇ τὸ ἄτοπον (3, 39).

20

Ἐὰν δὲ τὸ ληφθὲν σημεῖον εὑρίσκηται ἐπί τινος τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ γίνωσι τὰ αὐτά, ἡ διὰ τῶν περάτων τῶν διαφορῶν ἀγομένη εὐθεῖα θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον, ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶναι τὸ σημεῖον, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸ σημεῖον συμπτώσεως τῆς τομῆς καὶ τῆς διὰ τῶν περάτων ἀχθείσης εὐθείας θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς.

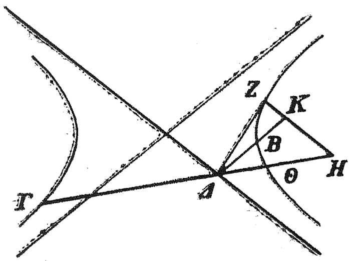


Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ σημεῖον Δ ἔστω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ ἂς γίνωσι τὰ αὐτά. Λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η διερχομένη εὐθεῖα θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν, τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη ἡ ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον, ἐφ' ἧς ἐστι τὸ Δ, ἤχθω εὐθεῖα. ἥξει δὴ διὰ τῶν Κ, Η. εἰ γὰρ μή, ἢ διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἥξει ἢ δι' οὐδετέρου, καὶ τὰ αὐτὰ ἄτοπα συμβήσεται τοῖς πρότερον.

κα'

Ἔστωσαν πάλιν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἡ μὲν ΔΒΚ τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον συμβαλλέτω τὸ Β παράλληλος οὖσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ δὲ ΓΔΘ ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν συμβαλλέτω, καὶ ἔστω, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ, τῇ δὲ ΔΒ ἴση ἔστω ἡ ΒΚ.



H34 λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η σημείων συμπεσεῖται τῇ τομῇ καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ, ἐφ' ἧς ἐστι τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον, ἐφ' ἧς ἐστι τὸ Δ, ἤχθω εὐθεῖα· ἥξει δὴ διὰ τῶν Κ, Η. εἰ γὰρ μή, τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα συμβήσεται.

κβ'

Ἔστωσαν δὴ ὁμοίως αἱ ἀντικείμεναι καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως πρὸς τὸ Δ ἀγομένη θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς.

Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη ἡ ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τὸ Δ. Θὰ διέλθῃ λοιπὸν αὕτη διὰ τῶν σημείων Κ, Η. Διότι, ἐὰν δὲν διέλθῃ, θὰ διέλθῃ ἢ διὰ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἢ διὰ κανενός, καὶ θὰ συμβῶσι τὰ αὐτὰ ἄτοπα, ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα (3, 36).

21

Ἔστωσαν πάλιν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἡ μὲν ΔΒΚ ἂς συναντᾷ τὴν τομὴν εἰς ἓν μόνον σημεῖον, τὸ Β, οὖσα παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ δὲ ΓΔΘ ἂς συναντᾷ ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ ἔστω, ὡς ἡ $\Gamma\Delta : \Delta\Theta = \Gamma H : H\Theta$, καὶ ἔστω $\Delta B = BK$.

Λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν σημείων Κ, Η διερχομένη θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν καὶ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἡ ἀγομένη εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως πρὸς τὸ Δ, θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς.

Διότι ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ Δ· θὰ διέλθῃ λοιπὸν αὕτη διὰ τῶν Κ, Η. Διότι, ἐὰν δὲν διέλθῃ θὰ συμβῶσι τὰ προηγουμένως λεχθέντα ἄτοπα (3, 36).

22

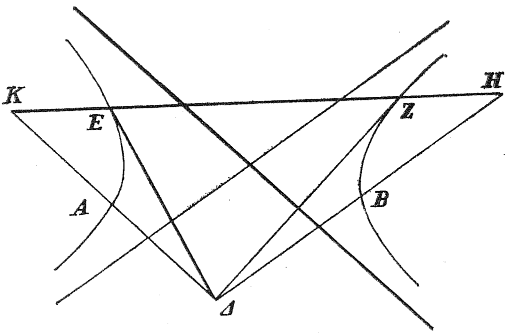
Ἔστωσαν τώρα ὁμοίως αἱ ἀντικείμεναι καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ Δ σημεῖον ὁμοίως εἰλήφθω, καὶ ἡ μὲν ΓΔΘ τέμνουσα τὰς τομάς, ἡ δὲ ΔΒ παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἔστω, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ, τῇ δὲ ΔΒ ἴση ἡ ΒΚ.

λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων.

ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ καί, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Η, ἀλλ' ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου ἢ δι' οὐδετέρου [ἥξει]. εἰ μὲν διὰ τοῦ Η μόνου, οὐκ ἔσται ἡ ΔΒ τῇ ΒΚ ἴση, ἀλλ' ἑτέρᾳ· ὅπερ ἄτοπον.
H36 εἰ δὲ διὰ μόνου τοῦ Κ, οὐκ ἔσται, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ, ἀλλ' ἄλλη τις πρὸς ἄλλην. εἰ δὲ δι' οὐδετέρου τῶν Κ, Η, ἀμφότερα τὰ ἀδύνατα συμβήσεται.

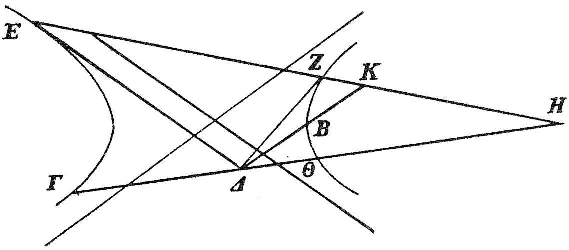
κγ'

Ἔστωσαν πάλιν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιε-



καὶ τὸ σημεῖον Δ ἂς ληφθῇ ὁμοίως, καὶ ἡ μὲν ΓΔΘ νὰ τέμνῃ τὰς τομάς, ἡ δὲ ΔΒ παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἔστω, ὡς ἡ ΓΔ : ΔΘ = ΓΗ : ΗΘ, καὶ ἡ ΔΒ = ΒΚ.

Λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η διερχομένη εὐθεῖα θὰ συναντήσῃ



ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων συναντήσεων εὐθεῖαι ἀγόμεναι πρὸς τὸ Δ θὰ ἐφάπτωνται τῶν ἀντικειμένων.

Ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΖ καί, εἰ δυνατόν, ἂς μὴ διέρχηται διὰ τῶν Κ, Η, ἀλλὰ [νὰ διέρχηται] ἢ διὰ τοῦ ἑνὸς τούτων ἢ διὰ κανενός. Ἐὰν μὲν διέρχηται μόνον διὰ τοῦ Η, δὲν θὰ εἶναι ἡ ΔΒ = ΒΚ, ἀλλὰ πρὸς ἄλλην (3, 31)· ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν δὲ διέρχηται μόνον διὰ τοῦ Κ, δὲν θὰ εἶναι, ὡς ἡ ΓΔ : ΔΘ = ΓΗ : ΗΘ, ἀλλὰ ἄλλη τις πρὸς ἄλλην (3, 39). Ἐὰν δὲ δὲν διέρχηται δι' οὐδενὸς ἐκ τῶν Κ, Η, θὰ συμβῶσιν καὶ τὰ δύο ἀδύνατα.

23

Ἔστωσαν πάλιν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ σημεῖον Δ νὰ εὑρίσκηται εἰς τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων *χομένης, καὶ ἡ μὲν ΒΔ ἤχθω τὴν Β τομὴν καθ' ἓν μόνον τέμνουσα, τῇ δὲ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων παράλληλος, ἡ δὲ ΔΑ τὴν Α τομὴν ὁμοίως, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΔΑ τῇ ΑΚ.*

λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμβάλλει ταῖς τομαῖς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἀγόμεναι ἐφάψονται τῶν τομῶν.

ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΖ, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Η. ἤτοι δὴ διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἐλεύσεται ἢ δι' οὐδετέρου, καὶ ἤτοι ἡ ΔΑ H38 *οὐκ ἔσται ἴση τῇ ΑΚ, ἀλλὰ ἄλλῃ τινί· ὅπερ ἄτοπον· ἢ ἡ ΔΒ τῇ ΒΗ οὐκ ἴση, ἢ οὐδετέρα οὐδετέρᾳ, καὶ πάλιν ἐπ' ἀμφοτέρων τὸ αὐτὸ ἄτοπον συμβήσεται. ἥξει ἄρα ἡ ΕΖ διὰ τῶν Κ, Η.*

κδ'

Κώνου τομὴ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ οὐ συμβάλλει οὕτως, ὥστε μέρος μέν τι εἶναι ταὐτόν, μέρος δὲ μὴ εἶναι κοινόν.

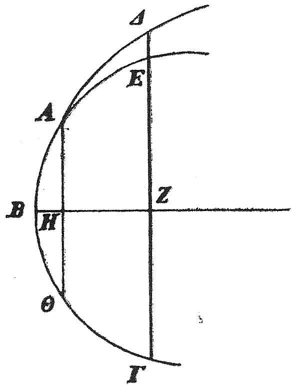
εἰ γὰρ δυνατόν, κώνου τομὴ ἡ ΔΑΒΓ κύκλου περιφερείᾳ τῇ ΕΑΒΓ συμβαλλέτω, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὸν μέρος τὸ αὐτὸ τὸ ΑΒΓ, μὴ κοινὸν δὲ τὸ ΑΔ καὶ τὸ ΑΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῶν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ, καὶ διὰ τυχόντος σημείου τοῦ Ε τῇ ΑΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΘ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ διὰ περιεχομένης, καὶ ἡ μὲν ΒΔ ἂς ἀχθῇ τέμνουσα τὴν τομὴν Β εἰς ἓν μόνον σημεῖον, νὰ εἶναι δὲ παράλληλος πρὸς τὴν μίαν τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ δὲ ΔΑ τέμνουσα ὁμοίως τὴν ἄλλην τομήν, καὶ ἔστω ἡ μὲν ΔΒ = ΒΗ, ἡ δὲ ΔΑ = ΑΚ.

Λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η διερχομένη εὐθεῖα συναντᾷ τὰς τομάς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων συναντήσεων πρὸς τὸ Δ ἀγόμεναι εὐθεῖαι θὰ ἐφάπτωνται τῶν τομῶν.

Ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΖ, εἰ δυνατόν, ἂς μὴ διέρχηται διὰ τῶν Κ, Η. Αὕτη λοιπὸν ἢ θὰ διέρχηται διὰ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἢ διὰ κανενός, ὁπότε ἡ ΔΑ δὲν θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΚ, ἀλλὰ πρὸς ἄλλην τινὰ (3, 31)· ὅπερ ἄτοπον· ἢ ἡ ΔΒ δὲν θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ, ἢ καμμία πρὸς καμμίαν, ὁπότε πάλιν καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις θὰ συμβῇ τὸ αὐτὸ ἄτοπον. Θὰ διέλθῃ ἄρα ἡ ΕΖ διὰ τῶν Κ, Η.

24

Κώνου τομὴ δὲν συναντᾶται πρὸς κώνου τομὴν ἢ περιφέρειαν κύκλου κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε μέρος τι νὰ εἶναι τὸ αὐτὸ (κοινόν), μέρος δὲ νὰ μὴ εἶναι κοινόν.

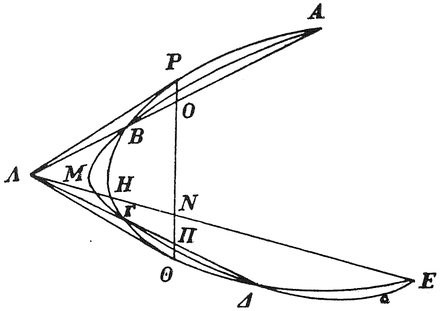


Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, κώνου τομὴ ἡ ΔΑΒΓ ἂς συναντᾷ περιφέρειαν κύκλου τὴν ΕΑΒΓ, καὶ ἔστω κοινὸν μέρος αὐτῶν τὸ αὐτὸ τὸ ΑΒΓ, μὴ κοινὸν δὲ τὸ ΑΔ καὶ τὸ ΑΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπ᾽ αὐτῶν τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΑ, καὶ διὰ τυχόντος σημείου τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΑΘ παράλληλος ἡ ΔΕΓ, *τοῦ Η διάμετρος ἤχθω ἡ ΒΗΖ. ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΘ ἐφάψεται ἑκατέρας τῶν τομῶν καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ΔΕΓ, καὶ ἔσται ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ ΔΖ τῇ ΖΓ ἴση, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ ΕΖ τῇ ΖΓ ἴση. ὥστε καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ ἐστιν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον.*

κε′

Κώνου τομὴ κώνου τομὴν ἢ κύκλου περιφέρειαν οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα τεσσάρων.

εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω κατὰ πέντε Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ ἔστωσαν αἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε συμπτώσεις ἐφεξῆς μηδεμίαν παραλείπουσαι μεταξὺ αὐτῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τῶν τομῶν ἐπὶ τῆς παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει



H40 *λόγον ἡ ΑΛ πρὸς ΛΒ, ἐχέτω ἡ ΑΟ πρὸς ΟΒ, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ, ἐχέτω ἡ ΔΠ πρὸς ΠΓ. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Π ἐπὶ τὸ Ο ἐπιζευγνυμένη ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῶν τομῶν. συμπιπτέτω δὴ κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΛΡ· ἐφάψονται δὴ αὗται. ἡ ἄρα ΕΛ τέμνει ἑκατέραν τομήν, ἐπείπερ μεταξὺ τῶν Β, Γ σύμπτωσις οὐκ ἔστι. τεμνέτω κατὰ τὰ Μ, Η· ἔσται ἄρα διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομήν, ὡς ἡ ΕΛ* καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΘ κατὰ τὸ σημεῖον Η, καὶ διὰ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ διάμετρος ἡ ΒΗΖ. Ἡ διὰ τοῦ Β ἄρα διερχομένη εὐθεῖα παραλλήλως πρὸς τὴν ΑΘ θὰ ἐφάπτηται ἑκατέρας τῶν τομῶν (1, 32) καὶ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕΓ (Εὐκλ. 1, 30), καὶ θὰ εἶναι εἰς μὲν τὴν μίαν τομὴν ἡ ΔΖ = ΖΓ, εἰς δὲ τὴν ἄλλην ἡ ΕΖ = ΖΓ (1, 46—47). Ὥστε καὶ ἡ ΔΖ = ΖΕ· ὅπερ ἀδύνατον.

25

Κώνου τομὴ δὲν τέμνει κώνου τομὴν ἢ περιφέρειαν κύκλου εἰς περισσότερα τῶν τεσσάρων σημείων.

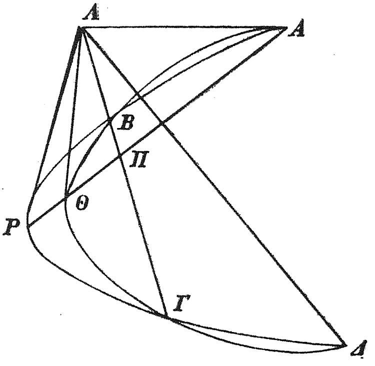
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τὴν τέμνῃ εἰς πέντε σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ ἔστωσαν αἱ συναντήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε ἐν συνεχείᾳ χωρὶς νὰ παραλείπηται καμμία ἐξ αὐτῶν ἐνδιαμέσως, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἂς ἐκβληθῶσιν· θὰ συναντηθῶσι λοιπὸν αὗται ἐπὶ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ὑπερβολῆς ἐκτὸς τῶν τομῶν (2, 24—25). Ἂς συναντηθῶσι λοιπὸν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἂς εἶναι ἡ ΑΛ : ΛΒ = ΑΟ : ΟΒ, καὶ ἡ ΔΛ : ΛΓ = ΔΠ : ΠΓ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Π πρὸς τὸ Ο ἐκβαλλομένη ἀπὸ τὰ δύο μέρη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων τῶν συναντήσεων πρὸς τὸ Λ ἀγόμεναι εὐθεῖαι θὰ ἐφάπτωνται τῶν τομῶν (θ. 9). Ἂς συναντῶνται λοιπὸν εἰς τὰ σημεῖα Θ, Ρ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΛ, ΛΡ· αὗται λοιπὸν θὰ ἐφάπτωνται. Ἡ ΕΛ ἄρα τέμνει ἑκατέραν τομήν, ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν Β, Γ δὲν ὑπάρχει σημεῖον συναντήσεως. Ἂς τὰς τέμνῃ εἰς τὰ σημεῖα Μ, Η· θὰ εἶναι ἄρα διὰ μὲν τὴν μίαν τομήν, ὡς ἡ ΕΛ : ΛΗ =

πρὸς ΛΗ, ἡ ΕΝ πρὸς ΝΗ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν, ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΜ, ἡ ΕΝ πρὸς ΝΜ. τοῦτο δὲ ἀδύνατον· ὥστε καὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς.

ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ, ΔΓ παράλληλοι ὦσιν, ἔσονται μὲν αἱ τομαὶ ἐλλείψεις ἢ κύκλου περιφέρεια. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΟ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα· συμπεσεῖται δὴ ταῖς τομαῖς. συμπιπτέτω δὴ κατὰ τὰ Θ, Ρ. ἔσται δὴ διάμετρος τῶν τομῶν ἡ ΘΡ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΑΒ, ΓΔ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὰς ΑΒ, ΓΔ ἡ ΕΝΜΗ· τεμεῖ ἄρα ἡ ΕΜΗ τὴν ΘΡ καὶ ἑκατέραν τῶν γραμμῶν, διότι ἑτέρα σύμπτωσις οὐκ ἔστι παρὰ τὰς Α, Β, Γ, Δ. ἔσται δὴ διὰ ταῦτα ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ ΝΜ ἴση τῇ ΕΝ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ ΝΕ τῇ ΝΗ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΝΗ ἐστιν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον.

H42

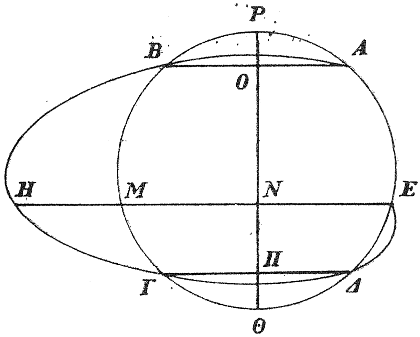
κς'



Ἐὰν τῶν εἰρημένων γραμμῶν τινες καθ' ἓν ἐφάπτωνται σημεῖον ἀλλήλων, οὐ συμβάλλουσιν ἑαυταῖς καθ' ἕτερα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων τινὲς δύο τῶν εἰρημένων γραμμῶν κατὰ τὸ Α σημεῖον. λέγω, ὅτι οὐ συμβάλλουσι κατ' ἄλλα

ΕΝ : ΝΗ, διὰ δὲ τὴν ἄλλην, ὡς ἡ ΕΛ : ΛΜ = ΕΝ : ΝΜ (3, 37). Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον· ὥστε καὶ ἡ ἐξ ἀρχῆς ὑπόθεσις εἶναι ἀδύνατος.



Ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ, ΔΓ εἶναι παράλληλοι, αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ἐλλείψεις ἢ περιφέρεια κύκλου. Ἂς τμηθῶσιν αἱ ΑΒ, ΓΔ εἰς τὸ μέσον εἰς τὰ σημεῖα Ο, Π, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΠΟ καὶ ἂς ἐκβληθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη· θὰ συναντήσῃ λοιπὸν αὕτη τὰς τομάς. Ἂς τὰς συναντήσῃ εἰς τὰ σημεῖα Θ, Ρ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΘΡ διάμετρος τῶν τομῶν (2, 28), τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι θὰ εἶναι αἱ ΑΒ, ΓΔ. Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν ἀπὸ τοῦ Ε παράλληλος πρὸς τὰς ΑΒ, ΓΔ ἡ ΕΝΜΗ· θὰ τέμνῃ ἄρα ἡ ΕΜΗ τὴν ΘΡ καὶ ἑκατέραν τῶν γραμμῶν, διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλο σημεῖον συναντήσεως ἐκτὸς τῶν Α, Β, Γ, Δ. Διὰ τοὺς λόγους λοιπὸν αὐτοὺς θὰ εἶναι εἰς μὲν τὴν μίαν τομὴν ἡ ΝΜ = ΕΝ (1 ὁρισ. 4), εἰς δὲ τὴν ἄλλην ἡ ΝΕ = ΝΗ· ὥστε καὶ ἡ ΝΜ = ΝΗ· ὅπερ ἀδύνατον.

26

Ἐὰν μερικαὶ τῶν εἰρημένων γραμμῶν ἐφάπτωνται μεταξύ των εἰς ἓν σημεῖον δὲν θὰ συναντῶνται μεταξύ των εἰς ἄλλα σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

Διότι ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των δύο ἐκ τῶν εἰρημένων γραμμῶν εἰς τὸ σημεῖον Α. Λέγω, ὅτι δὲν θὰ συναντηθῶσι μεταξύ σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἔστωσαν αἱ συμπτώσεις ἐφεξῆς ἀλλήλαις μηδεμίαν μεταξὺ παραλείπουσαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΑΛ· ἐφάψεται δὴ τῶν δύο τομῶν καὶ συμπεσεῖται τῇ ΓΒ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Λ, καὶ γινέσθω, ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΒ, ἡ ΓΠ πρὸς ΠΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΠ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ ταῖς τομαῖς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐφάψονται τῶν τομῶν. ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΛΡ· ἐφάψονται δὴ αὗται τῶν τομῶν. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνυμένη τέμνει ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ συμβήσεται τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα. οὐκ ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

H44 ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἡ ΓΒ παράλληλος ᾖ τῇ ΑΛ, ὁμοίως τῷ προειρημένῳ ποιησόμεθα τὴν ἀπόδειξιν διάμετρον δείξαντες τὴν ΑΘ.

κζʹ

Ἐὰν τῶν προειρημένων γραμμῶν τινες κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις καθ' ἕτερον.

δύο γὰρ τῶν εἰρημένων γραμμῶν ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β. λέγω, ὅτι ἀλλήλαις κατὰ ἄλλο σημεῖον οὐ συμβάλλουσιν.

των εἰς ἄλλα σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς συναντῶνται εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, καὶ ἔστωσαν τὰ σημεῖα συναντήσεων ἐν συνεχείᾳ χωρὶς νὰ παραλείπωσιν ἐνδιαμέσως κανὲν σημεῖον συναντήσεως, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΓ καὶ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη ἡ ΑΛ· θὰ ἐφάπτηται λοιπὸν αὕτη τῶν δύο τομῶν καὶ θὰ συναντᾷ τὴν ΓΒ. Ἂς τὴν συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Λ καὶ ἂς γίνῃ, ὡς ἡ ΓΛ : ΛΒ = ΓΠ : ΠΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΠ καὶ ἂς ἐκβληθῇ· θὰ συναντήσῃ λοιπὸν αὕτη τὰς τομάς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων συναντήσεων ἀγόμεναι πρὸς τὸ Λ θὰ ἐφάπτωνται τῶν τομῶν (θ. 1). Ἂς ἐκβληθῇ καὶ ἂς συναντᾷ (τὰς τομὰς) εἰς τὰ σημεῖα Θ, Ρ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΛ, ΛΡ· θὰ ἐφάπτωνται λοιπὸν αὗται τῶν τομῶν. Ἡ ἀπὸ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ Λ ἀγομένη τέμνει ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ θὰ συμβῶσι τὰ προηγουμένως λεχθέντα (θ. 25) ἄτοπα (3, 37). Δὲν τέμνονται ἄρα μεταξύ των εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα.

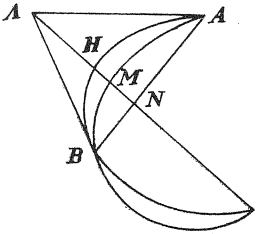
Ἐὰν δὲ εἰς τὴν ἔλλειψιν ἢ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἡ ΓΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΛ, ὁμοίως πρὸς τὸ προλεχθὲν θὰ κάμωμεν τὴν ἀπόδειξιν, ἀφοῦ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΘ πρέπει νὰ εἶναι διάμετρος.

27

Ἐὰν μερικαὶ τῶν προειρημένων γραμμῶν ἐφάπτωνται μεταξύ των κατὰ δύο σημεῖα, δὲν θὰ συναντηθῶσι μεταξύ των κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των δύο τῶν εἰρημένων γραμμῶν κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β. Λέγω, ὅτι δὲν θὰ συναντηθῶσι μεταξύ των κατ' ἄλλο σημεῖον.

εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτωσαν καὶ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω πρότερον τὸ Γ ἐκτὸς τῶν Α, Β ἁφῶν, καὶ ἤχθωσαν



ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι· ἐφάψονται ἄρα ἀμφοτέρων τῶν γραμμῶν. ἐφαπτέσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΛ· τεμεῖ δὴ ἑκατέραν τῶν τομῶν. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΝΒ. ἔσται ἄρα ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ, ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΗ, ἡ ΓΝ πρὸς ΝΗ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ, ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΜ, ἡ ΓΝ πρὸς ΝΜ· ὅπερ ἄτοπον.

κη′

Ἐὰν δὲ ἡ ΓΗ παράλληλος ᾖ ταῖς κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα ἐφαπτομέναις, ὡς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐν τῇ δευτέρᾳ καταγραφῇ, ἐπιζεύξαντες τὴν ΑΒ ἐροῦμεν, ὅτι διάμετρος ἔσται τῶν τομῶν. ὥστε δίχα τμηθήσεται ἑκατέρα τῶν ΓΗ, ΓΜ κατὰ τὸ Ν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα καθ᾽ ἕτερον σημεῖον συμβάλλουσιν αἱ γραμμαὶ ἀλλήλαις, ἀλλὰ κατὰ μόνα τὰ Α, Β.

H46 κθ′

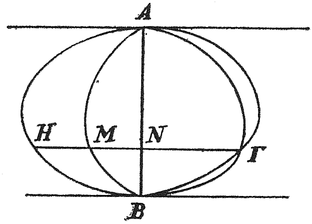
Ἔστω δὴ τὸ Γ μεταξὺ τῶν ἁφῶν, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς.

φανερόν, ὅτι οὐκ ἐφάψονται αἱ γραμμαὶ ἀλλήλων κατὰ

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς συναντῶνται καὶ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω πρῶτον τὸ Γ ἐκτὸς τῶν ἁφῶν Α, Β καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι· θὰ ἐφάπτωνται ἄρα καὶ τῶν δύο γραμμῶν. Ἂς ἐφάπτωνται καὶ ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Λ, ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΛ· θὰ τμήσῃ λοιπὸν αὕτη ἑκατέραν τῶν τομῶν. Ἂς τὰς τμήσῃ κατὰ τὰ σημεῖα Η, Μ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΝΒ. Θὰ εἶναι ἄρα εἰς μὲν τὴν μίαν τομὴν (3, 37), ὡς ἡ $ΓΛ : ΛΗ = ΓΝ : ΝΗ$, εἰς δὲ τὴν ἄλλην, ὡς ἡ $ΓΛ : ΛΜ = ΓΝ : ΝΜ$· ὅπερ ἄτοπον.

28

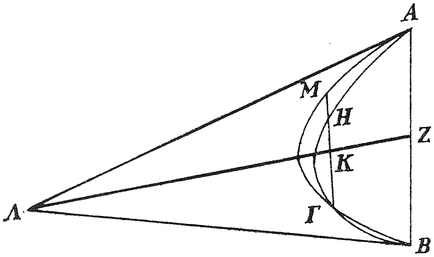
Ἐὰν δὲ ἡ ΓΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, ὡς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, ἀφοῦ φέρωμεν τὴν ΑΒ θὰ συμπεράνωμεν, ὅτι αὕτη θὰ εἶναι διάμετρος τῶν τομῶν (2, 27). Ὥστε ἑκατέρα τῶν ΓΗ, ΓΜ θὰ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν (1 ὁρισ. 4)· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν θὰ συναντηθῶσι ἄρα αἱ γραμμαὶ μεταξύ των κατ᾽ ἄλλο σημεῖον, ἀλλὰ μόνον κατὰ τὰ Α, Β.



29

Ἔστω τώρα τὸ Γ μεταξὺ τῶν ἁφῶν, ὡς εἰς τὸ τρίτον σχῆμα (τοῦ παρόντος θεωρήματος).

Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ γραμμαὶ δὲν θὰ ἐφάπτωνται μεταξύ τὸ $Γ$· κατὰ δύο γὰρ μόνον ὑπόκεινται ἐφαπτόμεναι. τεμνέτωσαν οὖν κατὰ τὸ $Γ$, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν $Α$, $Β$ ἐφαπτόμεναι αἱ $ΑΛ$, $ΛΒ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΑΒ$ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ $Ζ$· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ $Λ$ ἐπὶ τὸ $Ζ$ διάμετρος ἔσται. διὰ μὲν οὖν τοῦ $Γ$ οὐκ ἐλεύσεται. εἰ γὰρ ἥξει, ἡ διὰ τοῦ $Γ$ παρὰ τὴν $ΑΒ$ ἀγομένη ἐφάψεται ἀμφοτέρων τῶν τομῶν· τοῦτο δὲ ἀδύνατον. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ $Γ$ παρὰ τὴν $ΑΒ$ ἡ $ΓΚΗΜ$· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ $ΓΚ$ τῇ $ΚΗ$ ἴση, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ $ΚΜ$ τῇ $ΚΓ$ ἴση. ὥστε καὶ ἡ $ΚΜ$ τῇ $ΚΗ$ ἴση· ὅπερ ἀδύνατον.



ὁμοίως δὲ καί, ἐὰν παράλληλοι ὦσιν αἱ ἐφαπτόμεναι, κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπάνω τὸ ἀδύνατον δειχθήσεται.

λʹ

Παραβολὴ παραβολῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν αἱ $ΑΗΒ$, $ΑΜΒ$ παραβολαὶ κατὰ τὰ $Α$, $Β$, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ $ΑΛ$, $ΛΒ$· ἐφάψονται δὴ αὗται τῶν τομῶν ἀμφοτέρων καὶ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ $Λ$.

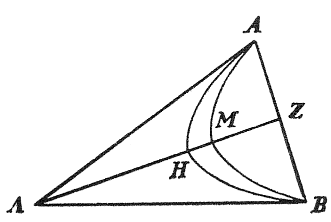
H48 ἐπεζεύχθω ἡ $ΑΒ$ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ $Ζ$, καὶ ἤχθω ἡ $ΛΖ$. ἐπεὶ οὖν δύο γραμμαὶ αἱ $ΑΗΒ$, $ΑΜΒ$ ἐφάτων κατὰ τὸ Γ· διότι ἔχουσι ληφθῆ ἐφαπτόμεναι κατὰ δύο μόνον σημεῖα. Ἂς τέμνωνται λοιπὸν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΛ, ΛΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ· ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἄρα πρὸς τὸ Ζ ἀγομένη θὰ εἶναι διάμετρος (2, 29). Διὰ μὲν λοιπὸν τοῦ Γ δὲν θὰ διέλθῃ. Διότι ἐὰν θὰ διέλθῃ, ἡ διὰ τοῦ Γ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ θὰ ἐφάπτηται καὶ τῶν δύο τομῶν (2, 5—6)· τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον. Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν ἀπὸ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΓΚΗΜ· θὰ εἶναι λοιπὸν εἰς μὲν τὴν μίαν τομὴν ἡ ΓΚ = ΚΗ, εἰς δὲ τὴν ἄλλην ἡ ΚΜ = ΚΓ (1 ὁρισ. 4). Ὥστε καὶ ἡ ΚΜ = ΚΗ· ὅπερ ἀδύνατον.

Ὁμοίως δὲ καί, ἐὰν αἱ ἐφαπτόμεναι εἶναι παράλληλοι, ἀποδεικνύονται τὰ αὐτὰ ὡς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα.

30

Παραβολὴ δὲν θὰ ἐφάπτηται παραβολῆς εἰς πολλὰ σημεῖα παρὰ μόνον εἰς ἕν.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἐφάπτωνται αἱ παραβολαὶ ΑΗΒ, ΑΜΒ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΛ, ΛΒ· θὰ ἐφάπτωνται λοιπὸν αὗται καὶ τῶν δύο τομῶν καὶ θὰ συναντῶνται κατὰ τὸ Λ.

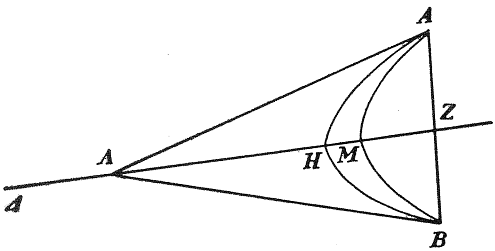


Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΛΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο γραμμαὶ αἱ ΑΗΒ, πτονται ἀλλήλων κατὰ δύο τὰ *Α*, *Β*, οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις καθ᾽ ἕτερον· ὥστε ἡ *ΛΖ* ἑκατέραν τῶν τομῶν τέμνει. τεμνέτω κατὰ τὰ *Η*, *Μ*· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ἡ *ΛΗ* τῇ *ΗΖ* ἴση, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ἡ *ΛΜ* τῇ *ΜΖ* ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παραβολὴ παραβολῆς ἐφάψεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

λα′

Παραβολὴ ὑπερβολῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα ἐκτὸς αὐτῆς πίπτουσα.

ἔστω παραβολὴ μὲν ἡ *ΑΗΒ*, ὑπερβολὴ δὲ ἡ *ΑΜΒ*, καὶ εἰ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν κατὰ τὰ *Α*, *Β*, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν *Α*, *Β* ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν *Α*, *Β* τομῶν συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ *Λ*, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΑΒ* καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ *Ζ*, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΛΖ*.



ἐπεὶ οὖν αἱ *ΑΗΒ*, *ΑΜΒ* τομαὶ κατὰ τὰ *Α*, *Β* ἐφάπτονται, κατ᾽ ἄλλο οὐ συμβάλλουσιν· ἡ ἄρα *ΛΖ* κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο τέμνει τὰς τομάς. τεμνέτω κατὰ τὰ *Η*, *Μ*, καὶ προσεκβεβλήσθω ἡ *ΛΖ*· πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς. ἔστω κέντρον τὸ *Δ*· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ὑπερβολήν,
H50 ὡς ἡ *ΖΔ* πρὸς *ΔΜ*, ἡ *ΜΔ* πρὸς *ΔΛ* καὶ λοιπὴ ἡ *ΖΜ* πρὸς

ΑΜΒ ἐφάπτονται μεταξύ των κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β δὲν θὰ συναντηθῶσι μεταξύ των κατ' ἄλλο σημεῖον (θ. 27 — 29)· ὥστε ἡ ΛΖ τέμνει ἑκατέραν τῶν τομῶν. Ἂς τὰς τέμνῃ κατὰ τὰ σημεῖα Η, Μ· θὰ εἶναι λοιπὸν διὰ μὲν τὴν μίαν τομὴν ἡ ΛΗ = ΗΖ, διὰ δὲ τὴν ἄλλην ἡ ΛΜ = ΜΖ (1, 35)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ ἐφάπτηται λοιπὸν παραβολὴ παραβολῆς εἰς πολλὰ σημεῖα παρὰ μόνον εἰς ἕν.

31

Παραβολὴ πίπτουσα ἐκτὸς ὑπερβολῆς δὲν θὰ ἐφάπτηται αὐτῆς κατὰ δύο σημεῖα.

Ἔστω παραβολὴ μὲν ἡ ΑΗΒ, ὑπερβολὴ δὲ ἡ ΑΜΒ, καί, εἰ δυνατόν, ἂς ἐφάπτωνται αὗται μεταξύ των κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν τομῶν Α, Β, συναντώμεναι μεταξύ των κατὰ τὸ Λ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΛΖ.

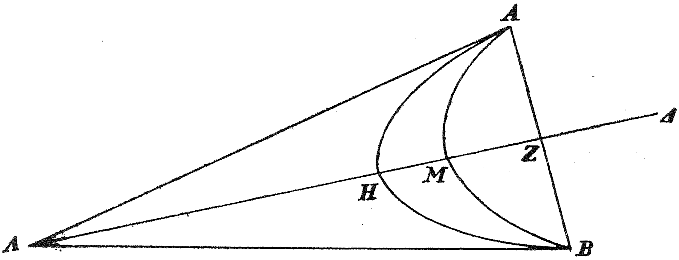
Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ τομαὶ ἐφάπτονται μεταξύ των κατὰ τὰ Α, Β, δὲν θὰ συναντῶνται κατ' ἄλλο σημεῖον (θ. 27 — 29)· ἡ ΛΖ ἄρα τέμνει τὰς τομὰς εἰς διάφορα σημεῖα. Ἂς τὰς τέμνῃ κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ ἂς προσεκβληθῇ ἡ ΛΖ· θὰ πέσῃ λοιπὸν αὕτη εἰς τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς (2, 29). Ἔστω κέντρον τὸ Δ· θὰ εἶναι λοιπὸν διὰ μὲν τὴν ὑπερβολὴν (1, 37), ὡς ἡ ΖΔ : ΔΜ = ΜΔ : ΔΛ (Εὐκλ. 6, 17) = ΖΜ : ΜΛ (Εὐκλ. 5, 17·

ΜΛ. μείζων δὲ ἡ ΖΔ τῆς ΔΜ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΜ τῆς ΜΛ. διὰ δὲ τὴν παραβολὴν ἴση ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ· ὅπερ ἀδύνατον.

λβ'

Παραβολὴ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα ἐντὸς αὐτῆς πίπτουσα.

ἔστω γὰρ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΗΒ, παραβολὴ δὲ ἡ ΑΜΒ, καὶ εἰ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν κατὰ δύο τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν



καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΖ· τεμεῖ δὴ ἑκατέραν τῶν τομῶν κατ᾿ ἄλλο καὶ ἄλλο, ὡς εἴρηται. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΛΖ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἔστω τὸ Δ κέντρον τῆς ἐλλείψεως ἢ τοῦ κύκλου. ἔστιν ἄρα διὰ τὴν ἔλλειψιν καὶ τὸν κύκλον, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΔΗ πρὸς ΔΖ καὶ λοιπὴ ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ. μείζων δὲ ἡ ΛΔ τῆς ΔΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΗ τῆς ΗΖ. διὰ δὲ τὴν παραβολὴν ἴση ἡ ΛΜ τῇ ΜΖ· ὅπερ ἀδύνατον.

λγ'

Ὑπερβολὴ ὑπερβολῆς τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσα οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα.

5, 16). Εἶναι δὲ ἡ ΖΔ 〉 ΔΜ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΖΜ 〉 ΜΛ (Εὐκλ. 5, 14). Διὰ δὲ τὴν παραβολὴν εἶναι ἡ ΖΗ = ΗΛ (1, 35)· ὅπερ ἀδύνατον.

32

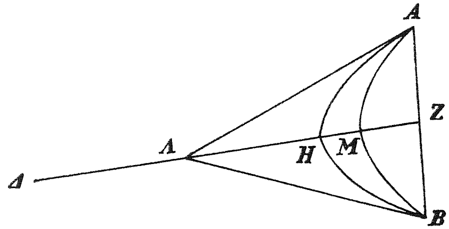
Παραβολὴ πίπτουσα ἐντὸς ἐλλείψεως ἢ περιφερείας κύκλου δὲν θὰ ἐφάπτηται αὐτῆς κατὰ δύο σημεῖα.

Διότι ἔστω ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΗΒ, παραβολὴ δὲ ἡ ΑΜΒ, καί, εἰ δυνατόν, ἃς ἐφάπτωνται κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β, καὶ ἃς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν καὶ συναντώμεναι κατὰ τὸ Λ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἃς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΛΖ· θὰ τμήσῃ λοιπὸν αὕτη ἑκατέραν τῶν τομῶν εἰς διάφορα σημεῖα, ὡς ἐλέχθη (θ. 31). Ἂς τὰς τμήσῃ κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ ἃς ἐκβληθῇ ἡ ΛΖ μέχρι τοῦ Δ, καὶ ἔστω τὸ Δ κέντρον τῆς ἐλλείψεως ἢ τοῦ κύκλου (2, 29). Εἶναι ἄρα διὰ τὴν ἔλλειψιν καὶ τὸν κύκλον (1, 37), ὡς ἡ ΛΔ : ΔΗ = ΔΗ : ΔΖ (Εὐκλ. 6, 17) = ΛΗ : ΗΖ (Εὐκλ. 5, 17· 5, 16). Εἶναι δὲ ἡ ΛΔ 〉 ΔΗ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΛΗ 〉 ΗΖ (Εὐκλ. 5, 14). Διὰ δὲ τὴν παραβολὴν ἡ ΛΜ = ΜΖ (1, 35)· ὅπερ ἀδύνατον.

33

Ὑπερβολὴ ἔχουσα τὸ αὐτὸ κέντρον μὲ ὑπερβολὴν δὲν θὰ ἐφάπτηται αὐτῆς κατὰ δύο σημεῖα.

ὑπερβολαὶ γὰρ αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσαι τὸ Δ, εἰ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Β, ἤχθωσαν δὲ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι αὐτῶν καὶ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις αἱ ΑΛ, ΛΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΛ καὶ ἐκβεβλήσθω.



H52 ἐπεζεύχθω δὴ καὶ ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ΔΖ τὴν ΑΒ δίχα τέμνει κατὰ τὸ Ζ. τεμεῖ δὴ ἡ ΔΖ τὰς τομὰς κατὰ τὰ Η, Μ. ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ΑΗΒ ὑπερβολὴν ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΔΛ τῷ ἀπὸ ΔΗ, διὰ δὲ τὴν ΑΜΒ τὸ ὑπὸ ΖΔΛ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΜ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΜΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΗ· ὅπερ ἀδύνατον.

λδʹ

Ἐὰν ἔλλειψις ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτηται τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσα, ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου πεσεῖται.

ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων αἱ εἰρημέναι γραμμαὶ κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν ἤχθωσαν καί, εἰ δυνατόν, συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἡ ΑΒ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΖ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ τῶν τομῶν.

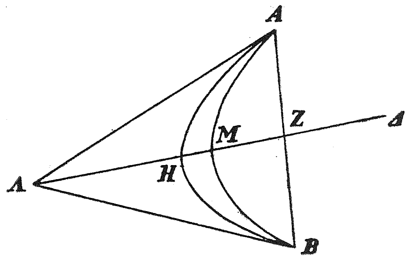
Διότι αἱ ὑπερβολαὶ ΑΗΒ, ΑΜΒ ἔχουσαι τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Δ, εἰ δυνατὸν, ἂς ἐφάπτωνται κατὰ τὰ Α, Β, ἂς ἀχθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι αὐτῶν καὶ συμπίπτουσαι μεταξύ των αἱ ΑΛ, ΛΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΛ καὶ ἂς ἐκβληθῇ.

Ἂς ἐπιζευχθῇ τώρα καὶ ἡ ΑΒ· ἡ ΔΖ ἄρα τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ (2, 30). Θὰ τμήσῃ λοιπὸν ἡ ΔΖ τὰς τομὰς κατὰ τὰ Η, Μ (θ. 27—29). Θὰ εἶναι λοιπὸν διὰ μὲν τὴν ὑπερβολὴν ΑΗΒ τὸ $Z\Delta \times \Delta\Lambda = \Delta H^2$, διὰ δὲ τὴν ὑπερβολὴν ΑΜΒ τὸ $Z\Delta \times \Delta\Lambda = \Delta M^2$ (1, 37). Εἶναι ἄρα τὸ $M\Delta^2 = \Delta H^2$· ὅπερ ἀδύνατον.

34

Ἐὰν ἔλλειψις ἐφάπτηται ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας κατὰ δύο σημεῖα ἔχουσα τὸ αὐτὸ κέντρον, ἡ ἑνοῦσα τὰς ἁφὰς θὰ διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου.

Διότι ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των αἱ εἰρημέναι γραμμαὶ κατὰ



τὰ σημεῖα Α, Β, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τῶν Α, Β ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν καί, εἰ δυνατόν, ἂς συναντῶνται αὗται κατὰ τὸ Λ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΛΖ· εἶναι ἄρα ἡ ΛΖ διάμετρος τῶν τομῶν (2, 29).

ἔστω, εἰ δυνατόν, κέντρον τὸ Δ· ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ ΛΔΖ διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΗ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ἴσον τῷ ἀπὸ ΜΔ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΗΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΜ·
H54 ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι συμπεσοῦνται· παράλληλοι ἄρα εἰσίν, καὶ διὰ τοῦτο διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ. ὥστε διὰ τοῦ κέντρου πίπτει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε΄

Κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κυρτὰ ἔχουσα οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

εἰ γὰρ δυνατόν, κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ τῇ ΑΔΒΕΓ συμβαλλέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κυρτὰ ἔχουσα τὰ Α, Β, Γ.

καὶ ἐπεὶ ἐν τῇ ΑΒΓ γραμμῇ εἴληπται τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, γωνίαν ἄρα περιέχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς κοίλοις τῆς ΑΒΓ γραμμῆς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ αἱ ΑΒΓ τὴν αὐτὴν γωνίαν περιέχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς κοίλοις τῆς ΑΔΒΕΓ γραμμῆς. αἱ εἰρημέναι ἄρα γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἔχουσι τὰ κοῖλα ἅμα καὶ τὰ κυρτά· ὅπερ ἀδύνατον.

λϛ΄

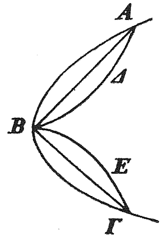
Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια συμπίπτῃ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν συμ-

Ἔστω, εἰ δυνατόν, κέντρον τὸ Δ· θὰ εἶναι ἄρα (1, 37) τὸ ΛΔ x ΔΖ διὰ μὲν τὴν μίαν τομήν $= ΔΗ^2$, διὰ δὲ τὴν ἄλλην $= ΜΔ^2$· ὥστε τὸ $ΗΔ^2 = ΔΜ^2$· ὅπερ ἀδύνατον. Αἱ ἐφαπτόμεναι ἄρα εἰς τὰ σημεῖα Α, Β δὲν θὰ συναντῶνται· εἶναι ἄρα παράλληλοι, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος (2, 27). Ὥστε διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35

Κώνου τομὴ ἢ περιφέρεια κύκλου μὲ κώνου τομὴν ἢ περιφέρειαν κύκλου μὴ ἔχουσα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κυρτά, δὲν θὰ συναντᾶται εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς δύο.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἡ ΑΒΓ κώνου τομὴ ἢ περιφέρεια κύκλου μὲ κώνου τομὴν ἢ περιφέρειαν κύκλου τὴν ΑΔΒΕΓ ἂς συναντᾶται εἰς περισσότερα σημεῖα τῶν δύο, μὴ ἔχουσα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κυρτά, τὰ Α, Β, Γ.

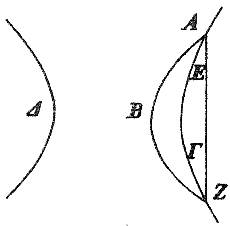


Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὴν γραμμὴν ΑΒΓ ἐλήφθησαν τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ καὶ ἔχουσιν ἀχθῆ αἱ ΑΒ, ΒΓ, περιέχουσιν ἄρα γωνίαν εὑρισκομένην πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα, τῆς γραμμῆς ΑΒΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους αἱ ΑΒΓ περιέχουσι τὴν αὐτὴν γωνίαν πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα, τῆς γραμμῆς ΑΔΒΕΓ. Αἱ εἰρημέναι ἄρα γραμμαὶ ἔχουσι τὰ κοῖλα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, συγχρόνως δὲ καὶ τὰ κυρτά· ὅπερ ἀδύνατον.

36

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ περιφέρεια κύκλου συναντᾷ μίαν τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα καὶ αἱ μεταξὺ τῶν συναντήσεων πτώσεων γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἔχωσι, προσεκβαλλομένη ἡ γραμμὴ κατὰ τὰς συμπτώσεις οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

H56 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ $Δ$, $ΑΕΓΖ$, καὶ ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ $ΑΒΖ$ συμπίπτουσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα τὰ $Α$, $Ζ$, καὶ ἐχέτωσαν αἱ $ΑΒΖ$, $ΑΓΖ$ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα. λέγω, ὅτι ἡ $ΑΒΖ$ γραμμὴ ἐκβαλλομένη οὐ συμπεσεῖται τῇ $Δ$.



ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $ΑΖ$. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ $Δ$, $ΑΓΖ$, καὶ ἡ $ΑΖ$ εὐθεῖα κατὰ δύο τέμνει τὴν ὑπερβολήν, οὐ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ $Δ$ ἀντικειμένῃ. οὐδὲ ἄρα ἡ $ΑΒΖ$ γραμμὴ συμπεσεῖται τῇ $Δ$.

λζʹ

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια μιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ, τῇ λοιπῇ αὐτῶν οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ $Α$, $Β$, καὶ συμβαλλέτω τῇ $Α$ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ $ΑΒΓ$ καὶ τεμνέτω τὴν $Β$ ἀντικειμένην κατὰ τὰ $Β$, $Γ$. λέγω, ὅτι κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ συμπεσεῖται τῇ $ΒΓ$.

εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ $Δ$. ἡ ἄρα $ΒΓΔ$ τῇ $ΒΓ$ τομῇ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο μὴ γραμμαὶ ἔχωσι τὰ κοῖλα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, προσεκβαλλομένη ἡ γραμμὴ ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα συναντήσεων δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην τῶν ἀντικειμένων.

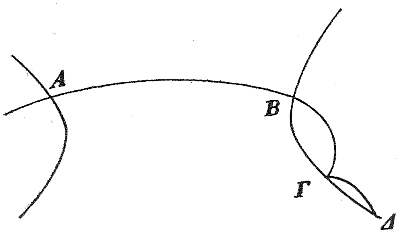
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Δ, ΑΕΓΖ, καὶ ἔστω κώνου τομὴ ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒΖ συναντῶσα τὴν μίαν τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Ζ, καὶ ἂς ἔχωσιν αἱ τομαὶ ΑΒΖ, ΑΓΖ τὰ κοῖλα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη. Λέγω, ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΒΖ ἐκβαλλομένη δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν Δ.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ Δ, ΑΓΖ εἶναι ἀντικείμεναι, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΖ τέμνει τὴν ὑπερβολὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἐκβαλλομένη δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἀντικειμένην Δ (2, 33). Κατὰ συνέπειαν οὔτε ἡ γραμμὴ ΑΒΖ θὰ συναντήσῃ τὴν Δ.

37

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ περιφέρεια κύκλου συναντᾷ μίαν τῶν ἀντικειμένων, δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην κατὰ περισσότερα σημεῖα τῶν δύο.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ἂς συναντᾷ τὴν Α κώνου τομὴ ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒΓ καὶ ἂς τέμνῃ τὴν ἀντικειμένην Β κατὰ τὰ σημεῖα Β, Γ. Λέγω, ὅτι αὕτη δὲν θὰ συναντήσῃ κατ' ἄλλο σημεῖον τὴν ΒΓ.



Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τὴν συναντήσῃ κατὰ τὸ Δ. Ἡ ΒΓΔ ἄρα συναντᾷ τὴν ΒΓ τομὴν κατὰ περισσότερα τῶν δύο *ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔχουσα τὰ κοῖλα· ὅπερ ἀδύνατον.*

ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ τῆς ἀντικειμένης ἐφάπτηται.

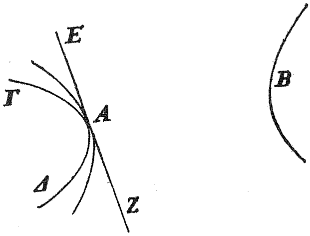
H58 *λη'*

Κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ταῖς ἀντικειμέναις οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

φανερὸν δὲ τοῦτο ἐκ τοῦ τῇ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτουσαν αὐτὴν τῇ λοιπῇ κατὰ πλείονα δυοῖν μὴ συμπίπτειν.

λθ'

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται τοῖς κοίλοις αὐτῆς, τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.



ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ἡ ΓΑΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΑΔ τῇ Β οὐ συμπεσεῖται.

ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἡ ΕΑΖ. ἑκατέρας δὴ τῶν γραμμῶν ἐπιψαύει κατὰ τὸ Α· ὥστε οὐ συμπεσεῖται τῇ Β. ὥστε οὐδὲ ἡ ΓΑΔ.

μ'

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν ἐφάπτηται σημεῖον, καθ' ἕτερον οὐ σημεῖα μὴ ἔχουσα τὰ κοῖλα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (θ. 36)· ὅπερ ἀδύνατον (θ. 35).

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ ἐφάπτηται τῆς ἀντικειμένης.

38

Κώνου τομὴ ἢ περιφέρεια κύκλου δὲν θὰ συναντήσῃ τὰς ἀντικειμένας κατὰ περισσότερα τῶν τεσσάρων σημεῖα.

Εἶναι δὲ τοῦτο φανερόν, ἐκ τοῦ ὅτι, ὅταν συναντήσῃ μίαν τῶν ἀντικειμένων, τὴν ἄλλην δὲν θὰ τὴν συναντήσῃ εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα (θ. 37).

39

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ περιφέρεια κύκλου ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων πρὸς τὰ κοῖλα αὐτῆς, δὲν θὰ συναντᾷ τὴν ἄλλην τῶν ἀντικειμένων.

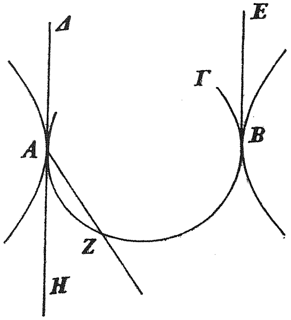
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β καὶ τῆς τομῆς Α ἃς ἐφάπτηται ἡ ΓΑΔ. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΑΔ δὲν θὰ συναντᾷ τὴν Β.

Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἡ ΕΑΖ. Αὕτη ἐφάπτεται λοιπὸν ἑκατέρας τῶν τομῶν κατὰ τὸ Α· ὥστε δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν Β. Ὥστε οὔτε ἡ ΓΑΔ θὰ τὴν συναντήσῃ.

40

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ περιφέρεια κύκλου ἐφάπτηται ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων κατὰ ἓν σημεῖον, δὲν θὰ συναντήσῃ τὰς ἀντισυμπεσεῖται ταῖς ἀντικειμέναις.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἐφαπτέσθω ἑκατέρας τῶν Α, Β κατὰ τὰ Α, Β. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓ γραμμὴ καθ' ἕτερον οὐ συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς.



ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ τῆς Α τομῆς ἐφάπτεται καθ' ἓν συμπίπτουσα καὶ τῇ Β, τῆς Α ἄρα H60 τομῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ τὰ κοῖλα. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ τῆς Β. ἤχθωσαν τῶν Α, Β τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ, ΒΕ· αὗται δὴ ἐφάψονται τῆς ΑΒΓ γραμμῆς. εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω ἡ ἑτέρα αὐτῶν, καὶ ἔστω ἡ ΑΖ. μεταξὺ ἄρα τῆς ΑΖ ἐφαπτομένης καὶ τῆς Α τομῆς παρεμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΗ· ὅπερ ἀδύνατον. ἐφάψονται ἄρα τῆς ΑΒΓ, καὶ διὰ τοῦτο φανερόν, ὅτι ἡ ΑΒΓ καθ' ἕτερον οὐ συμβάλλει ταῖς Α, Β ἀντικειμέναις.

μα'

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα συμπίπτῃ ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

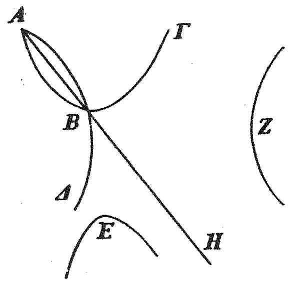
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΔ, Ζ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΒΔ συμβαλλέτω κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ τοῖς κοίλοις, καὶ τῆς ΑΒΓ ἔστω ἀντικεικειμένας εἰς ἄλλο σημεῖον.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β καὶ ἂς ἐφάπτηται ἑκατέρας τῶν Α, Β κώνου τομὴ ἢ περιφέρεια κύκλου κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β. Λέγω, ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΒΓ δὲν θὰ συναντήσῃ τὰς τομὰς Α, Β εἰς ἄλλο σημεῖον.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γραμμὴ ΑΒΓ ἐφάπτεται τῆς τομῆς Α εἰς ἓν σημεῖον, συναντῶσα καὶ τὴν Β γραμμήν, δὲν θὰ ἐφάπτηται ἄρα τῆς τομῆς Α εἰς τὰ κοῖλα (θ. 39). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν θὰ ἐφάπτηται οὔτε τῆς τομῆς Β. Ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν Α, Β αἱ ΑΔ, ΒΕ· αὗται λοιπὸν θὰ ἐφάπτωνται τῆς γραμμῆς ΑΒΓ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἂς τέμνῃ, καὶ ἔστω ἡ ΑΖ. Μεταξὺ ἄρα τῆς ἐφαπτομένης ΑΖ καὶ τῆς τομῆς Α παρενέπεσεν ἡ εὐθεῖα ΑΗ· ὅπερ ἀδύνατον (1, 36). Θὰ ἐφάπτωνται ἄρα τῆς ΑΒΓ, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΑΒΓ δὲν θὰ συναντήσῃ τὰς ἀντικειμένας Α, Β εἰς ἄλλο σημεῖον.

41

Ἐὰν ὑπερβολὴ συναντᾷ μίαν τῶν ἀντικειμένων εἰς δύο σημεῖα ἔχουσα τὰ κυρτὰ μέρη ἀντεστραμμένα, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην τῶν ἀντικειμένων.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΔ, Ζ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ ἂς συναντᾷ τὴν ΑΒΔ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β ἔχουσα τὰ κυρτὰ ἀντεστραμμένα πρὸς τὰ κοῖλα, καὶ ἔστω ἀντικειμένη

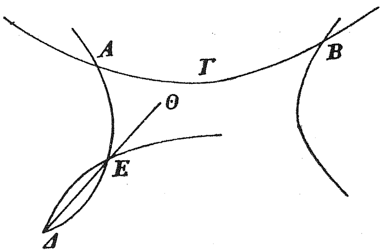
μένη ἡ Ε. λέγω, ὅτι οὐ συμπεσεῖται τῇ Ζ.

ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν
ὑπερβολὴν τὴν ΑΒΔ εὐθεῖα τέμνει ἡ ΑΒΗ, ἐκβαλλομένη
δὲ ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, οὐ συμπεσεῖται τῇ
H62 Ζ τομῇ. ὁμοίως δὴ διὰ τὴν ΑΒΓ ὑπερβολὴν οὐδὲ τῇ Ε
ἀντικειμένῃ συμπίπτει. οὐδὲ ἡ Ε ἄρα τῇ Ζ συμπεσεῖται.

μβ'

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ἡ ΑΓΒ ὑπερβολὴ συμπιπτέτω ἑκατέρᾳ τῶν Α, Β ἀντικειμένων. λέγω, ὅτι ἡ τῇ ΑΓΒ ἀντικειμένη οὐ συμβάλλει ταῖς Α, Β τομαῖς κατὰ δύο σημεῖα.



εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω. διὰ μὲν δὴ τὴν ΔΕ τομὴν οὐ συμπεσεῖται ἡ ΔΕ εὐθεῖα τῇ ΑΒ τομῇ, διὰ δὲ τὴν ΑΕΔ οὐ συμπεσεῖται τῇ Β· διὰ γὰρ τῶν τριῶν τόπων ἐλεύσεται· ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ τῇ Β τομῇ κατὰ δύο σημεῖα συμπεσεῖται.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ἐφάψεται ἑκατέρας αὐτῶν. ἀγαγόντες γὰρ ἐπιψαύουσαν τὴν ΘΕ ἐφάπτεται μὲν αὕτη ἑκατέρας τῆς ΑΒΓ ἡ Ε. Λέγω, ὅτι δὲν θὰ συναντᾷ τὴν Ζ.

Ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἂς ἐκβληθῇ πρὸς τὸ Η. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὴν ὑπερβολὴν ΑΒΔ τέμνει ἡ εὐθεῖα ΑΒΗ, ἐκβαλλομένη δὲ αὕτη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη πίπτει ἐκτὸς τῆς τομῆς, δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν Ζ (2, 33). Καθ' ὅμοιον τρόπον, διὰ τὴν ὑπερβολὴν ΑΒΓ, δὲν θὰ συναντήσῃ οὔτε τὴν ἀντικειμένην Ε. Οὔτε ἡ Ε ἄρα θὰ συναντήσῃ τὴν Ζ.

42

Ἐὰν ὑπερβολὴ συναντᾷ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συναντήσῃ καμμίαν τῶν ἀντικειμένων εἰς δύο σημεῖα.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β καὶ ἡ ὑπερβολὴ ΑΓΒ ἂς συναντᾷ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων Α, Β. Λέγω, ὅτι ἡ ἀντικειμένη πρὸς τὴν ΑΓΒ δὲν θὰ συναντήσῃ τὰς τομὰς Α, Β εἰς δύο σημεῖα.

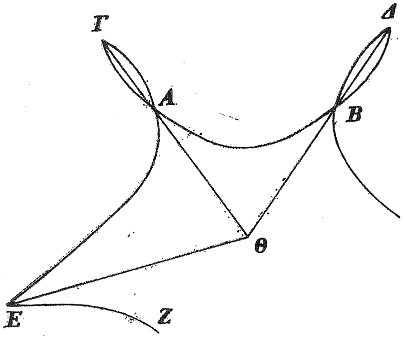
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τὰς συναντήσῃ κατὰ τὰ Δ, Ε, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΔΕ ἂς ἐκβληθῇ. Διὰ μὲν λοιπὸν τὴν τομὴν ΔΕ δὲν θὰ συναντήσῃ ἡ εὐθεῖα ΔΕ τὴν τομὴν ΑΒ (2, 33), διὰ δὲ τὴν τομὴν ΑΕΔ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν Β· διότι θὰ διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν τόπων (2, 33)· ὅπερ ἀδύνατον. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν θὰ συναντήσῃ οὔτε τὴν τομὴν Β εἰς δύο σημεῖα.

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους οὔτε θὰ ἐφάπτηται ἑκατέρας αὐτῶν. Διότι ἀφοῦ φέρωμεν ἐφαπτομένην τὴν ΘΕ, αὕτη θὰ ἐφάπτηται *τῶν τομῶν· ὥστε διὰ μὲν τὴν ΔΕ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΓ, διὰ δὲ τὴν ΑΕ οὐ συμβάλλει τῇ Β. ὥστε οὐδὲ ἡ ΑΓ τῇ Β συμβάλλει· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.*

μγ′

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων τέμνῃ κατὰ H64 *δύο σημεῖα ἀντεστραμμένα ἔχουσα πρὸς ἑκατέραν τὰ κυρτά, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.*

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΓΑΒΔ ἑκατέραν τῶν Α, Β τεμνέτω κατὰ δύο σημεῖα ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά. λέγω, ὅτι ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΕΖ οὐδεμιᾷ τῶν Α, Β συμπεσεῖται.



εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω τῇ Α κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΑ, ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ· ἔσται δὴ τὸ Θ ἐν τῇ περιεχομένῃ γωνίᾳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΓΑΒΔ τομῆς. καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΕΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ τῶν ΑΘΒ περιεχομένης γωνίας. πάλιν ἐπεὶ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΓΑΕ, καὶ συμπίπτουσιν αἱ ΓΑΘ, ΘΕ, καὶ αἱ Γ, Α συμπτώσεις οὐ περιέχουσι τὴν Ε, τὸ Θ σημεῖον ἔσται μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΓΑΕ τομῆς. καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΒΔ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Θ ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ ΓΘΕ ἑκατέρας τῶν τομῶν· ὥστε διὰ μὲν τὴν ΔΕ δὲν θὰ συναντᾷ τὴν ΑΓ, διὰ δὲ τὴν ΑΕ δὲν θὰ συναντᾷ τὴν Β (2, 33). Ὥστε οὔτε ἡ ΑΓ θὰ συναντᾷ τὴν Β· τὸ ὁποῖον δὲν ὑπετέθη.

43

Ἐὰν ὑπερβολὴ τέμνῃ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα ἔχουσα πρὸς ἑκατέραν ἀντεστραμμένα τὰ κυρτά, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συμπέσῃ πρὸς καμμίαν τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ἡ ὑπερβολὴ ΓΑΒΔ ἂς τέμνῃ ἑκατέραν τῶν Α, Β κατὰ δύο σημεῖα ἔχουσα ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ μέρη. Λέγω, ὅτι ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν ἡ ΕΖ δὲν θὰ συμπέσῃ πρὸς καμμίαν ἐκ τῶν Α, Β.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς συναντήσῃ τὴν τομὴν Α εἰς τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΑ, ΔΒ καὶ ἂς ἐκβληθῶσι· αὗται βεβαίως θὰ συναντηθῶσι (2, 25). Ἂς συναντηθῶσιν εἰς τὸ Θ· θὰ εὑρίσκηται λοιπὸν τὸ Θ εἰς τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων γωνίαν τῆς τομῆς ΓΑΒΔ (2, 25). Καὶ εἶναι ἀντικειμένη αὐτῆς ἡ ΕΖ· ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Θ ἀγομένη εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΘΒ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΓΑΕ εἶναι ὑπερβολὴ καὶ συναντῶνται αἱ ΓΑΘ, ΘΕ, καὶ τὰ σημεῖα συναντήσεως Γ, Α δὲν περιέχουσι τὴν Ε, τὸ σημεῖον Θ θὰ εἶναι μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς τομῆς ΓΑΕ. Καὶ εἶναι ἀντικειμένη αὐτῆς ἡ ΒΔ· ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἄρα ἀγομένη εὐθεῖα πρὸς τὸ Θ θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΓΘΕ· ὅπερ *γωνίας· ὅπερ ἄτοπον· ἔπιπτε γὰρ καὶ εἰς τὴν ὑπὸ ΑΘΒ. οὐκ ἄρα ἡ ΕΖ μιᾷ τῶν Α, Β συμπεσεῖται.*

H66

μδ'

Ἐὰν ὑπερβολὴ μίαν τῶν ἀντικειμένων κατὰ τέσσαρα σημεῖα τέμνῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, Ε, καὶ τεμνέτω ὑπερβολὴ τὴν ΑΒΓΔ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ Κ. λέγω, ὅτι ἡ Κ οὐ συμπεσεῖται τῇ Ε.

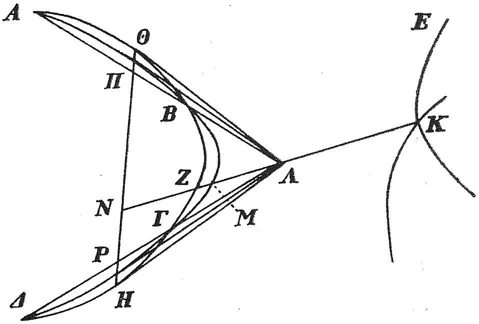
εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΛ πρὸς ΛΒ, ἐχέτω ἡ ΑΠ πρὸς ΠΒ, ὃν δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ, ἡ ΔΡ πρὸς ΡΓ. ἡ ἄρα διὰ τῶν Π, Ρ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις ἐφάψονται. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΚΛ καὶ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὴν ὑπὸ ΒΛΓ γωνίαν καὶ τὰς τομὰς κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον. τεμνέτω κατὰ τὰ Ζ, Μ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὰς ΑΘΖΗ, Κ ἀντικειμένας, ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, ἡ ΝΖ πρὸς ΖΛ, διὰ δὲ τὰς ΑΒΓΔ, Ε, ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ Ε, Κ συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

ἄτοπον· διότι θὰ ἔπιπτε καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΘΒ. Ἡ ΕΖ ἄρα δὲν θὰ συναντήσῃ καμμίαν τῶν Α, Β.

44

Ἐὰν ὑπερβολὴ τέμνῃ μίαν τῶν ἀντικειμένων κατὰ τέσσαρα σημεῖα, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συμπέσῃ πρὸς τὴν ἄλλην τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, Ε, καὶ ὑπερβολὴ ἃς τέμνῃ τὴν ΑΒΓΔ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω ἀντικειμένη αὐτῆς ἡ Κ. Λέγω, ὅτι ἡ Κ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν Ε.

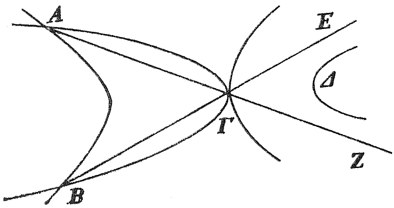


Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἃς τὴν συναντήσῃ κατὰ τὸ Κ, καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἃς ἐκβληθῶσι· αὗται βεβαίως θὰ συναντηθῶσι μεταξύ των (2, 25). Ἂς συναντηθῶσιν εἰς τὸ Λ, καὶ ἃς εἶναι ἡ ΑΛ : ΛΒ = ΑΠ : ΠΒ, καὶ ἡ ΔΛ : ΛΓ = ΔΡ : ΡΓ. Ἡ διερχομένη ἄρα διὰ τῶν Π, Ρ εὐθεῖα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Λ ἀγόμεναι πρὸς τὰ σημεῖα συναντήσεων θὰ ἐφάπτωνται τῶν τομῶν (θ. 9). Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν ἡ ΚΛ καὶ ἃς ἐκβληθῇ· θὰ τέμνῃ αὕτη τὴν γωνίαν ΒΛΓ καὶ τὰς τομὰς εἰς διάφορα σημεῖα. Ἂς τὰς τέμνῃ κατὰ τὰ σημεῖα Ζ, Μ· θὰ εἶναι λοιπὸν διὰ μὲν τὰς ἀντικειμένας ΑΘΖΗ, Κ, ὡς ἡ ΝΚ : ΚΛ = ΝΖ : ΖΛ, διὰ δὲ τὰς ἀντικειμένας ΑΒΓΔ, Ε, ὡς ἡ ΝΚ : ΚΛ = ΝΜ : ΜΛ (3, 39 καὶ Εὐκλ. V, 16)· ὅπερ ἀδύνατον. Αἱ ὑπερβολαὶ ἄρα Ε, Κ δὲν συμπίπτουσι μεταξύ των.

με´

Ἐὰν ὑπερβολὴ τῇ μὲν τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ κατὰ δύο σημεῖα ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔχουσα αὐτῇ τὰ κοῖλα, τῇ δὲ καθ᾽ ἓν σημεῖον, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

H68 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, Γ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓΒ τῇ μὲν ΑΒ συμπιπτέτω κατὰ τὰ Α, Β, τῇ δὲ Γ καθ᾽ ἓν τὸ Γ, καὶ ἔστω τῇ ΑΓΒ ἀντικειμένη ἡ Δ. λέγω, ὅτι ἡ Δ οὐδετέρᾳ τῶν ΑΒ, Γ συμπεσεῖται.



ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. αἱ ἄρα ΑΓ, ΒΓ τῇ Δ τομῇ οὐ συμπεσοῦνται. ἀλλ᾽ οὐδὲ τῇ Γ τομῇ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται πλὴν τὸ Γ. εἰ γὰρ συμβάλλουσι καὶ καθ᾽ ἕτερον, τῇ ΑΒ ἀντικειμένῃ οὐ συμπεσοῦνται· ὑπόκεινται δὲ συμπίπτουσαι. αἱ ΑΓ, ΒΓ ἄρα εὐθεῖαι τῇ μὲν Γ τομῇ καθ᾽ ἓν συμβάλλουσι τὸ Γ, τῇ δὲ Δ τομῇ οὐδὲ ὅλως συμβάλλουσιν. ἡ Δ ἄρα ἔσται ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΓΖ. ὥστε ἡ Δ τομὴ οὐ συμπεσεῖται ταῖς ΑΒ, Γ.

μϛ´

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ τρία σημεῖα συμβάλλῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται πλὴν καθ᾽ ἕν.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ

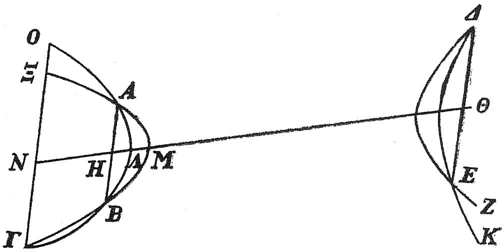
45

Ἐὰν ὑπερβολὴ συναντᾷ μίαν μὲν τῶν ἀντικειμένων εἰς δύο σημεῖα ἔχουσα τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα, πρὸς αὐτήν, τὴν δὲ ἄλλην τὴν συναντᾷ εἰς ἓν σημεῖον, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συναντήσῃ καμμίαν τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, Γ, καὶ ἡ ὑπερβολὴ ΑΓΒ ἂς συναντᾷ τὴν μὲν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, τὴν δὲ Γ εἰς ἓν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἔστω ἀντικειμένη πρὸς τὴν ΑΓΒ ἡ Δ. Λέγω, ὅτι ἡ Δ δὲν θὰ συμπέσῃ πρὸς καμμίαν τῶν ΑΒ, Γ.

Διότι ἂς ἀχθῶσι αἱ ΑΓ, ΒΓ καὶ ἂς ἐκβληθῶσι. Αἱ ΑΓ, ΒΓ ἄρα δὲν θὰ συναντήσωσι τὴν τομὴν Δ (2, 33). Ἀλλὰ καὶ τὴν τομὴν Γ δὲν θὰ τὴν συναντήσωσιν εἰς ἄλλο σημεῖον πλὴν τοῦ Γ. Διότι, ἐὰν τὴν συναντήσωσι καὶ εἰς ἄλλο, δὲν θὰ συναντήσωσι τὴν ἀντικειμένην (2, 33)· διότι ὑπετέθη, ὅτι συναντῶνται. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΓ, ΒΓ τὴν μὲν τομὴν Γ συναντῶσιν εἰς ἓν σημεῖον, τὸ Γ, τὴν τομὴν ὅμως Δ δὲν τὴν συναντῶσι. Ἡ τομὴ ἄρα Δ θὰ εἶναι ἐντὸς τῆς γωνίας ΕΓΖ. Ὥστε ἡ τομὴ Δ δὲν θὰ συναντήσῃ τὰς τομὰς ΑΒ, Γ.

46



Ἐὰν ὑπερβολὴ συναντᾷ μίαν τῶν ἀντικειμένων εἰς τρία σημεῖα, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην τῶν ἀντικειμένων μόνον εἰς ἓν σημεῖον.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἡ ὑπερβολὴ

ΑΜΒΓ συμβαλλέτω τῇ ΑΒΓ κατὰ τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, ἔστω δὲ τῇ ΑΜΓ ἀντικειμένη ἡ ΔΕΚ [τῇ δὲ ΑΒΓ ἡ ΔΕΖ]. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕΚ τῇ ΔΕΖ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

H70 *εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ.*

ἤτοι δὴ παράλληλοί εἰσιν ἢ οὔ.

ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ πασῶν τῶν τομῶν καὶ τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΑΒ, ΔΕ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἡ ΓΝΞΟ· ἔσται δὴ καὶ αὐτὴ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμένη καὶ συμπεσεῖται ταῖς τομαῖς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο. εἰ γὰρ κατὰ τὸ αὐτό, οὐκέτι κατὰ τρία συμβάλλουσιν, ἀλλὰ τέσσαρα. ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ΑΜΒ τομῇ ἴση ἡ ΓΝ τῇ ΝΞ, ἐν δὲ τῇ ΑΛΒ ἡ ΓΝ τῇ ΝΟ. καὶ ἡ ΟΝ ἄρα τῇ ΝΞ ἐστιν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον.

μὴ ἔστωσαν δὴ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΔΕ, ἀλλ' ἐκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Π, καὶ ἡ ΓΟ ἤχθω παρὰ τὴν ΑΠ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΔΠ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ρ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ τῶν
H72 *Η, Θ διάμετροι ἤχθωσαν αἱ ΗΣΙ, ΘΛΜ, ἀπὸ δὲ τῶν Ι, Λ, Μ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΙΥΤ, ΜΥ, ΛΤ· ἔσται δὴ ἡ μὲν ΙΤ παρὰ τὴν ΔΠ, αἱ δὲ ΛΤ, ΜΥ παρὰ τὰς ΑΠ, ΟΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΜΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΥΙ, τὸ ὑπὸ ΑΠΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΠΕ, ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΑΠΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΠΕ, τὸ ἀπὸ ΛΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΙ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΥ πρὸς*

ΑΜΒΓ ἂς συναντᾷ τὴν ΑΒΓ εἰς τρία σημεῖα, τὰ Α, Β, Γ, ἔστω δὲ πρὸς μὲν τὴν ΑΜΓ ἀντικειμένη ἡ ΔΕΚ [πρὸς δὲ τὴν ΑΒΓ ἡ ΔΕΖ]. Λέγω, ὅτι ἡ ΔΕΚ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΔΕΖ εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς ἕν.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τὴν συναντήσῃ εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΔΕ.

Αὗται ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι ἢ δὲν θὰ εἶναι.

Ἔστωσαν πρῶτον παράλληλοι, καὶ ἂς τμηθῶσιν αἱ ΑΒ, ΔΕ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΘ· εἶναι ἄρα αὕτη διάμετρος ὅλων τῶν τομῶν καὶ αἱ ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως κατηγμέναι (2, 36). Ἂς ἀχθῇ τώρα ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓΝΞΟ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ αὐτὴ τεταγμένως κατηγμένη ἐπὶ τὴν διάμετρον καὶ θὰ συναντήσῃ τὰς τομὰς εἰς διάφορα σημεῖα. Διότι, ἐὰν τὰς συναντήσῃ εἰς τὸ αὐτό, δὲν θὰ συναντῶνται εἰς τρία, ἀλλὰ εἰς τέσσαρα. Θὰ εἶναι λοιπὸν εἰς μὲν τὴν τομὴν ΑΜΒ ἡ ΓΝ = ΝΞ, εἰς δὲ τὴν ΑΛΒ ἡ ΓΝ = ΝΟ (1 ὁρισ. 4). Εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΟΝ = ΝΞ· ὅπερ ἀδύνατον.

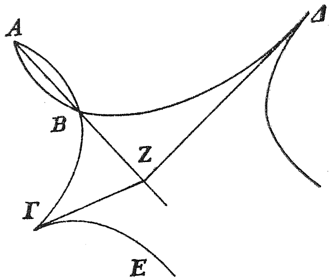
Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΔΕ, ἀλλ' ἐκβαλλόμεναι ἂς συναντῶνται εἰς τὸ Π, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΟ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΠ καὶ ἂς συναντᾷ τὴν ΔΠ ἐκβληθεῖσαν κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἂς τμηθῶσιν εἰς τὸ μέσον αἱ ΑΒ, ΔΕ κατὰ τὰ σημεῖα Η, Θ καὶ διὰ τῶν Η, Θ ἂς ἀχθῶσιν διάμετροι αἱ ΗΣΙ, ΘΛΜ, ἀπὸ δὲ τῶν Ι, Λ, Μ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΙΥΤ, ΜΥ, ΛΤ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ μὲν ΙΤ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΠ , αἱ δὲ ΛΤ, ΜΥ παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΠ, ΟΡ(2, 5). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ $ΜΥ^2 : ΥΙ^2 = ΑΠ \times ΠΒ : ΔΠ \times ΠΕ$, ἀλλ' ὡς τὸ $ΑΠ \times ΠΒ : ΔΠ \times ΠΕ = ΛΤ^2 : ΤΙ^2$, καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΜΥ^2 : ΥΙ^2 = ΛΤ^2 : ΤΙ^2$ (3, 19).

τὸ ἀπὸ ΥΙ, τὸ ἀπὸ ΛΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΙ. διὰ τὰ αὐτὰ ἔσται, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΜΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΥΙ, τὸ ὑπὸ ΞΡΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΡΕ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΛΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΙ, τὸ ὑπὸ ΟΡΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΡΕ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΟΡΓ τῷ ὑπὸ ΞΡΓ· ὅπερ ἀδύνατον.

μζ′

Ἐὰν ὑπερβολὴ τῆς μὲν ἐφάπτηται τῶν ἀντικειμένων, τὴν δὲ κατὰ δύο σημεῖα τέμνῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

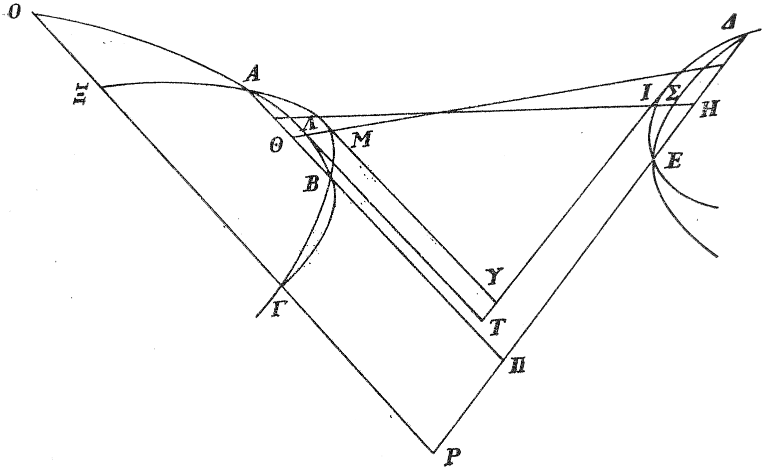
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις



ἡ ΑΒΔ τὴν μὲν ΑΒΓ τεμνέτω κατὰ τὰ Α, Β, τῆς δὲ Δ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἔστω τῆς ΑΒΔ τομῆς ἀντικειμένη ἡ ΓΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ οὐδεμιᾷ τῶν ΑΒΓ, Δ συμπεσεῖται.

εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπε-

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους θὰ εἶναι, ὡς μὲν τὸ $MY^2 : YI^2 = \Xi P \times P\Gamma : \Delta P \times PE$, ὡς δὲ τὸ $\Lambda T^2 : TI^2 = OP \times P\Gamma : \Delta P \times PE$.



Εἶναι ἄρα τὸ $OP \times P\Gamma = \Xi P \times P\Gamma$ (Εὐκλ. 5, 9)· ὅπερ ἀδύνατον.

47

Ἐὰν ὑπερβολὴ τῆς μιᾶς μὲν τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται, τὴν δὲ ἄλλην τέμνῃ εἰς δύο σημεῖα, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συναντήσῃ καμμίαν τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΑΒΔ, ἡ ὁποία τὴν μὲν ΑΒΓ ἂς τὴν τέμνῃ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, ἂς ἐφάπτηται δὲ τῆς τομῆς Δ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἔστω τῆς τομῆς ΑΒΔ ἀντικειμένη ἡ ΓΕ. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ οὐδεμίαν τῶν ΑΒΓ, Δ θὰ συναντήσῃ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς συναντήσῃ τὴν ΑΒ κατὰ τὸ Γ, *ζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἐφαπτομένη ἤχθω συμπίπτουσα τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Ζ· τὸ Ζ ἄρα σημεῖον ἐντὸς ἔσται τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΑΒΔ τομῆς. καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΓΕ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ τῶν* H74 *ΒΖΔ περιεχομένης γωνίας. πάλιν ἐπεὶ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΒΓ, καὶ συμπίπτουσιν αἱ ΑΒ, ΓΖ, καὶ αἱ Α, Β συμπτώσεις οὐ περιέχουσι τὴν Γ, τὸ Ζ σημεῖον μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ἐστὶ τῆς ΑΒΓ τομῆς. καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ Δ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ζ ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ ΑΖΓ γωνίας· ὅπερ ἄτοπον· ἔπιπτε γὰρ καὶ εἰς τὴν ὑπὸ ΒΖΔ. οὐκ ἄρα ἡ ΓΕ μιᾷ τῶν ΑΒΓ, Δ συμπεσεῖται.*

μη'

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν μὲν ἐφάπτηται, κατὰ δύο δὲ συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἀντικειμένῃ οὐ συμπεσεῖται.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΑΗΓ ἐφαπτέσθω μὲν κατὰ τὸ Α, τεμνέτω δὲ κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ τῆς ΑΗΓ ἀντικειμένη ἔστω ἡ Ε. λέγω, ὅτι ἡ Ε τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται.

εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΖ ἐφαπτομένη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ Ζ σημεῖον ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας ἐστί. καὶ ἡ ΑΖ ἐφάψεται τῶν τομῶν ἀμφοτέρων, καὶ ἡ ΔΖ ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Α, Β κατὰ τὰ Η, Κ. καὶ ὃν δὴ ἔχει λόγον ἡ ΓΖ πρὸς ΖΒ, ἐχέτω καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη συναντῶσα τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ· τὸ σημεῖον ἄρα Ζ θὰ εὑρίσκηται ἐντὸς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς τομῆς ΑΒΔ (2, 25). Καὶ εἶναι ἀντικειμένη αὐτῆς ἡ ΓΕ· ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἄρα πρὸς τὸ Ζ ἀγομένη εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΖΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΒΓ εἶναι ὑπερβολὴ καὶ συναντῶνται αἱ ΑΒ, ΓΖ, καὶ αἱ συναντήσεις Α, Β δὲν περιέχουσι τὴν Γ, τὸ σημεῖον Ζ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς τομῆς ΑΒΓ. Καὶ εἶναι ἀντικειμένη αὐτῆς ἡ Δ· ἡ ἀπὸ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ζ ἀγομένη εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΖΓ· ὅπερ ἄτοπον· διότι θὰ ἔπιπτε καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΖΔ. Δὲν θὰ συναντήσῃ ἄρα ἡ ΓΕ καμμίαν τῶν ΑΒΓ, Δ ἀντικειμένων.

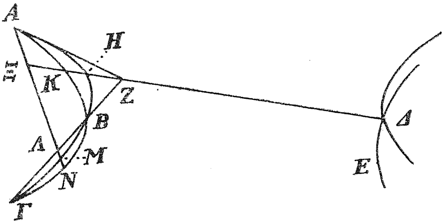
48

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς μὲν τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται εἰς ἓν σημεῖον, συναντᾷ δὲ αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἀντικειμένην.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΑΗΓ ἂς ἐφάπτηται μὲν κατὰ τὸ Α, ἂς τέμνῃ δὲ κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ τῆς ΑΗΓ ἔστω ἀντικειμένη ἡ Ε. Λέγω, ὅτι ἡ Ε δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν Δ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τὴν συναντήσῃ εἰς τὸ Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ καὶ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Ζ καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἡ ΑΖ. Ὁμοίως λοιπὸν πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ σημεῖον Ζ εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας (2, 25). Καὶ ἡ ΑΖ θὰ ἐφάπτηται καὶ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἡ ΔΖ ἐκβαλλομένη θὰ τέμνῃ τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Α, Β εἰς τὰ σημεῖα Η, Κ. Καὶ ἂς εἶναι ἡ ΓΖ :

ἡ ΓΛ πρὸς ΛΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΛ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὰς τομὰς κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο. τεμνέτω κατὰ τὰ Ν, Μ· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰ Ν, Μ ἐφάψονται τῶν τομῶν, καὶ



H76 *ἔσται ὁμοίως τοῖς πρότερον διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομήν, ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ, ἡ ΞΚ πρὸς ΚΖ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν, ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ, ἡ ΞΗ πρὸς ΗΖ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀντικειμένη συμπεσεῖται.*

μθ'

᾿Εὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφαπτομένη καθ᾽ ἕτερον αὐτῇ σημεῖον συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

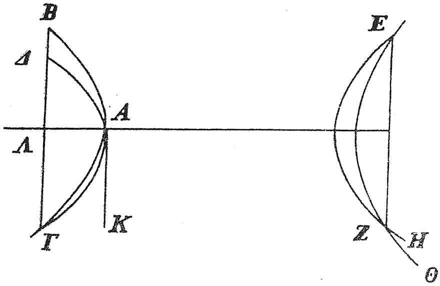
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΕΖΗ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΔΑΓ ἐφαπτέσθω μὲν κατὰ τὸ Α, τεμνέτω δὲ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω τῇ ΔΑΓ ἀντικειμένη ἡ ΕΖΘ. λέγω, ὅτι οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ ἀντικειμένῃ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ δύο τὰ Ε, Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἤχθω ἡ ΑΚ.

ΖΒ = ΓΛ : ΛΒ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΛ ἂς ἐκβληθῇ· θὰ τμήσῃ λοιπὸν τὰς τομὰς εἰς διάφορα σημεῖα. Ἂς τμήσῃ αὐτὰς εἰς τὰ Ν, Μ· αἱ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄρα ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τὰ Ν, Μ θὰ ἐφάπτωνται τῶν τομῶν (θ, 1) καὶ θὰ εἶναι, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα, διὰ μὲν τὴν μίαν τομήν, ὡς ἡ ΞΔ : ΔΖ = ΞΚ : ΚΖ, διὰ δὲ τὴν ἄλλην, ὡς ἡ ΞΔ : ΔΖ = ΞΗ : ΗΖ (3, 39 καὶ Εὐκλ. 5, 16)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ συναντήσῃ ἄρα ἡ ἀντικειμένη τὴν ἀντικειμένην.

49

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἐφαπτομένη μιᾶς τῶν ἀντικειμένων συναντᾷ αὐτὴν εἰς ἄλλο σημεῖον, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην τῶν ἀντικειμένων εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς ἕν.

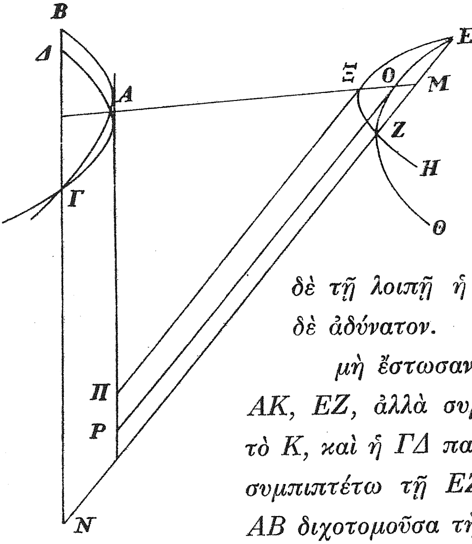


Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΕΖΗ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΔΑΓ ἂς ἐφάπτηται μὲν εἰς τὸ Α ἂς τέμνῃ δὲ εἰς τὸ Γ, καὶ ἔστω πρὸς τὴν ΔΑΓ ἀντικειμένη ἡ ΕΖΘ. Λέγω, ὅτι αὕτη δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην ἀντικειμένην εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς ἕν.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τὴν συναντήσῃ εἰς δύο τὰ Ε, Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἡ ΑΚ.

ἤτοι δὴ παράλληλοί εἰσιν ἢ οὔ.

ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι, καὶ ἤχθω ἡ διχοτομοῦσα H78 διάμετρος τὴν EZ· ἥξει ἄρα διὰ τοῦ A καὶ ἔσται διάμετρος τῶν δύο συζυγῶν. ἤχθω διὰ τοῦ $Γ$ παρὰ τὰς AK, EZ ἡ $ΓΛΔB$· τεμεῖ ἄρα τὰς τομὰς κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον. ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ ἴση ἡ $ΓΛ$ τῇ $ΛΔ$, ἐν δὲ τῇ λοιπῇ ἡ $ΓΛ$ τῇ $ΛB$. τοῦτο δὲ ἀδύνατον.



μὴ ἔστωσαν δὴ παράλληλοι αἱ AK, EZ, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ K, καὶ ἡ $ΓΔ$ παρὰ τὴν AK ἠγμένη συμπιπτέτω τῇ EZ κατὰ τὸ N, ἡ δὲ AB διχοτομοῦσα τὴν EZ τεμνέτω τὰς τομὰς κατὰ τὰ $Ξ$, O, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν τῶν τομῶν ἀπὸ τῶν $Ξ$, O αἱ $ΞΠ$, OP. ἔσται ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ $AΠ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΠΞ$, τὸ ἀπὸ AP πρὸς τὸ ἀπὸ PO, καὶ διὰ τοῦτο ὡς τὸ ὑπὸ $ΔNΓ$ πρὸς τὸ ὑπὸ ENZ, τὸ ὑπὸ $BNΓ$ πρὸς τὸ ὑπὸ ENZ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ $ΔNΓ$ τῷ ὑπὸ $BNΓ$· ὅπερ ἀδύνατον.

ν′

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων καθ᾽ ἓν σημεῖον ἐπιψαύῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Αὗται θὰ εἶναι ἢ παράλληλοι ἢ ὄχι.

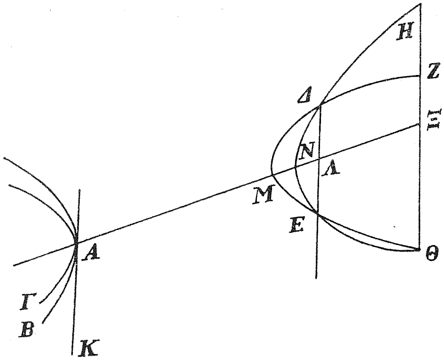
Ἔστωσαν πρῶτον παράλληλοι, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ διχοτομοῦσα τὴν ΕΖ διάμετρος· θὰ διέλθῃ ἄρα αὕτη διὰ τοῦ Α καὶ θὰ εἶναι διάμετρος τῶν δύο συζυγῶν (2, 34). Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὰς ΑΚ, ΕΖ ἡ ΓΛΔΒ· θὰ τμήσῃ ἄρα αὕτη τὰς τομὰς εἰς διάφορα σημεῖα. Θὰ εἶναι λοιπὸν εἰς μὲν τὴν μίαν ἡ ΓΛ = ΛΔ, εἰς δὲ τὴν ἄλλην ἡ ΓΛ = ΛΒ (1 ὁρισ. 4). Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον.

Ἂς μὴ εἶναι τώρα παράλληλοι αἱ ΑΚ, ΕΖ, ἀλλ' ἂς συναντῶνται εἰς τὸ Κ, καὶ ἡ ΓΔ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΑΚ ἂς συναντᾷ τὴν ΕΖ εἰς τὸ Ν, ἡ δὲ ΑΒ διχοτομοῦσα τὴν ΕΖ ἂς τέμνῃ τὰς τομὰς εἰς τὰ σημεῖα Ξ, Ο, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν ἀπὸ τῶν σημείων Ξ, Ο αἱ ΞΠ, ΟΡ. Θὰ εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $ΑΠ^2 : ΠΞ^2 = ΑΡ^2 : ΡΟ^2$ (2,5 καὶ Εὐκλ. 6,4), καὶ διὰ τοῦτο, ὡς τὸ $ΔΝ \times ΝΓ : ΕΝ \times ΝΖ = ΒΝ \times ΝΓ : ΕΝ \times ΝΖ$ (3, 19). Εἶναι ἄρα τὸ $ΔΝ \times ΝΓ = ΒΝ \times ΝΓ$ (Εὐκλ. 5, 19)· ὅπερ ἀδύνατον.

50

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εἰς ἓν σημεῖον, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην τῶν ἀντικειμένων εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς δύο.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΕΔΗ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α, καὶ ἔστω τῆς ΑΓ ἀντικειμένη ἡ ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΔΖ τῇ ΕΔΗ οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

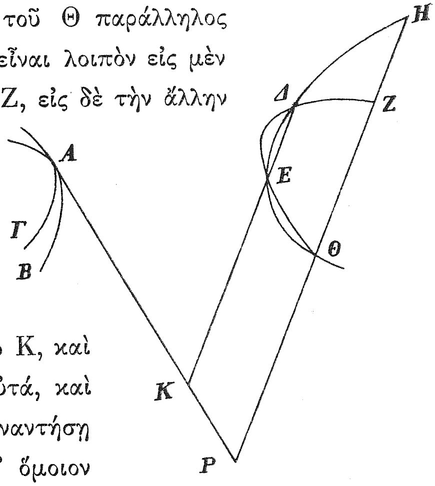


εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ τρία τὰ Δ, Ε, Θ, καὶ ἤχθω τῶν ΑΒ, ΑΓ ἐφαπτομένη ἡ ΑΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστωσαν πρότερον
H80 *παράλληλοι αἱ ΑΚ, ΔΕ· καὶ τετμήσθω ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΛ. ἔσται δὴ διάμετρος ἡ ΑΛ τῶν δύο συζυγῶν καὶ τέμνει τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Δ, Ε κατὰ τὰ Μ, Ν [ὥστε ἡ ΔΛΕ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ]. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΔΕ ἡ ΘΖΗ· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἴση ἡ ΘΞ τῇ ΞΖ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἴση ἡ ΘΞ τῇ ΞΗ. ὥστε καὶ ἡ ΞΖ τῇ ΞΗ ἐστιν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον.*

μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΚ, ΔΕ παράλληλοι, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γεγονέτω, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΑΚ συμπιπτέτω τῇ ΖΘ κατὰ τὸ Ρ. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΔΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ, ἐν μὲν τῇ ΖΔΕ τομῇ τὸ ὑπὸ ΖΡΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΑ, ἐν δὲ τῇ ΗΔΕ τὸ ὑπὸ ΗΡΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΑ. τὸ ἄρα

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΕΔΗ καὶ ἡ ΑΓ ὑπερβολὴ ἂς ἐφάπτηται τῆς ΑΒ κατὰ τὸ Α, καὶ ἔστω ἀντικειμένη τῆς ΑΓ ἡ ΕΔΖ. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΔΖ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΕΔΗ εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς δύο.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τὴν συναντήσῃ εἰς τρία τὰ Δ, Ε, Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῶν ΑΒ, ΑΓ ἡ ΑΚ καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΕ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἔστωσαν πρῶτον αἱ ΑΚ, ΔΕ παράλληλοι· καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΔΕ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Λ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΛ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΑΛ διάμετρος τῶν δύο συζυγῶν (2, 34) καὶ τέμνει τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Δ, Ε κατὰ τὰ Μ, Ν [ὥστε ἡ ΔΛΕ ἔχει τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Λ]. Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Θ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ ἡ ΘΖΗ· θὰ εἶναι λοιπὸν εἰς μὲν τὴν μίαν τομὴν ἡ ΘΞ = ΞΖ, εἰς δὲ τὴν ἄλλην ἡ ΘΞ = ΞΗ (1 ὁρισ. 4). Ὥστε καὶ ἡ ΞΖ = ΞΗ· ὅπερ ἀδύνατον.

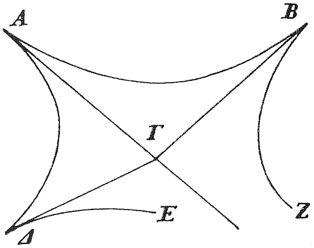


Ἂς μὴ εἶναι τώρα αἱ ΑΚ, ΔΕ παράλληλοι, ἀλλὰ ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Κ, καὶ τὰ λοιπὰ ἂς γίνωσι τὰ αὐτά, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ΑΚ ἂς συναντήσῃ τὴν ΖΘ κατὰ τὸ Ρ. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύομεν, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ ΔΚ x ΚΕ : ΑΚ², εἰς μὲν τὴν τομὴν ΖΔΕ, = ΖΡ x ΡΘ : ΡΑ², εἰς δὲ τὴν τομὴν ΗΔΕ, τὸ ΔΚ x ΚΕ : ΑΚ² = ΗΡ x ΡΘ : ΡΑ² (3, 19. Εὐκλ. 5, 16). Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΗΡ x ΡΘ = ΖΡ x ὑπὸ ΗΡΘ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΡΘ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΕΔΖ τῇ ΕΔΗ κατὰ πλείονα σημεῖα συμβάλλει ἢ δύο.

H82

να′

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.



ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ ἑκατέρας αὐτῶν ἐφαπτέσθω κατὰ τὰ Α, Β, ἀντικειμένη δὲ αὐτῆς ἔστω ἡ Ε. λέγω, ὅτι ἡ Ε οὐδετέρᾳ τῶν Α, Β συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω τῇ Α κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις ἐντὸς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΑΒ τομῆς. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΔ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ ἔσται τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν ΒΓ, ΓΖ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ Ε συμπεσεῖται ταῖς Α, Β.

νβ′

Ἐὰν ἑκατέρα τῶν ἀντικειμένων ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ᾽ ἓν ἐφάπτηται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχουσα, οὐ συμπεσεῖται καθ᾽ ἕτερον σημεῖον.

ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων ἀντικείμεναι κατὰ τὰ Α, Δ σημεῖα. λέγω, ὅτι καθ᾽ ἕτερον σημεῖον οὐ συμβάλλουσιν.

ΡΘ (Εὐκλ. 5, 9)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ συναντήσῃ ἄρα ἡ ΕΔΖ τὴν ΕΔΗ εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς δύο.

51

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἐφάπτηται ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συμπέσῃ πρὸς καμμίαν τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ἡ ὑπερβολὴ ΑΒ ἂς ἐφάπτηται ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, ἔστω δὲ ἀντικειμένη αὐτῆς ἡ Ε. Λέγω, ὅτι ἡ Ε δὲν θὰ συμπέσῃ πρὸς καμμίαν τῶν ἀντικειμένων Α, Β.

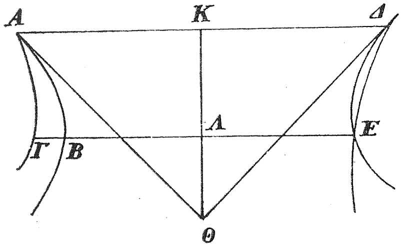
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς συναντήσῃ τὴν Α κατὰ τὸ Δ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν· αὗται θὰ συναντηθῶσι μεταξύ των ἐντὸς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς τομῆς ΑΒ (2, 25). Ἂς συναντηθῶσι κατὰ τὸ Γ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔ· ἡ ΓΔ ἄρα θὰ εἶναι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν ΒΓ, ΓΖ· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν θὰ συναντήσῃ ἄρα ἡ Ε τὰς Α, Β.

52

Ἐὰν ἑκατέρα τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων κατὰ ἓν σημεῖον ἔχουσα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα, δὲν θὰ τὰς συναντήσῃ εἰς ἄλλο σημεῖον.

Διότι ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των ἀντικείμεναι κατὰ τὰ σημεῖα Α, Δ. Λέγω, ὅτι δὲν θὰ συναντῶνται εἰς ἄλλο σημεῖον.

εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Δ συμπέπτωκε κατὰ τὸ Ε, ἡ ἄρα ΑΒ τῇ ΑΓ οὐ συμβάλλει



κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Δ τῶν τομῶν ἐφα-
H84 *πτόμεναι αἱ ΑΘ, ΘΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΑΔ ἤχθω ἡ ΕΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ δευτέρα διάμετρος ἤχθω τῶν ἀντικειμένων ἡ ΘΚΛ· τεμεῖ δὴ τὴν ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Κ. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΒ, ΕΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ. ἴση ἄρα ἡ ΒΛ τῇ ΛΓ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα συμπεσοῦνται κατ' ἄλλο σημεῖον.*

νγ'

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτηται, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΔΒ, Ε, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ τῆς ΑΔΒ ἐφαπτέσθω κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β, καὶ ἔστω ἀντικειμένη τῆς ΑΓ ἡ Ζ. λέγω, ὅτι ἡ Ζ τῇ Ε οὐ συμπεσεῖται.

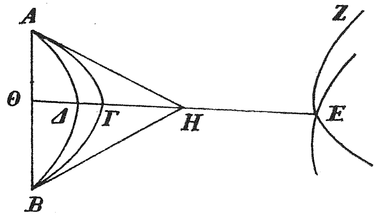
εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΕΗ καὶ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὰς τομάς. ἔστω δὴ ὡς ἡ ΕΗΓΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἡ ΑΒ τὰς ἁφὰς ἐπέ-

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπερβολὴ ἐφαπτομένη μιᾶς τῶν ἀντικειμένων κατὰ τὸ Δ συνηντήθη κατὰ τὸ Ε, ἡ ΑΒ ἄρα δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΓ εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς ἓν (θ. 49). Ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν τομῶν Α, Δ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΘ, ΘΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΕΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ δευτέρα διάμετρος τῶν ἀντικειμένων ἡ ΘΚΛ· αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν ΑΔ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Κ (2, 39). Καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΒ, ΕΓ θὰ τέμνηται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Λ (1 ὁρισ. 4). Εἶναι ἄρα ἡ ΒΛ = ΛΓ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ συναντηθῶσιν ἄρα αἱ τομαὶ εἰς ἄλλο σημεῖον.

53

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην τῶν ἀντικειμένων.

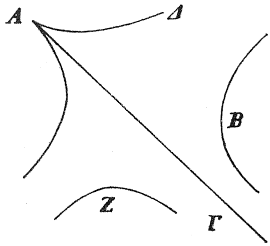
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΔΒ, Ε καὶ ἡ ὑπερβολὴ ΑΓ ἂς ἐφάπτηται τῆς ΑΔΒ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β, καὶ ἔστω ἀντικειμένη τῆς ΑΓ ἡ Ζ. Λέγω, ὅτι ἡ Ζ δὲ θὰ συναντήσῃ τὴν Ε.



Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τὴν συναντήσῃ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΕΗ καὶ ἂς ἐκβληθῇ αὕτη· θὰ τμήσῃ λοιπὸν τὰς τομὰς εἰς διάφορα σημεῖα. Ἔστω ὡς ἡ ΕΗΓΔΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΗ, ΗΒ ἐφάπτονται, καὶ ἡ ΑΒ ἑνώνει τὰς *ζευξεν, ἔσται ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ συζυγίᾳ, ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΘΔ πρὸς ΔΗ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ Ζ τῇ Ε συμβάλλει.*

H86 *νδ'*

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐπιψαύῃ ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.



ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ὑπερβολή τις ἡ ΑΔ κατὰ τὸ Α, ἀντικειμένη δὲ τῆς ΑΔ ἔστω ἡ Ζ. λέγω, ὅτι ἡ Ζ τῇ Β οὐ συμπεσεῖται.

ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ΑΓ διὰ μὲν τὴν ΑΔ οὐ συμπεσεῖται τῇ Ζ, διὰ δὲ τὴν Α οὐ συμπεσεῖται τῇ Β. ὥστε ἡ ΑΓ μεταξὺ πεσεῖται τῶν Β, Ζ τομῶν. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ Β τῇ Ζ οὐ συμπεσεῖται.

νε'

Ἀντικείμεναι ἀντικειμένας οὐ τέμνουσι κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἕτεραι ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖ, καὶ τεμνέτω πρότερον ἡ ΑΒΓΔ τομὴ ἑκατέραν τῶν ΑΒ, ΓΔ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς. ἡ ἄρα ἀντικειμένη τῇ ΑΒΓΔ, τουτέστιν ἡ ΕΖ, οὐδεμιᾷ τῶν ΑΒ, ΓΔ συμπεσεῖται.

ἁφάς, θὰ εἶναι εἰς μὲν τὴν μίαν συζυγίαν, ὡς ἡ ΘΕ : ΕΗ = ΘΔ: ΔΗ, εἰς δὲ τὴν ἄλλην, ὡς ἡ ΘΕ : ΕΗ = ΘΓ : ΓΗ (3, 39. Εὐκλ. 5, 16)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ συναντήση ἄρα ἡ Ζ τὴν Ε.

54

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἔχουσα τὰ κυρτὰ αὐτῆς ἀντεστραμμένα, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν δὲν θὰ συναντήση τὴν ἄλλην τῶν ἀντικειμένων.

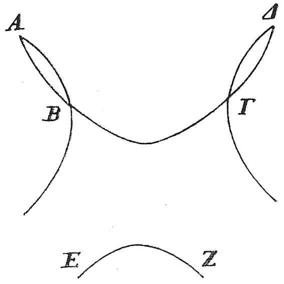
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ἂς ἐφάπτηται τῆς τομῆς Α ὑπερβολή τις ἡ ΑΔ κατὰ τὸ Α, ἀντικειμένη δὲ τῆς ΑΔ ἔστω ἡ Ζ. Λέγω, ὅτι ἡ Ζ δὲν θὰ συναντήση τὴν Β.

Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα διὰ μὲν τὴν ΑΔ δὲν θὰ συναντήση τὴν Ζ, διὰ δὲ τὴν Α δὲν θὰ συναντήση τὴν Β (2, 33). Ὥστε ἡ ΑΓ θὰ πέση μεταξὺ τῶν τομῶν Β, Ζ. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ Β δὲν θὰ συναντήση τὴν Ζ.

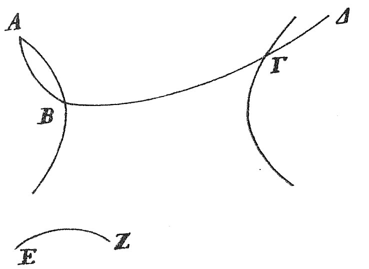
55

Ἀντικείμεναι δὲν τέμνουσιν ἀντικειμένας εἰς περισσότερα παρὰ μόνον εἰς τέσσαρα σημεῖα.

Διότι, ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἄλλαι ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖ, καὶ ἂς τέμνῃ πρῶτον ἡ τομὴ ΑΒΓΔ ἑκατέραν τῶν ΑΒ, ΓΔ εἰς τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, ἔχουσα ἀντεστραμμένα τὰ κυρτά, ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα. Ἡ ἀντικειμένη ἄρα πρὸς τὴν ΑΒΓΔ, τουτέστιν ἡ ΕΖ, δὲν θὰ συναντήση καμμίαν ἐκ τῶν ΑΒ, ΓΔ (θ. 43).



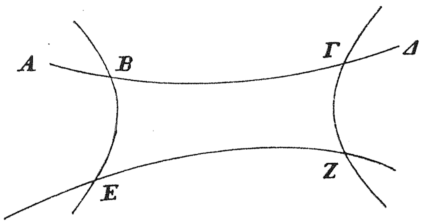
H88 ἀλλὰ δὴ ἡ ΑΒΓΔ τὴν μὲν ΑΒ τεμνέτω κατὰ τὰ Α, Β, τὴν δὲ Γ καθ᾽ ἓν τὸ Γ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς·



ἡ ΕΖ ἄρα τῇ Γ οὐ συμπεσεῖται. εἰ δὲ τῇ ΑΒ συμβάλλει ἡ ΕΖ, καθ᾽ ἓν μόνον συμβάλλει· εἰ γὰρ κατὰ δύο συμβάλλει τῇ ΑΒ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΑΒΓ τῇ ἑτέρᾳ ἀντικειμένῃ τῇ Γ οὐ συμπεσεῖται· ὑπόκειται δὲ καθ᾽ ἓν τὸ Γ συμβάλλουσα.

εἰ δέ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓ τὴν μὲν ΑΒΕ τέμνει κατὰ δύο τὰ Α, Β, τῇ δὲ ΑΒΕ συμβάλλει ἡ ΕΖ, τῇ μὲν Δ οὐ συμπεσεῖται, τῇ δὲ ΑΒΕ συμπίπτουσα οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

εἰ δέ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τετάρτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓΔ ἑκατέραν τέμνει καθ᾽ ἓν σημεῖον, ἡ ΕΖ οὐδετέρᾳ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα.

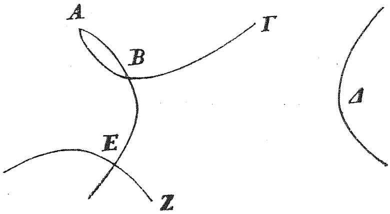


ὥστε διὰ τὰ εἰρημένα καὶ τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν αἱ ΑΒΓΔ, ΓΖ ἀντικειμέναις ταῖς ΒΕ, ΕΖ τομαῖς οὐ συμπεσοῦνται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

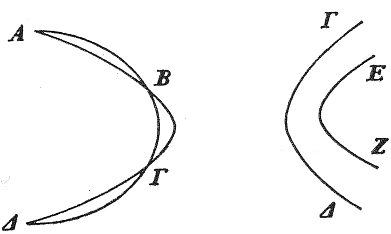
ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχωσι, καὶ ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν τέμνῃ κατὰ τέσσαρα τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἐπὶ τῆς πέμπτης καταγραφῆς, ἡ ΕΖ τῇ ἑτέρᾳ οὐ συμπε-

Ἀλλὰ τώρα ἡ ΑΒΓΔ τὴν μὲν ΑΒ ἂς τὴν τέμνῃ κατὰ τὰ Α, Β, τὴν δὲ Γ εἰς ἕν, εἰς τὸ Γ, ὡς εἶναι εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα· ἡ ΕΖ ἄρα δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν Γ (θ. 41). Ἐὰν δὲ ἡ ΕΖ συναντᾷ τὴν ΑΒ, θὰ τὴν συναντήσῃ μόνον εἰς ἓν σημεῖον· διότι, ἐὰν συναντήσῃ τὴν ΑΒ κατὰ δύο σημεῖα, ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν ἡ ΑΒΓ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην ἀντικειμένην πρὸς τὴν Γ (θ. 43)· διότι ὑπετέθη, ὅτι τὴν συναντᾷ μόνον εἰς ἕν, εἰς τὸ Γ.

Ἐὰν δέ, ὡς εἶναι εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, ἡ ΑΒΓ τὴν μὲν ΑΒΕ τέμνει εἰς δύο σημεῖα τὰ Α, Β, ἡ δὲ ΕΖ συναντᾷ τὴν ΑΒΕ, τὴν μὲν Δ δὲν θὰ τὴν συναντήσῃ (θ. 41), συναντῶσα δὲ τὴν ΑΒΕ δὲν θὰ τὴν συναντήσῃ εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς δύο (θ. 37).



Ἐὰν δέ, ὡς εἶναι εἰς τὸ τέταρτον σχῆμα, ἡ ΑΒΓΔ τέμνῃ ἑκατέραν εἰς ἓν σημεῖον, ἡ ΕΖ καμμίαν δὲν θὰ συναντήσῃ εἰς δύο σημεῖα (θ. 42). Ὥστε διὰ τὰ εἰρημένα καὶ τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν αἱ ΑΒΓΔ, ΓΖ τὰς ἀντικειμένας τομὰς δὲν θὰ τὰς συναντήσωσιν εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς τέσσαρα.



Ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ ἔχωσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα καὶ ἡ μία τέμνῃ τὴν ἄλλην εἰς τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς εἰς τὸ πέμπτον σχῆμα, ἡ ΕΖ θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην (θ. 44). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ δὲν θὰ συναν-

σεῖται. οὐδὲ μὴν ἡ ΕΖ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΒ· πάλιν γὰρ ἔσται ἡ ΑΒ ταῖς ΑΒΓΔ, ΕΖ ἀντικειμέναις συμπίπτουσα κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα [ἀλλ᾽ οὐδὲ ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ συμπεσεῖται].

εἰ δέ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς ἕκτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓΔ τῇ ἑτέρᾳ τομῇ συμβάλλει κατὰ τρία σημεῖα, ἡ ΕΖ τῇ ἑτέρᾳ καθ᾽ ἓν μόνον συμπεσεῖται.

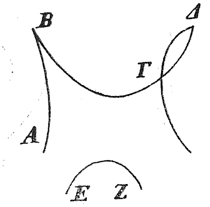
καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν τὰ αὐτὰ τοῖς προτέροις ἐροῦμεν.

ἐπεὶ οὖν κατὰ πάσας τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστι τὸ προτεθέν, ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις οὐ συμβάλλουσι κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

νϛ´

Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμένων καθ᾽ ἓν σημεῖον ἐπιψαύωσιν, οὐ συμπεσοῦνται καὶ κατ᾽ ἄλλα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

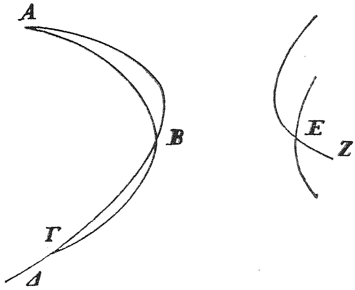
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἕτεραι αἱ Δ, ΕΖ, καὶ ἡ ΒΓΔ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Β, καὶ ἐχέτωσαν ἀντεστραμμένα τὰ κυρτά, καὶ συμπιπτέτω πρῶτον ἡ ΒΓΔ τῇ ΓΔ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, ὡς ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος.



H92 *ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΓΔ κατὰ δύο τέμνει ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά, ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΒΓΔ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά, ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ οὐ συμπε-*

τήση τὴν ΑΒ· διότι πάλιν ἡ ΑΒ θὰ συναντᾷ τὰς ἀντικειμένας ΑΒΓΔ, ΕΖ καὶ θὰ συμπίπτῃ εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ τέσσαρα [ἀλλὰ οὔτε ἡ ΓΔ θὰ συναντήσῃ τὴν ΕΖ].

Ἐὰν δέ, ὡς εἶναι εἰς τὸ ἕκτον σχῆμα, ἡ ΑΒΓΔ συναντᾷ τὴν ἄλλην τομὴν εἰς τρία σημεῖα, ἡ ΕΖ θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην εἰς ἓν μόνον (θ. 46).



Καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἰσχύουσι τὰ αὐτὰ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα.

Ἐπειδὴ λοιπὸν δι' ὅλας τὰς ἐνδεχομένας περιπτώσεις εἶναι φανερὸν τὸ προτεθέν, ἀντικείμεναι δὲν συναντῶσιν ἀντικειμένας εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς τέσσαρα.

56

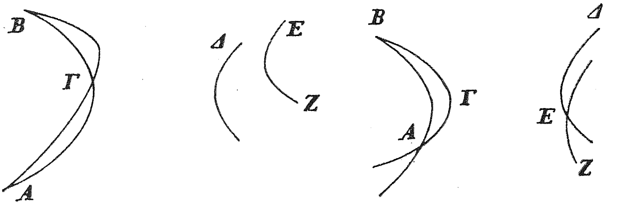
Ἐὰν ἀντικείμεναι ἐφάπτωνται ἀντικειμένων εἰς ἓν σημεῖον, δὲν θὰ συναντῶνται εἰς ἄλλα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς δύο.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἄλλαι αἱ Δ, ΕΖ, καὶ ἡ ΒΓΔ ἂς ἐφάπτηται τῆς ΑΒ εἰς τὸ Β, καὶ ἂς ἔχωσιν ἀντεστραμμένα τὰ κυρτά, καὶ πρῶτον ἂς συναντᾷ ἡ ΒΓΔ τὴν ΓΔ εἰς δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΓΔ τέμνει εἰς δύο σημεῖα ἔχουσα τὰ κυρτὰ ἀντεστραμμένα, ἡ ΕΖ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΒ (θ. 41). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΒΓΔ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ εἰς τὸ Β ἔχουσα ἀντεστραμμένα τὰ κυρτά, ἡ ΕΖ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΓΔ (θ. 54). Ἡ ΕΖ ἄρα *σεῖται. ἡ ἄρα ΕΖ οὐδετέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ τομῶν συμπεσεῖται· κατὰ δύο μόνον ἄρα τὰ Γ, Δ συμβάλλουσιν.*

ἀλλὰ δὴ τὴν ΓΔ ἡ ΒΓ τεμνέτω καθ᾽ ἓν σημεῖον τὸ Γ, ὡς ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἡ ἄρα ΕΖ τῇ μὲν ΓΔ οὐ συμπεσεῖται, τῇ δὲ ΑΒ συμπεσεῖται καθ᾽ ἓν μόνον. εἰ γὰρ κατὰ δύο συμβάλλει ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ, ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται· ὑπόκειται δὲ συμβάλλουσα καθ᾽ ἕν.

εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῇ Δ τομῇ μὴ συμπίπτῃ, ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου σχήματος, διὰ μὲν τὰ προειρημένα ἡ ΕΖ τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.



ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχωσιν, αἱ αὐταὶ ἀποδείξεις ἁρμόσουσι.

κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν.

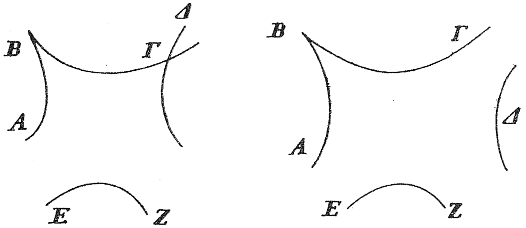
H94 *νζ′*

Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμένων κατὰ δύο ἐπιψαύωσι, καθ᾽ ἕτερον σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἕτεραι αἱ ΑΓ, ΕΖ καὶ ἐφαπτέσθωσαν πρῶτον, ὡς ἐπὶ τοῦ πρώτου σχή-

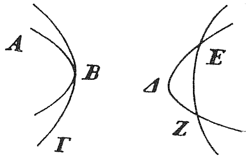
δὲν θὰ συναντήσῃ καμμίαν ἐκ τῶν τομῶν ΑΒ, ΓΔ· συναντῶνται ἄρα μόνον εἰς δύο τὰ Γ, Δ.

Ἀλλὰ τώρα ἡ ΒΓ ἂς τέμνῃ τὴν ΓΔ εἰς ἓν σημεῖον τὸ Γ, ὡς εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα. Ἡ ΕΖ ἄρα τὴν μὲν ΓΔ δὲν θὰ τὴν συναντήσῃ, τὴν δὲ ΑΒ θὰ τὴν συναντήσῃ εἰς ἓν μόνον σημεῖον. Διότι



ἐὰν τὴν συναντήσῃ ἡ ΕΖ τὴν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα, ἡ ΒΓ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΓΔ (θ. 41)· ὑπετέθη δὲ ὅτι τὴν συναντᾷ εἰς ἕν.

Ἐὰν δὲ ἡ ΒΓ δὲν συναντᾷ τὴν τομὴν Δ, ὡς εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, διὰ μὲν τὰ προειρημένα ἡ ΕΖ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν Δ, ἡ δὲ ΕΖ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΒ εἰς περισσότερα σημεῖα παρὰ μόνον εἰς δύο.



Ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ ἔχωσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα, ἰσχύουσιν αἱ αὐταὶ ἀποδείξεις.

Εἰς ὅλας λοιπὸν τὰς ἐνδεχομένας περιπτώσεις εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀποδειχθέντων τὸ ζητηθέν.

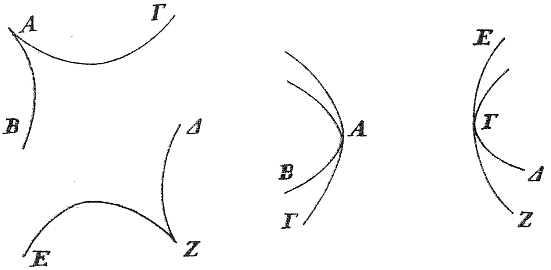
57

Ἐὰν ἀντικείμεναι ἐφάπτωνται ἀντικειμένων εἰς δύο σημεῖα, δὲν θὰ ἐφάπτωνται εἰς ἄλλο.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἄλλαι αἱ ΑΓ, ΕΖ, καὶ ἂς ἐφάπτωνται πρῶτον, ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα, εἰς τὰ ματος, κατὰ τὰ Α, Γ.

ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐφάπτεται κατὰ τὰ Α, Γ σημεῖα, ἡ ΕΖ ἄρα οὐδετέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ συμπεσεῖται.

ἐφαπτέσθωσαν δή, ὡς ἐπὶ τοῦ δευτέρου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ οὐ συμπεσεῖται.



ἐφαπτέσθω δή, ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου σχήματος, ἡ μὲν ΓΑ τῆς ΑΒ κατὰ τὸ Α, ἡ δὲ Δ τῆς ΕΖ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΖΔ τῆς ΕΖ ἐφάπτεται, ἡ ΓΑ τῇ ΔΖ οὐ συμπεσεῖται.

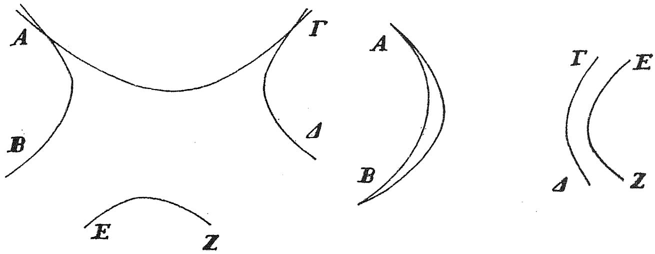
εἰ δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Α, ἡ δὲ ΕΓ
H96 τῆς ΓΔ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα, ὡς ἐπὶ τοῦ τετάρτου σχήματος, καθ᾽ ἕτερον οὐ συμπεσοῦνται. οὐδὲ μὴ ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ συμπεσεῖται.

κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν.

σημεῖα Α, Γ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΓ ἐφάπτεται ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Α, Γ, ἡ ΕΖ ἄρα δὲν θὰ συναντᾷ καμμίαν ἐκ τῶν ΑΒ, ΓΔ (θ. 51).

Ἂς ἐφάπτωνται τώρα, ὡς εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ΓΔ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΕΖ (θ. 53).



Ἂς ἐφάπτηται τώρα, ὡς εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, ἡ μὲν ΓΑ τῆς ΑΒ εἰς τὸ Α, ἡ δὲ Δ τῆς ΕΖ εἰς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΓ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ ἔχουσα ἀντεστραμμένα τὰ κυρτά, ἡ ΕΖ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΒ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΖΔ ἐφάπτεται τῆς ΕΖ, ἡ ΓΑ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΔΖ.

Ἐὰν δὲ ἡ μὲν ΑΓ ἐφάπτηται τῆς ΑΒ εἰς τὸ Α, ἡ δὲ ΕΓ ἐφάπτηται τῆς ΓΔ εἰς τὸ Γ, καὶ ἔχωσι τὰ κοῖλα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, ὡς εἰς τὸ τέταρτον σχῆμα, δὲν θὰ συναντηθῶσιν εἰς ἄλλο σημεῖον (θ. 52). Οὔτε ἡ ΕΖ θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΒ (θ. 39).

Εἰς ὅλας λοιπὸν τὰς ἐνδεχομένας περιπτώσεις εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀποδειχθέντων τὸ ζητηθέν.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

Ὡς ἀναφέρεται εἰς τὸν πρόλογον τοῦ α' τόμου (σελίδες 5, 14, 15) τὰ βιβλία τῶν Κωνικῶν ὑπ' ἀριθμ. 5 - 6 - 7 ἐσώθησαν εἰς τὴν ἀραβικὴν καὶ ἐξεδόθησαν εἰς τὴν λατινικὴν ἐν Φλωρεντίᾳ κατὰ τὸ 1661. Τὰ εἰς τὴν μετάφρασιν ταύτην ἐκδοθέντα βιβλία ἐπανεξεδόθησαν μετὰ τοῦ ἑλληνικοῦ κειμένου τῶν τεσσάρων πρώτων βιβλίων, καὶ λατινικῆς τούτων μεταφράσεως, ἐν Ὀξφόρδῃ ὑπὸ τοῦ Edm. Halley κατὰ τὸ 1710. Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἐκδόσεως ἐγένετο ἔκδοσις εἰς τὴν γαλλικὴν τῶν βιβλίων 1 - 7 ἐν Παρισίοις κατὰ τὸ 1922 καὶ 1959 ὑπὸ τοῦ Βέλγου Paul ver Eecke. Τὰ κατωτέρω δημοσιευόμενα βιβλία 5 - 6 καὶ 7 τοῦ ἑπομένου δ' τόμου μετεγλωττίσαμεν εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν ἐκ τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως Paul ver Eecke.

ΚΩΝΙΚΩΝ

βιβλίον 5ον

Ὁ Ἀπολλώνιος πρὸς τὸν (βασιλέα) Ἄτταλον, χαίρειν.

Εἰς τὸ πέμπτον αὐτὸ βιβλίον ἐκθέτω τὰς ἰδιότητας τὰς σχετικὰς πρὸς τὰς μεγίστας καὶ ἐλαχίστας εὐθείας. Ἀλλὰ παρετήρησα, ὅτι ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι ἔζησαν πρὸ ἡμῶν ἢ οἱ σύγχρονοι ἡμῶν, δὲν ἐπραγματεύθησαν τὴν θεωρίαν τῶν ἐλαχίστων εὐθειῶν παρὰ κατὰ τρόπον πρόχειρον καὶ ὡς ἐκ τούτου περιωρίσθησαν ν' ἀποδείξωσιν ἁπλῶς ποῖαι εἶναι αἱ εὐθεῖαι αἵτινες ἐφάπτονται τῶν κωνικῶν τομῶν, καί, ἀντιστρόφως, ποῖαι εἶναι αἱ ἰδιότητες τῶν εὐθειῶν αὐτῶν διὰ νὰ εἶναι αὗται ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν.

Ἐξ ἄλλου, ἀπησχολήθην μὲ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον, ὅπου ἐπραγματεύθην αὐτὰς κατὰ τρόπον ἀνεξάρτητον τῆς θεωρίας τῶν ἐλαχίστων εὐθειῶν. Πάντοτε, εἰς τὰς σχετικὰς ἀποδείξεις πρὸς τὰς θεωρουμένας αὐτὰς εὐθείας, καθ' ὅσον ἀναφέρονται εἰς οἱανδήποτε διάμετρον μιᾶς τομῆς, ἀπεφάσισα νὰ θεωρήσω τὴν αὐτὴν τάξιν, τὴν ὁποίαν ἠκολούθησα εἰς τὰ Στοιχεῖα, τὴν ὁποίαν ἔδωσα ἀμέσως εἰς τὰς τρεῖς τομάς. Ἀλλ᾽ ὡς παρουσιάζονται αἱ περιπτώσεις κατ᾽ ἀπειράριθμον εἶδος, ἐδοκίμασα ἁπλῶς ν᾽ ἀποδείξω, τώρα, ὅτι τὸ ὑλικὸν ἐπιτρέπει θεώρησιν τῶν ἀξόνων ἢ τῶν κυρίων διαμέτρων.

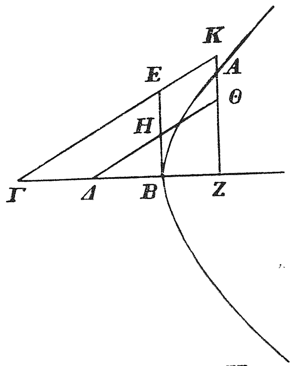
Ἐξ ἄλλου, προσεπάθησα πολὺ νὰ διαχωρίσω καὶ νὰ εἰδικεύσω τὰς ἰδιότητας τὰς σχετικὰς πρὸς τὰς ἐλαχίστας γραμμὰς κατὰ τὰ εἴδη αὐτῶν καὶ συνέδεσα τὰς προτάσεις τὰς σχετικὰς πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν μεγίστων γραμμῶν, τῶν μνημονευθεισῶν ἀνωτέρω.

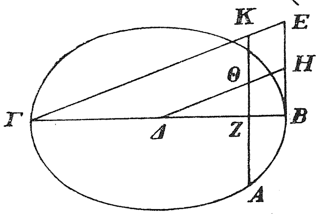
Ἐξ ἄλλου, τὸ ὑλικὸν αὐτὸ εἶναι πάντοτε ἀπαραίτητον εἰς τοὺς ἀφοσιωμένους εἰς τὴν ἐπιστήμην ἡμῶν, ὄχι μόνον ἀπὸ ἀπόψεως τῆς ἀναλύσεως καὶ τοῦ διορισμοῦ (διερευνήσεως) τῶν προβλημάτων, ἀλλ᾽ ἀκόμη ἀπὸ ἀπόψεως τῆς συνθέσεως αὐτῶν· χωρὶς νὰ ὑπολογίσω, ὅτι τὸ ὑλικὸν αὐτὸ εἶναι ἀνάλογον ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἄξιοι νὰ ἐκτιμήσωσι τὴν ἐνυπάρχουσαν ἀξίαν του. Εὐτύχει.

1

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἢ ἔλλειψιν φέρωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς τελευταίας ταύτης εὐθείας φέρωμεν εὐθεῖαν πρὸς τὸ κέντρον τῆς τομῆς καὶ ἐκ τυχόντος σημείου τῆς τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως κατηγμένη ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὸ τετράγωνον τῆς τελευταίας ταύτης εὐθείας εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τετράπλευρον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν οὕτω πως ἀχθεισῶν εὐθειῶν καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ ΑΒ, τῶν ὁποίων ἄξων εἶναι ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Δ. Ἔστω ΒΕ ἡ παράμετρος καὶ ΒΗ τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου ΒΕ. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΗ καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ ΑΖ τεταγμένως κατηγμένη, ἥτις θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ καὶ ἂς προεκβληθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Θ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τετράπλευρον ΒΖΗΘ. Ἂς ἐπιζευχθῇ ἐκ τοῦ Ε ἡ ΕΓ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΗ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΖΘ μέχρι τοῦ Κ. Ἡ ΘΚ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν ΗΕ, τουτέστι τὴν ΒΗ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκατέραν ἡ ΖΘ, ὁπότε ἡ ΖΚ = ΒΗ + ΖΘ· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΖΚ x ΒΖ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος ΒΗ + ΖΘ καὶ τῆς ΒΖ. Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ ΖΚ x ΒΖ = $ΑΖ^2$ (1, 12 καὶ 13)· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον (ΒΗ + ΖΘ) x ΒΖ = $ΑΖ^2$. Εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον (ΒΗ + ΖΘ) x ΒΖ = 2 τετράπλευρον ΒΖΗΘ· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΖ^2$ = 2 τετράπλευρον ΒΖΗΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

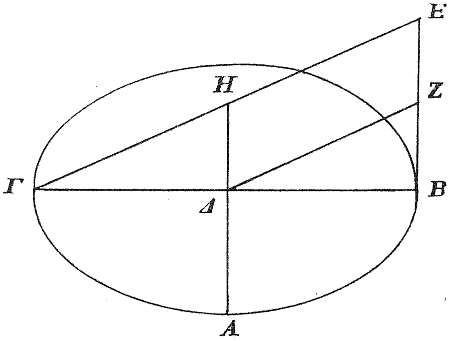




2

Ὅτι ἡ τεταγμένως κατηγμένη πίπτει ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΒΖ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΖ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΔ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΒΖΔ.



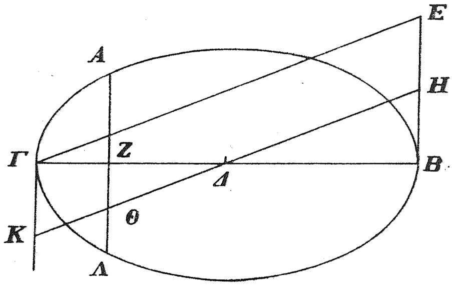
Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΕ. Ἐπειδὴ ἡ ΒΖ = ΖΕ καὶ ἐπίσης εἶναι ἡ ΖΕ = ΔΗ, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ, ἕπεται ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΔΗ x ΔΒ = 2 τρίγωνον ΔΖΒ. Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΔΗ x ΔΒ = ΑΔ² (1, 13)· εἶναι ἄρα τὸ ΑΔ² = 2 τρίγωνον ΔΖΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3

Ὅτι ἡ τεταγμένως κατηγμένη πίπτει τώρα πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ σημείου Δ, τουτέστι πέραν τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως ὡς ἡ εὐθεῖα ΑΖ.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΒΗ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΕ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΔ καὶ ἂς ἐκβληθῇ. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ, ἡ εὐθεῖα ΖΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΗΔ ἐκβαλλομένην. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν τριγώνων ΒΔΗ, ΖΔΘ.

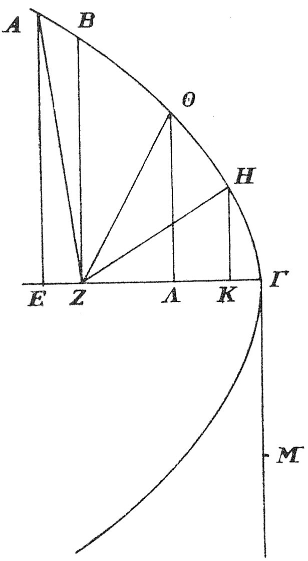
Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ, ἡ ΓΚ, συναντῶσα τὴν ΗΔ κατὰ τὸ Κ καὶ ἀφοῦ συμπληρωθῇ ἡ τομὴ ΑΒ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΑΖ μέχρι τοῦ σημείου τῆς τομῆς Λ. Εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΖΛ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΖΚΘΖ (θ. 1). Ὥστε ἡ ΖΑ = ΖΛ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΑΖ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΚΘΖ (θ. 1).



Εἶναι ἄρα τὸ ΓΚΘΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τριγώνων ΓΔΚ, ΖΔΘ, ἐνῷ τὸ τρίγωνον ΓΔΚ = τρίγωνον ΒΔΗ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΔ = ΓΔ· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν τριγώνων ΒΔΗ, ΖΔΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἄξονος παραβολῆς ληφθῇ σημεῖον τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἀχθῶσι διάφοροι εὐθεῖαι μέχρι τῆς τομῆς, ἡ μικροτέρα τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ εἶναι ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, καὶ αἱ ἐγγύτερον ταύτης εἶναι μικρότεραι τῶν ἀπώτερον αὐτῆς καὶ τὸ τετράγωνον οἱασδήποτε τῶν εὐθειῶν τούτων ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης τῶν εὐθειῶν κατὰ τὸ ἰσοδύναμον τετράγωνον τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς καὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς τυχούσης αὐτῆς εὐθείας ἐπὶ τὸν ἄξονα.



Ἔστω ΓΕ ὁ ἄξων παραβολῆς ⟨ΑΒΓ⟩ καὶ ἐπὶ τούτου ἡ εὐθεῖα ΓΖ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΒΖ, ΘΖ, ΗΖ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΖ ἀχθεῖσα ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν ἄλλων εὐθειῶν τῶν ἀχθεισῶν μέχρι τῆς τομῆς ΑΒΓ, καὶ ὅτι αἱ ἐγγύτερον πρὸς ταύτην εἶναι μικρότεραι τῶν ἀπώτερον αὐτῆς, καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον μιᾶς τούτων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΖ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς καὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐπὶ τὸν ἄξονα.

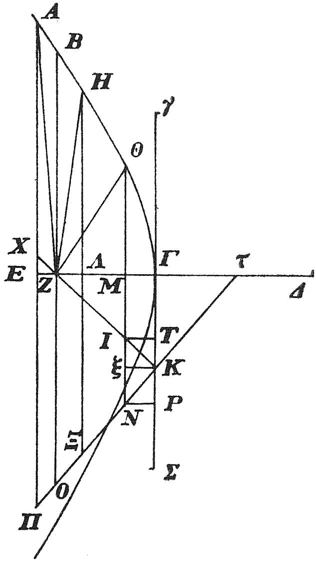
Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΗΚ, ΘΛ, ΑΕ καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΜ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· εἶναι ἄρα ΓΖ = ΓΜ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΓΜ x ΓΚ = HK^2 (1, 11). Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΓΜ x ΓΚ = 2ΓΖ x ΓΚ· εἶναι λοιπὸν τὸ HK^2 = 2ΓΖ x ΓΚ καὶ τὸ 2ΓΖ x ΓΚ + KZ^2 = HK^2+ KZ^2, τουτέστιν = HZ^2 (Εὐκλ. 1, 47). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ 2ΖΓ x ΓΚ + ZK^2 = ZH^2 (Εὐκλ. 2, 7), τὸ ἄρα ZH^2 ὑπερέχει τοῦ $\mathrm{Z\Gamma}^2$ κατὰ τὸ $\mathrm{\Gamma K}^2$. Ὥστε εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΘΖ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς εὐθείας ΗΖ, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΓΖ· ἡ δὲ εὐθεῖα ΓΖ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ὅλων, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐγγύτερον πρὸς ταύτην εἶναι μικρότεραι ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπώτερον αὐτῆς. Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε τῶν εὐθειῶν τούτων ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς τυχούσης αὐτῆς εὐθείας ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς.

5

Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον εὑρίσκηται ἐπὶ τοῦ ἄξονος ὑπερβολῆς εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου τὰ πράγματα θὰ εἶναι τὰ αὐτὰ ὡς εἰς τὴν παραβολήν, πλὴν τοῦ ὅτι (ἐνταῦθα) αἱ ὑπεροχαὶ τῶν τετραγώνων τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης τῶν εὐθειῶν θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν ἀχθεισῶν ὡς τεταγμένως κατηγμέναι καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ πλαγίου ἄξονος καὶ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ἄξονος τούτου σὺν τὴν παράμετρον αὐτοῦ, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τῆς κορυφῆς νὰ εἶναι σταθερῶς ὁμόλογος τοῦ πλαγίου ἄξονος.

Ἔστω ἡ ὑπερβολὴ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΓΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΖ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἂς ἀχθῶσιν πρὸς τὴν τομὴν τυχοῦσαι εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΗ, ΖΘ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΖ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσι πρὸς τὴν τομὴν καὶ ἡ ἐγγύτερον πρὸς ταύτην (τὴν ΓΖ) εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης ἀπώτερον, καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον οἱασδήποτε τῶν εὐθειῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΗ, ΖΘ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΓΖ κατὰ ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης εὐθείας μεταξὺ τῆς κορυφῆς Γ καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ πλαγίου ἄξονος ΔΓ τῆς τομῆς καὶ μιᾶς εὐθείας ἴσης πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος καὶ τῆς παραμέτρου.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΓΖ ἴση πρὸς τὴν ΓΚ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου καὶ ὅτι κέντρον τῆς τομῆς εἶναι τὸ σημεῖον τ. Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΘΜΙΝ, ΗΛΞ, ΑΧΕΠ τεταγμένως κατηγμέναι ἐπὶ τὸν ἄξονα ΓΕ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ κάθετος ΒΖ μέχρι τοῦ σημείου Ο. Ἂς ἀχθῶσι δὲ αἱ εὐθεῖαι ΡΝ, Κξ, ΤΙ παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΜ. Εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΘΜ ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΚΜΝ (θ. 1) καὶ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΖΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΖΜΙ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΖΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΙ, διότι ἡ εὐθεῖα ΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΚ (θ. 1). Εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΘΖ ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριγώνων ΓΚΖ, ΙΚΝ, ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΘΜ, ΜΖ. Ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΖ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΓΚΖ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΚ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΡΝΙΤ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΙΚΝ· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΖ μικρότερον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΘΖ κατὰ τὸ ὀρθογώνιον ΡΝΙΤ. Εἶναι δέ, ὡς ΔΓ : ΓΣ = τΓ : ΓΚ, καὶ



Κξ : ξΝ = τΓ : ΓΚ. Ἀλλὰ ἡ Κξ = ξΙ, ἐπειδὴ ἡ ΙΜ = ΜΖ· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ξΙ : ξΝ = ΔΓ : ΓΣ, τουτέστιν ὡς ὁ πλάγιος ἄξων πρὸς τὴν παράμετρον· ἀνάπαλιν εἶναι ξΝ : Ιξ = ΓΣ : ΔΓ (Εὐκλ. 5, 7 πορ.)· καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι (ΔΓ + ΓΣ) : ΔΓ = ΙΝ : ξΙ (Εὐκλ. 5, 18). Εἶναι ἄρα ξΙ = ΤΙ· εἶναι ἄρα ΤΙ : ΝΙ = ΔΓ : (ΔΓ+ΓΣ). Ἂς ἐκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΣ μέχρι τοῦ σημείου γ, ὥστε ἡ εὐθεῖα Γγ = πρὸς τὸν ἄξονα ΔΓ, θὰ εἶναι δὲ ΤΙ : ΙΝ = ΓΔ : γΣ. Αἱ πλευραὶ ἄρα αὗται ἀνάλογοι ὑπὸ ἴσας γωνίας προσδιορίζουσιν ἐμβαδὰ (ἐπιφανείας) ὅμοια, τουτέστιν τὰ ὀρθογώνια ΤΙ x ΙΝ καὶ ΓΔ x γΣ, ἐνῷ ἡ εὐθεῖα ΤΙ οὖσα ἴση πρὸς τὴν ΓΜ εἶναι ὁμόλογος πρὸς τὴν ΓΔ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΜ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας ΓΔ καὶ τῆς ΓΔ σὺν τὴν παράμετρον, θὰ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΡΝΙΤ. Τὸ τετράγωνον λοιπὸν τῆς εὐθείας ΘΖ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΓΖ κατὰ ὀρθογώνιον, τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΜ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἄξονος ΓΔ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ἄξονος ΓΔ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΗΖ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΓΖ κατὰ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΛ καὶ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν.

Λέγω δέ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΒΖ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΓΖ κατὰ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προηγουμένως λεχθέν. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΒΖ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΚΟΖ (θ. 1), καὶ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΖ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΓΚΖ, τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς εὐθείας ΒΖ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΓΖ κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΖΚΟ. Ὥστε εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΖΚΟ, θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΖ καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν ἀνωτέρω· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς εὐθείας ΒΖ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΖ κατὰ τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπὶ τῆς ΓΖ, καὶ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ εἰρημένον ὀρθογώνιον. Λέγω ἀκόμη, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει διὰ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ. Διότι, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΚΠΕ (θ. 1), καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΧΖΕ, εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριγώνων ΧΚΠ, ΓΚΖ, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΕ^2+ΕΖ^2$. Τὸ διπλάσιον ἄρα τοῦ τριγώνου ΓΚΖ εἶναι τὸ $ΓΖ^2$· ἡ διαφορὰ ἄρα $ΑΖ^2 - ΓΖ^2 = 2$ τρίγωνον ΧΚΠ. Ἐκ τούτου ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι ἓν ὀρθογώνιον, διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΧΚΠ θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΕ, καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, περὶ τοῦ ὁποίου εἴπομεν.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ὑπεροχαί, καθ' ἃς τὰ τετράγωνα τῶν προηγουμένων εὐθειῶν ὑπερέχουσι τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΓΖ, εἶναι τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα μεταβαλλόμενα συνεχῶς, εἶναι κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΓΕ, ΓΖ, ΓΛ, ΓΜ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον, τὸ κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΖ, καὶ τὸ κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς ΓΖ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κατασκευασθέντος ἐπὶ τῆς ΓΛ, καὶ τὸ κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς ΓΛ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΜ, θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ ἡ ἐλαχίστη τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν, καὶ αἱ ἐγγύτερον πρὸς ταύτην (ΓΖ) θὰ εἶναι μικρότεραι τῶν εὑρισκομένων ἀπώτερον· εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον πάσης εὐθείας, ἀχθείσης οὕτω, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐλαχίστης, αὐξηθὲν κατὰ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τῆς κορυφῆς Γ, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἄξονος ΓΔ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ἄξονος ΓΔ σὺν τὴν παράμετρον αὐτοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

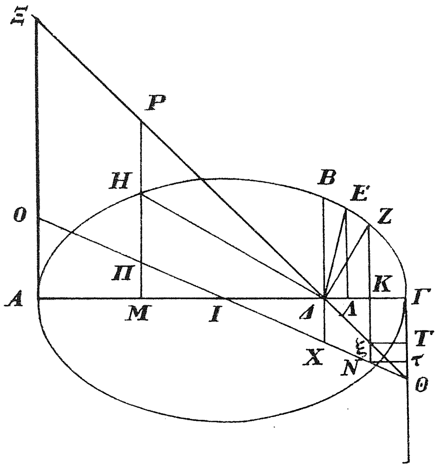
6

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ὡς τῷ πρότερον, ἐπὶ ἐλλείψεως καὶ ὅτι ὁ ἄξων εἶναι ὁ μεγάλος ἄξων αὐτῆς, ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου θὰ εἶναι ἐκείνη, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, ἡ δὲ μεγίστη θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἄξονος· καὶ μεταξὺ τῶν ἄλλων εὐθειῶν, αἱ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην θὰ εἶναι μικρότεραι ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μακρύτερον. Τὸ τετράγωνον δὲ οἱασδήποτε τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης κατὰ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ πλαγίου ἄξονος καὶ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἄξονος τούτου ἀπὸ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, ὥστε ὁ πλάγιος ἄξων νὰ εἶναι ἡ ὁμόλογος πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς.

Ἔστω ἡ ἔλλειψις ΑΒΓ καὶ μέγας ἄξων αὐτῆς ὁ ΑΓ καὶ ἡ ΓΔ ἔστω τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ ἃς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομήν, αἱ εὐθεῖαι ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, ΔΗ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΓ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν δυναμένων ν' ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου Δ, ὅτι ἡ ΔΑ εἶναι ἡ μεγίστη, καὶ ὅτι αἱ ὀλιγώτερον ἀπέχουσαι τῆς ΔΓ εἶναι μικρότεραι ἐκείνων, αἵτινες ἀπέχουσι περισσότερον, καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΔΖ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΔΓ κατὰ σχῆμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τῆς κορυφῆς Γ, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἄξονος ΓΑ καὶ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἄξονος τούτου ἀπὸ τῆς παραμέτρου.

Ἔστω ἡ ΓΘ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου καὶ Ι τὸ κέντρον, ἃς ἀχθῶσι δὲ αἱ εὐθεῖαι ΖΚΝ, ΕΛ, ΒΔΧ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α ἡ ΑΞ παράλληλος πρὸς τὰς ἀχθείσας εὐθείας καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ξΤ, Ντ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ΓΑ. Ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΖΚ (θ. 1) εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΘΝΚ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΔΚ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου ΚΔξ, ἐπειδὴ ἡ ΚΔ = Κξ, διότι ἡ ΔΓ = ΓΘ· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΔΖ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριγώνων ΔΓΘ, ΘξΝ. Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΔΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΓΘ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ξΝΤτ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ξΘΝ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΔΖ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΓ κατὰ τὸ ὀρθογώνιον ξΝΤτ. Εἶναι ἄρα ΙΓ : ΓΔ, τουτέστιν ΙΓ : ΓΘ = ΑΓ : παράμετρον, καὶ ἡ εὐθεῖα Ντ : τΘ = ΑΓ : παράμετρον (εἰς τὸν αὐτὸν λόγον)· ἡ εὐθεῖα ἄρα Ντ : τΘ = ΑΓ : παράμετρον. Ἀλλὰ ἡ Ντ = ΘΤ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΓ : παράμετρον = ΘΤ : τΘ καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων, εἶναι ΑΓ : (ΑΓ − παράμετρος) = ΘΤ : (ΘΤ − τΘ) = ΘΤ : Ττ (Εὐκλ. 5, 19 πορ.). Εἶναι ἄρα ἡ ΘΤ = ξΤ, ἐπειδὴ ἡ ΓΔ = ΓΘ· εἶναι ἄρα ἡ Τξ : Ττ τουτέστιν ἡ Τξ : ξΝ = ΑΓ :

(ΑΓ—παράμετρος). Ἡ εὐθεῖα ἄρα Τξ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀποτεμνομένην ΓΚ, εἶναι ἡ ὁμόλογος πρὸς τὸν ἄξονα ΑΓ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ξΝΤτ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΓ, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῆς διαφορᾶς (ΑΓ—παράμετρος) (τῆς εὐθείας ταύτης ἀπὸ τῆς παραμέτρου).



Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΔΖ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΓ κατὰ χωρίον ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς ΓΚ καὶ ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον, περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν. Λέγω ἀκόμη, ὅτι καθ' ὅμοιον τρόπον παρίσταται τοῦτο διὰ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΔΒ. Διότι τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΔΧΘ. Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΓΔΘ· ἡ διαφορὰ ἄρα $ΔΒ^2—ΔΓ^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΘΧ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς ΔΓ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν ἀνωτέρω, εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΘΧ· ἡ διαφορὰ ἄρα $ΒΔ^2 - ΔΓ^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς ΔΓ καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ εἰρημένον ὀρθογώνιον.

Λέγω ἀκόμη, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΔΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ, κατ' ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς ΜΓ, καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ προειρημένον ὀρθογώνιον. Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΗΜ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΜΑΟΠ. Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΜΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΜΡ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΔΜ = ΜΡ, διότι καὶ ἡ ΔΓ = ΓΘ· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΔΗ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τριγώνου ΑΙΟ καὶ τοῦ τετραπλεύρου ΙΔΡΗ. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΙΟ = τρίγωνον ΙΘΓ· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΔΗ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΓΘΙ σὺν τὸ χωρίον ΙΔΡΠ, τουτέστι διπλάσιον τῶν τριγώνων ΔΓΘ, ΡΘΠ. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΓΘ· ἡ διαφορὰ ἄρα $ΔΓ^2 - ΔΗ^2$ εἶναι διπλασία τοῦ τριγώνου ΡΘΠ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΜ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν, εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΡΘΠ· ἡ ὑπεροχὴ ἄρα $ΔΗ^2 - ΔΓ^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς ΓΜ, καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προειρημένον ὀρθογώνιον.

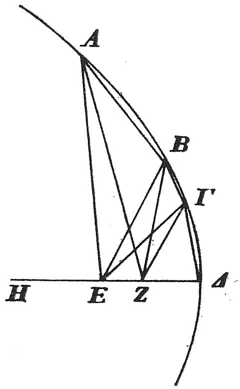
Ὁμοίως, τὸ τετράγωνον τῆς ΔΑ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΞΑΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΟΙΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΙΓ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΑΔ εἶναι διπλάσιον τῶν τριγώνων ΞΘΟ, ΔΓΘ. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΓΘ· ἡ διαφορὰ ἄρα $ΑΔ^2 - ΔΓ^2$ εἶναι διπλασία τοῦ τριγώνου ΞΘΟ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον, τὸ κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ προειρημένον, διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΞΘΟ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΑΔ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΓ, κατὰ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς εὐθείας ταύτης ἀπὸ τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς ΓΑ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς ΓΜ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς ΓΜ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς ΓΔ· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἡ ἐλαχίστη τῶν ἐκ τοῦ σημείου Δ ἀχθεισῶν εὐθειῶν πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἡ ΔΑ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἐξ αὐτῶν. Διὰ τὰς λοιπὰς δέ, ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον. Ἡ ὑπεροχὴ δὲ τοῦ τετραγώνου ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης εἶναι ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς τὸ προλεχθὲν ἀνωτέρω ὀρθογώνιον.

7

Ὅταν εἰς μίαν τῶν τριῶν τομῶν κώνου ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἐλαχίστης ἐπὶ τοῦ ἄξονος εὐθείας (1/2 παραμέτρου) σημεῖόν τι καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι μέχρι τῆς τομῆς ἡ ἐλαχίστη θὰ εἶναι ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ἐκ τῶν ἄλλων δὲ τῶν ἀχθεισῶν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος ἡ πλησιέστερον κειμένη πρὸς τὸν ἄξονα εἶναι μικροτέρα τῆς μακρύτερον εὑρισκομένης.

Ἔστω τομὴ κώνου ἡ ΑΒΓΔ, ἄξων δὲ αὐτῆς ἡ ΔΗ καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ΔΕ (1/2 παραμέτρου, θ. 5).

Ἂς ληφθῇ μεταξὺ τῶν σημείων Δ, Ε τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν τομὴν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΓ, ΖΒ, ΖΑ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΖ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τούτων καὶ ἐκ τῶν ἄλλων εὐθειῶν ἡ εὑρισκομένη πλησιέστερον πρὸς ταύτην εἶναι μικροτέρα πάσης εὑρισκομένης μακρύτερον.



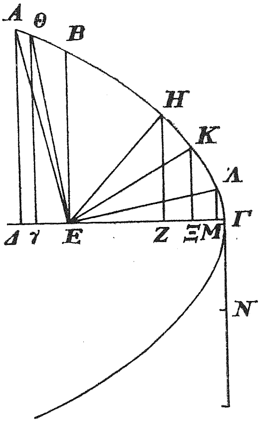
Ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΕ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕ. Ὥστε ἡ γωνία ΓΔΕ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΓΕ, καὶ ἡ γωνία ἡ ΖΔΓ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΓΖ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΓΖ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΔ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΕ, ἡ γωνία ΒΓΕ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΒΕ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΒΓΖ μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΒΓ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΒΖ $>$ τῆς ΖΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΖ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΖ. Ἡ ΔΖ ἄρα θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκείνων, αἵτινες ἔχουσιν ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομήν, ἐκ τῶν ἄλλων δὲ ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΔΖ εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἄξονος παραβολῆς ληφθῇ σημεῖόν τι, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς ληφθῇ σημεῖον ἀπέχον τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου καὶ ἂν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ τμήματος τούτου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν τομήν, καὶ ἂν ἀχθῇ εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου τῆς τομῆς μέχρι τοῦ πρώτως ληφθέντος σημείου, αὕτη θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν ἐκ τῆς τομῆς ἀγομένων ἐκ τοῦ δοθέντος τούτου σημείου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς, ἐκ τῶν ἄλλων δὲ ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην ταύτην καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη αὐτῆς θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, ἡ ὑπεροχὴ δὲ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε ἀχθείσης εὐθείας ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης θὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν τούτων τεταγμένως κατηγμέναι ἐπὶ τὸν ἄξονα.

Ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΔ. Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος εὐθεῖά τις ἡ ΓΕ μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΕ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΗ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΗ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομήν, ἐκ τῶν εὐθειῶν δὲ τῶν ἀγομένων ἐκ τυχόντων σημείων τῆς τομῆς, ὡς τὰ Α, Β, Γ ἡ εὑρισκομένη εἴτε ἀπὸ τὸ ἓν μέρος εἴτε ἀπὸ τὸ ἄλλο τῆς εὐθείας ΕΗ θὰ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εὑρίσκεται μακρύτερον. Καὶ ἀκόμη ἂν ἐκ τοῦ σημείου Ε ἀχθῶσι πρὸς τὴν τομὴν αἱ εὐθεῖαι ΕΚ, ΕΛ, ΕΑ λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον ἑκάστης ἐκ τούτων ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΗ κατὰ χωρίον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς ἀχθείσης τεταγμένως κατηγμένης εὐθείας καὶ τοῦ σημείου Ζ.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ τεταγμένως κατηγμέναι εὐθεῖαι καὶ ἡ ΒΕ ἔστω κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΝ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου. Εἶναι λοιπὸν τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΓΝ x ΓΞ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΞ, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖ x ΓΞ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΚΞ^2 (1, 11). Εἶναι ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖ x ΖΞ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ ἄθροισμα ΕΖ^2 + ΖΞ^2, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΞ^2· τὸ διπλάσιον ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν ΕΖ καὶ τὸ ἄθροισμα ΓΞ + ΖΞ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ ἄθροισμα ΕΖ^2 + ΖΞ^2 εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ΚΞ^2 + ΞΕ^2, τουτέστι πρὸς τὸ ΚΕ^2. Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖ x (ΓΞ + ΖΞ) εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΓ· τὸ ΚΕ^2 ἄρα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΓ. αὐξηθὲν κατὰ τὸ ΖΞ^2 + ΕΖ^2. Τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ἄρα ΕΖ x ΖΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΗ^2, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΖΕ = εὐθεῖαν ΓΝ· εἶναι ἄρα ΖΗ^2 + ΖΕ^2 + ΖΞ^2 ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΚ^2. Ἀλλὰ τὸ ΖΗ^2 + ΖΕ^2 εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΗ^2 (Εὐκλ. 1, 47)· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΕΚ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΗ^2 + ΖΞ^2· ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ΕΚ^2 ἀπὸ τοῦ ΕΗ^2 εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ΖΞ^2 (1, 11).



Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ $ΕΛ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΕΗ^2$ κατὰ τὸ $ΖΜ^2$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον $2ΓΖ \times ΖΕ$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, διότι ἡ εὐθεῖα $ΖΕ = ΓΝ$, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΓΞ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΕΗ^2$ θὰ εἶναι ἐπίσης ἰσοδύναμος πρὸς τὸ $ΓΖ^2$. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΞ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΖΜ, καὶ ἡ ΖΜ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΓ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΕΗ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομήν, μεταξὺ τοῦ σημείου Η καὶ τῆς κορυφῆς Γ.

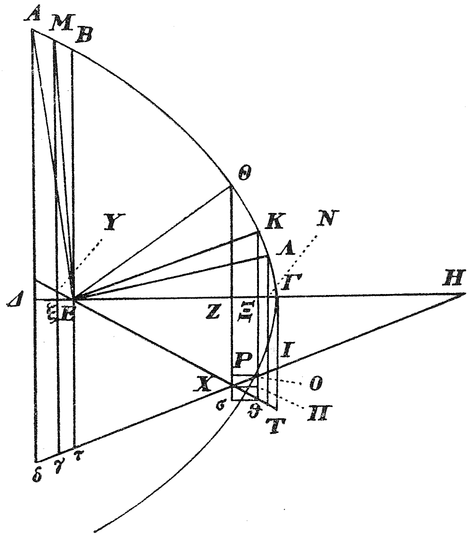
Ὁμοίως, τὸ $ΒΕ^2$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $2\,ΓΝ \times ΓΕ$, τουτέστι πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον $ΕΖ \times ΓΕ$. Τὸ διπλάσιον ἄρα ὀρθογώνιον $ΓΖ \times ΖΕ$, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΕ^2$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2 + ΕΖ^2$· ὥστε τὸ $ΒΕ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΕΗ^2$ κατὰ τὸ $ΕΖ^2$. Εἶναι δὲ τὸ $γΘ^2$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον $Γγ \times ΖΕ$, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα $ΖΕ = ΓΝ$. Εἶναι ἄρα τὸ $γΕ^2$ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $γΖ^2 + ΖΕ^2$ ἀπὸ τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου $γΖ \times ΖΕ$· τὸ διπλάσιον ἄρα ὀρθογώνιον $ΓΖ \times ΖΕ$ αὐξηθὲν κατὰ τὸ $γΖ^2 + ΖΕ^2$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΘΕ^2$. Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον $ΓΖ \times ΖΕ$, αὐξηθὲν κατὰ τὸ $ΖΕ^2$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$· εἶναι ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΘΕ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΕΗ^2$ ἰσοδύναμος πρὸς τὸ $γΖ^2$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ διαφορὰ $ΑΕ^2 - ΕΗ^2$ θὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ $ΔΖ^2$. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΔΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας γΖ, καὶ ἡ εὐθεῖα γΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΕ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΕΗ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομήν, ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην εἶναι ἡ μικροτέρα τῆς μακρύτερον ταύτης· καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε τῶν εὐθειῶν τούτων ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης ἀπὸ τῆς τεταγμένως κατηγμένης εὐθείας μέχρι τοῦ σημείου Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ὑπερβολῆς ληφθῇ σημεῖόν τι , τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα μεταξὺ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς διαιρεθῇ εἰς τμήματα, τὰ ὁποῖα νὰ εἶναι μεταξύ των, ὡς ὁ πλάγιος ἄξων πρὸς τὴν παράμετρον, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸ κέντρον νὰ εἶναι ὁμόλογον πρὸς τὴν πλαγίαν διάμετρον, καὶ ἂν ἐκ τοῦ σημείου διαιρέσεως τοῦ ἄξονος ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα συναντῶσα τὴν τομήν, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀχθεῖσα ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως τῆς τομῆς μέχρι τοῦ ληφθέντος σημείου ἐπὶ τοῦ ἄξονος, θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου τούτου μέχρι τῆς τομῆς, ἐκ τῶν ἄλλων δὲ εὐθειῶν, τῶν κειμένων καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τῆς ἐλαχίστης, ἡ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, ἡ ὑπεροχὴ δὲ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης θὰ εἶναι ἰσοδύμανος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατασκευαζόμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν τεταγμένως κατηγμένων, τῶν ἀναχωρούντων ἐκ τῶν σημείων συναντήσεως, τῶν προηγουμένων εὐθειῶν μὲ τὴν ὑπερβολήν, εἶναι ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον ἔχον πλευρὰς τὴν πλαγίαν διάμετρον καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς πλαγίας διαμέτρου σὺν τὴν παράμετρον, ὥστε ἡ πλαγία διάμετρος νὰ εἶναι ὁμόλογος πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην εὐθεῖαν.

Ἔστω ἡ ὑπερβολὴ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΓ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Η, καὶ ἡ ΓΕ μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, καὶ ἀφοῦ ληφθῇ σημεῖόν τι Ζ μεταξὺ τῶν σημείων Γ, Ε ἂς γίνῃ ὡς ΗΖ : ΖΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα μέχρι τῆς τομῆς ἡ ΖΘ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΕ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΘΕ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ Ε πρὸς τὴν τομήν, καὶ ὅτι ἐκ τῶν εὐθειῶν τῶν κειμένων καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τῆς ἐλαχίστης ἡ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν εἶναι ἡ μικροτέρα καὶ ἡ μακρύτερον εἶναι ἡ μεγαλυτέρα, καὶ ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον μεταξὺ τῶν ἀχθεισῶν ὡς τεταγμένως κατηγμέναι, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν πλαγίαν διάμετρον καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς πλαγίας διαμέτρου σὺν τὴν παράμετρον, οὕτως ὥστε ἡ πλαγία διάμετρος νὰ εἶναι ὁμόλογος τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀχθεισῶν ὡς τεταγμένως κατηγμέναι.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΓΙ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΙ καὶ ἂς ἐκβληθῇ αὕτη μέχρι τοῦ σημείου δ· ἂς συναντᾷ δὲ αὕτη ἡ Ηδ κατὰ τὸ σημεῖον Χ τὴν προέκτασιν τῆς εὐθείας ΖΘ, ἡ ὁποία ἄγεται τεταγμένως κατηγμένη, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΕΧ, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη. Ἂς ἀχθῶσι δὲ αἱ κάθετοι ΛΝ, ΚΞ καὶ ἂς ἐκβληθῶσι μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὰς εὐθείας Ηδ, ΕΧ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΗΓ : ΓΙ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, τουτέστιν = εὐθεῖα ΗΖ : ΖΕ, καὶ εὐθεῖα ΗΓ : ΓΙ = ΗΖ : ΖΧ, θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΖΧ = ΖΕ. Εἶναι ἄρα τὸ $Ζ\Theta^2$ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΙΖΧ, καὶ τὸ $ΖΕ^2$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΖΧ· εἶναι ἄρα τὸ $\Theta Ε^2$ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΙΕΧ (θ. 1). Ὁμοίως, τὸ $Κ\Xi^2$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐπιπέδου ΓΙΞΟ, καὶ τὸ $Ε\Xi^2$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΞθ, ὥστε τὸ $ΕΚ^2$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τετραπλεύρου ΓΙΕΧ + τὸ τρίγωνον ΟΧθ. Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι τὸ $\Theta Ε^2$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΙΕΧ· ἡ ὑπεροχὴ ἄρα τοῦ $ΕΚ^2$ ἀπὸ τοῦ $Ε\Theta^2$ εἶναι διπλασία τοῦ τριγώνου ΟΧθ.



Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΟΡ, ΧΠ, θσ παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα ΓΔ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα θΠ : ΠΟ = ΗΓ : ΓΙ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα θΠ = ΧΠ· ὥστε ἡ εὐθεῖα θΠ :ΠΟ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος· καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18) εἶναι ἡ εὐθεῖα θΠ : θΟ = πλαγία διάμετρος : πλαγία διάμετρος + παράμετρος. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα θΗ = εὐθεῖα θσ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΡΟθσ θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου (ὡς μιᾶς πλευρᾶς) καὶ τοῦ ἀθροίσματος πλαγία διάμετρος + παράμετρος (ὡς ἄλλης πλευρᾶς). Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΡΟθσ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΟΧθ καὶ τὸ ΕΚ² ὑπερέχει τοῦ ΕΘ², καὶ ἡ εὐθεῖα ΡΟ = πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ΖΞ· ἡ διαφορὰ ἄρα ΕΘ² — ΕΚ² εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΞ, καὶ ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον, περὶ τοῦ ὁποίου εἴπομεν, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΖΞ νὰ εἶναι ὁμόλογος τῆς πλαγίας διαμέτρου. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ΕΛ² ὑπερέχει τοῦ ΕΘ² κατ' ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΝ, καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ προλεχθὲν ὀρθογώνιον, ὥστε ἡ πλαγία διάμετρος νὰ εἶναι ὁμόλογος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΝ. Εἶναι δὲ τὸ ΓΕ² τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΓΕΤ, τὸ δὲ ΕΘ² εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΕΙΧ· ὥστε ἡ ὑπεροχὴ ΓΕ²—ΕΘ² εἶναι διπλασία τοῦ τριγώνου ΙΧΤ· τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΖ, ὅμοιον πρὸς τὸ προλεχθὲν ὀρθογώνιον. Εἶναι ἄρα ἡ ὑπεροχὴ ΓΕ² — ΕΘ² ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΖ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ προλεχθέν. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΖΞ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΖΝ, καὶ ἡ ΖΝ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΓ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΕΘ εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΚ, ἡ ΕΚ μικροτέρα τῆς ΕΛ, καὶ ἡ ΕΛ μικροτέρα τῆς ΕΓ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΕΘ μικροτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀχθεισῶν ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομήν, μεταξὺ τοῦ σημείου Θ καὶ τῆς κορυφῆς Γ.

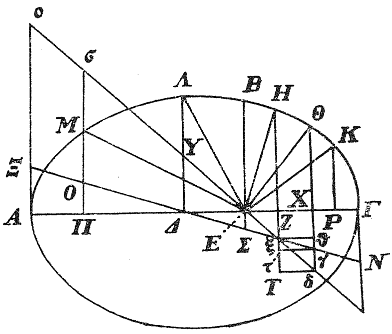
Εἶναι δὲ τὸ ΒΕ² ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΕΙτ· ἡ ὑπεροχὴ ἄρα ΕΒ²—ΕΘ² θὰ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΧτ. Τὸ διπλάσιον λοιπὸν τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΕ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ προλεχθὲν ἀνωτέρω. Ὁμοίως τὸ $Μξ^2$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΙξγ (θ. 1), καὶ τὸ τετράγωνον $Εξ^2$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕξΥ· τὸ $ΜΕ^2$ ἄρα εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τρίγωνον ΥΧγ + τετράπλευρον ΓΕΙΧ. Ἐδείχθη ὅμως, ὅτι τὸ $ΘΕ^2$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΕΙΧ· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας Ζξ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ προλεχθέν, τουτέστι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΥΧγ, εἶναι ἡ ὑπεροχὴ κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ $ΕΜ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΕΘ^2$. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ $ΕΑ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΘΕ^2$ κατ' ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΔ, ὅμοιον πρὸς τὸ προλεχθὲν ὀρθογώνιον. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΕΖ μικροτέρα τῆς εὐθείας Ζξ, καὶ ἡ Ζξ μικροτέρα τῆς εὐθείας ΖΔ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΘΕ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΕΒ, ἡ ΕΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΜ, καὶ ἡ ΕΜ εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΑ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΕΘ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐξ ὅλων τῶν ἀχθεισῶν ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΘΕ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη της εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον. Εἶναι δὲ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ΘΕ ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς ἀπολαμβανομένης εὐθείας μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται τεταγμένως κατηγμέναι, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προλεχθὲν ἀνωτέρω.

10

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἄξονος ἐλλείψεως ληφθῇ σημεῖόν τι, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου καὶ ἐὰν ἐπὶ τῆς ἀπολαμβανομένης εὐθείας μεταξὺ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς καὶ τοῦ σημείου ληφθῇ σημεῖόν τι, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς καὶ τοῦ σημείου τούτου νὰ εἶναι πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου τούτου μέχρι τοῦ πρώτως ληφθέντος σημείου ὡς ἡ πλαγία διάμετρος πρὸς τὴν παράμετρον, καὶ ἀπὸ τοῦ τελευταίου τούτου σημείου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα μέχρι συναντήσεως τῆς τομῆς, καὶ ἐκ τοῦ σημείου συναντήσεως ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα μέχρι τοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος σημείου, ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν ἀγομένων ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου μέχρι τῆς τομῆς, ἐκ τῶν ἄλλων δὲ ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, ἡ ὑπεροχὴ δὲ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε τῶν εὐθειῶν τούτων ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης θὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς ἀπολαμβανομένης εὐθείας μεταξὺ τῶν ἀχθεισῶν ὡς τεταγμένως κατηγμέναι (ἀπὸ τῶν σημείων τῆς τομῆς) (μέχρι τοῦ τελευταίως ληφθέντος σημείου ἐπὶ τοῦ ἄξονος), εἶναι ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς πλαγίας διαμέτρου ἀπὸ τῆς παραμέτρου.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, καὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ εὐθεῖά τις ἡ ΕΓ, μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, καὶ ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΔΖ : ΖΕ = ΑΓ : παράμετρος. Ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος μέχρι τῆς τομῆς, ἡ ΖΗ, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΗ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΗ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ε μέχρι τῆς τομῆς, καὶ ὅτι ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, καὶ ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ σημείου Ζ καὶ τῆς κατηγμένης τεταγμένως, εἶναι ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς ὑπεροχῆς καθ' ἣν ὁ ἄξων οὗτος ὑπερέχει τῆς παραμέτρου, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τοῦ σημείου Ζ νὰ εἶναι ἡ ὁμόλογος τοῦ ἄξονος ΑΓ.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι, ὡς εἰς τὸ σχῆμα, καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Ἂς ληφθῇ ἡ ΓΝ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΝΔ, συναντῶσα τὴν προέκτασιν τῆς ΗΖ κατὰ τὸ σημεῖον ξ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα Εξ, ἥτις ἂς προεκταθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη. Ἐπειδὴ λοιπόν, ἡ εὐθεῖα ΔΓ : ΓΝ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, τουτέστιν = ΔΖ : ΖΕ, θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΔΖ : ΖΕ = ΔΓ : ΓΝ, τουτέστιν = ΔΖ : Ζξ. Εἶναι ἄρα ὁ λόγος ΔΖ : ΖΕ ἴσος πρὸς τὸν λόγον ΔΖ : Ζξ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΖΕ = Ζξ. Ἂς ἀχθῶσιν ἀκόμη αἱ εὐθεῖαι ξθ, γτ, Τδ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ΑΓ. Εἶναι ἄρα τὸ ΖΕ^2 = 2 τρίγωνα ΖΕξ καὶ τὸ ΖΗ^2 = 2 τετράπλευρα ΓΝΖξ (θ. 1)· εἶναι ἄρα τὸ



$EH^2 = 2$ τετράπλευρα ΓΝΕξ (θ. 1). Εἶναι δὲ τὸ $\Theta X^2 = 2$ τετράπλευρα ΓΝΧγ, καὶ τὸ $EX^2 = 2$ τρίγωνα ΧδΕ· ὥστε τὸ $\Theta E^2 = 2$ (τετράπλευρον ΓΝΕξ + τρίγωνον γξδ). Εἶναι ἄρα τὸ $EH^2 = 2$ τετράπλευρα ΓΝΕξ· τὸ $E\Theta^2$ ἄρα ὑπερέχει τοῦ EH^2 κατὰ 2 τρίγωνα γξδ, καὶ εἶναι 2 τρίγωνα γξδ = ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Τδ, δγ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΔΖ : Ζξ = ξθ : θγ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΖ = Ζξ, καὶ ἡ εὐθεῖα θξ = θδ, εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ξθ : θγ = ΔΓ : ΓΝ, τουτέστιν ἡ εὐθεῖα θδ : θγ = ΔΓ : ΓΝ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΔΓ : ΓΝ = πλάγιος ἄξων : παράμετρος· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα θδ : θγ = πλάγιος ἄξων : παράμετρος, καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 19), εἶναι ἡ εὐθεῖα θδ : δγ = πλάγιος ἄξων : ὑπεροχὴ τούτου ἀπὸ τῆς παραμέτρου. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα θδ = εὐθεῖα Τδ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα Τδ x δγ θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ πλαγίου ἄξονος καὶ τῆς ὑπεροχῆς τούτου ἀπὸ τῆς παραμέτρου. Εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα Τδ = ΖΧ· ὥστε $E\Theta^2 — EH^2$ = πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΧ, εἶναι ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον, περὶ τοῦ ὁποίου εἴπομεν ἤδη, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΖΧ νὰ εἶναι ἡ ὁμόλογος πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ διαφορὰ $EK^2 — EH^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΡ, ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον, καὶ ὁμοίως, ὅτι τὸ $E\Gamma^2$ ὑπερέχει τοῦ EH^2 κατὰ ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΓ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον (τὸ προρρηθέν). Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΧ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΖΡ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΡ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΖΓ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΕΗ εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΘ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΘ εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΚ καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΚ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΕΓ.

Εἶναι δὲ τὸ $ΒΕ^2$ = 2 τραπέζια ΓΝΕΣ (θ. 1). Ἐδείχθη δέ, ὅτι τὸ $ΕΗ^2$ = 2 τετράπλευρα ΓΝΕξ· εἶναι ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΒΕ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΕΗ^2$ = 2 τρίγωνα ΕξΣ· τοῦτο δὲ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη.

Ὁμοίως, τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΔΛ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΓΔΝ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΔΕ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΕΥ· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΛΕ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τριγώνου ΔΥξ σὺν τὸ τετράπλευρον ΓΝΕξ. Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς εὐθείας ΛΕ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΕΗ κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΥξ, εἶναι δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου τούτου τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΖ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον. Τὸ τετράγωνον δὲ τῆς εὐθείας ΜΠ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΞΟΠΑ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΠΕ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΠΕσ· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΜΕ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τριγώνου ΞΔΑ σὺν τὸ τετράπλευρον ΕΔΟσ. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΞΔΑ = τρίγωνον ΓΔΝ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς εὐθείας ΜΕ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τετραπλεύρου ΓΝΕξ σὺν τὸ τρίγωνον Οξσ. Εἶναι ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου τούτου ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΜΕ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΕΗ^2$. Τὸ διπλάσιον ἄρα τοῦ τριγώνου Οξσ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΠ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον.

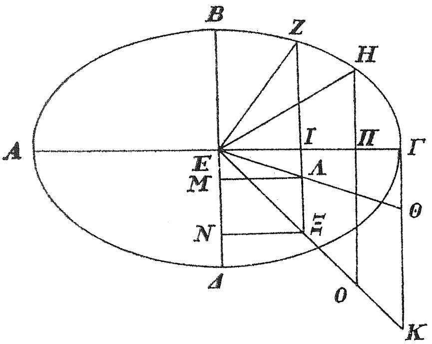
Τέλος, τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΕ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τριγώνου οξΞ σὺν τὸ τετράπλευρον ΓΝΕξ· εἶναι ἄρα ἡ ὑπεροχὴ (διαφορὰ) τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΑΕ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΕΗ ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου οξΞ, εἶναι δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου τούτου ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΑ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΕΖ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΔΖ, ἡ εὐθεῖα ΔΖ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΠΖ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΠΖ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΑΖ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΒΕ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΕΛ, ἡ εὐθεῖα ΕΛ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΕΜ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΜ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΕΑ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΕΗ ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομήν. Ἐκ τῶν εὐθειῶν δὲ τούτων ἡ εὑρισκομένη πλησιέστερον πρὸς ταύτην, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη αὐτῆς, εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, καὶ αἱ ὑπεροχαὶ τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν τούτων ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΗ εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα, κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, αἵτινες εἶναι τεταγμένως κατηγμέναι, εἶναι ὅμοια πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον προσδιωρίσαμεν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11

Ἐκ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὴν τομὴν ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ ἡμίσεια τοῦ μικροῦ ἄξονος, μεγίστη δὲ ἡ ἡμίσεια τοῦ μεγάλου ἄξονος, καὶ ἡ πλησιεστέρα πρὸς τὴν μεγίστην εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον, ἡ ὑπεροχὴ δὲ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε εὐθείας, οὕτω ἀγομένης (ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν τομήν) ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς ἀπολαμβανομένης εὐθείας, μεταξὺ τῆς κατηγμένης τεταγμένως καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς διαμέτρου ταύτης ἀπὸ τῆς παραμέτρου.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, μικρὸς ἄξων ἡ εὐθεῖα ΒΔ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Ε. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΓ εἶναι ἡ μεγίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ κέντρου Ε πρὸς τὴν τομὴν καὶ ὅτι ἡ ΕΒ εἶναι ἡ ἐλαχίστη, καὶ ὅτι ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, καὶ ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου, εὐθείας τινὸς ἐκ τούτων, ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ΒΕ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ, μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης εὐθείας καὶ τοῦ κέντρου Ε, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΓ καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς εὐθείας ταύτης ἀπὸ τῆς παραμέτρου.

Διότι, ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΕΗ καὶ αἱ κάθετοι ΖΙ, ΗΠ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΘ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΓΘ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΓΕ. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΓΚ = ΓΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΘΕ, ΕΚ καὶ ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΗΠ, ΖΙ μέχρι τῶν σημείων Ο, Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΜΛ, ΝΞ παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα ΑΓ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΕΓ : ΓΚ = ΕΙ : ΙΞ. Ἀλλὰ ἡ ΕΓ = ΓΚ· εἶναι ἄρα ἡ ΕΙ = ΙΞ. Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΙΖ ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΘΙΛ (θ. 1), καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΙΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΙΞ· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον

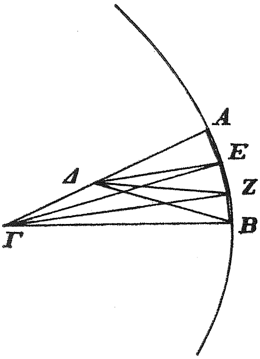


τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριγώνων ΕΓΘ, ΕΛΞ. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΕΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΓΘ (θ. 2), καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΛΞ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΛΞΜΝ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΕΖ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου ΕΒ κατὰ τὸ ὀρθογώνιον ΛΝ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΚΓ : ΓΘ = πλάγιος ἄξων : παράμετρος καὶ ἡ εὐθεῖα ΞΙ : ΙΛ = πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον· καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 19) εἶναι ΞΙ : ΞΛ = πλαγία διάμετρος : διαφορὰ πλαγίας διαμέτρου ἀπὸ τῆς παραμέτρου. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΞΙ = ΞΝ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΛΞ, ΞΝ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς διαμέτρου ταύτης ἀπὸ τῆς παραμέτρου. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΕΙ = ΛΜ· ἡ ὑπεροχὴ ἄρα $ΕΖ^2 — ΕΒ^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΙ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον, περὶ τοῦ ὁποίου ἐλέχθη ἤδη. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΕΗ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΒ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΠ, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον.

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΓΕΚ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΕ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΓΕΘ· εἶναι ἄρα ἡ ὑπεροχὴ $ΓΕ^2—ΕΒ^2$ διπλασία τοῦ τριγώνου ΘΕΚ, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΕ μεγαλυτέρα τῆς ΕΠ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΠ μεγαλυτέρα τῆς ΕΙ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΕΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΗ, ἡ εὐθεῖα ΕΗ μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΖ μεγαλυτέρα τῆς ΕΒ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΕΓ εἶναι ἡ μεγίστη τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἡ ΕΒ εἶναι ἡ ἐλαχίστη. Ἐκ τῶν εὐθειῶν δὲ τῶν ἀγομένων μεταξὺ τῶν ΕΓ καὶ ΕΒ, ἡ εὑρισκομένη πλησιέστερον πρὸς τὴν ΕΓ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εὑρίσκεται μακρύτερον, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε ἀγομένης εὐθείας ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΒ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ τεταγμένως κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, εἶναι ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν ἤδη ἀνωτέρω· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12

Ἐὰν ὑπὸ τὰς συνθήκας, ὑπὸ τὰς ὁποίας ἀπεδείξαμεν (θ. 4 καὶ 11), ληφθῇ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ εὐθείας τινὸς ἐλαχίστης ἀγομένης ἐκ τοῦ ἄξονος τομῆς τινος μέχρι τῆς τομῆς, καὶ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι μέχρι τῆς τομῆς, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς οὕτω ἀχθείσης, ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ εἶναι τὸ μέρος τῆς ἐλαχίστης, τὸ ὁποῖον πρόσκειται πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον.

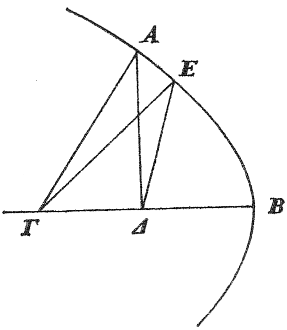


Ἔστω τυχοῦσα τομὴ κώνου, ἡ ΑΒ τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΒ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΑ ἡ ἐλαχίστη τῶν ἀγομένων πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖόν τι Δ κείμενον μεταξὺ τῶν σημείων Γ, Α. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΑ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὸ μέρος αὐτὸ τῆς τομῆς.

Διότι, ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΔΖ, ΔΒ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΖΓ, ΓΕ, ὡς καὶ αἱ εὐθεῖαι (χορδαὶ) ΑΕ, ΕΖ, ΖΒ. Εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΕΓ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΓΑ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΓΑΕ μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΓΕΑ (Εὐκλ. 1, 19). Ἡ γωνία ἄρα ΓΕΑ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΕΑ· ὥστε ἡ γωνία ΕΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΑΕΔ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΔ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΑ (Εὐκλ. 1, 18). Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ ΖΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΕ, ἡ γωνία ΖΕΓ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΓΖΕ· ὥστε ἡ γωνία ΔΕΖ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΖΔ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΔ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΖ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΔ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν ἀγομένων πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτὴν τῆς τομῆς, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰς εὐθείας τὰς ἀγομένας πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13

Ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς τοῦ ἄξονος παραβολῆς ἀχθῇ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα πρὸς τὴν τομὴν περιέχουσα μετὰ τοῦ ἄξονος γωνίαν, ἡ γωνία αὕτη θὰ εἶναι ὀξεῖα, καὶ ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς εὐθείας ταύτης ἐπὶ τὸν ἄξονα, θὰ τμήσῃ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου.

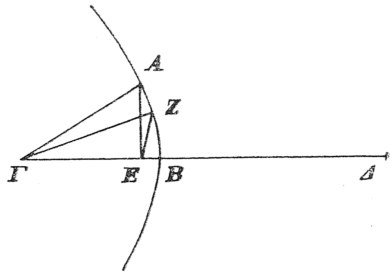


Ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΓ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν ἀγομένων πρὸς τὴν παραβολήν. Λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τὸ Γ γωνία εἶναι ὀξεῖα, καὶ ὅτι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὴν ΒΓ ἀποτέμνει ἐπὶ ταύτης εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἐλαχίστη, ἡ ΒΓ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Διότι, ἐὰν αὕτη δὲν εἶναι μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἴση ἢ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Ἐὰν ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη (θ. 4), καὶ ἐὰν ἡ ΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου θὰ εἶναι ἐπίσης ἡ ἐλαχίστη (θ. 7)· εἶναι ἄρα ἡ ΒΓ μικροτέρα τῆς ΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἡ ΒΓ ἄρα δὲν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου· πρὸς τούτοις δὲν εἶναι ἴση· εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα αὐτῆς. Ἔστω ἡ ΓΔ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὑψουμένη ἐκ τοῦ σημείου Δ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Α. Διότι ἐὰν δὲν διέρχηται, καὶ ἡ ΔΕ εἶναι αὐτὴ ἡ κάθετος, καὶ ἡ ΓΕ θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Γ πρὸς τὴν τομήν· ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ταύτης. Ἡ κάθετος ἄρα ἡ ὑψουμένη ἐκ τοῦ σημείου Δ θὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ σημείου Α, καὶ ἡ ΔΓ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου. Θὰ εἶναι δὲ ἡ γωνία ΑΓΒ ὀξεῖα, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΔΑ εἶναι ὀρθή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14

Ἐὰν ἐκ σημείου τοῦ ἄξονος ὑπερβολῆς ἀχθῇ ἐλαχίστη εὐθεῖα περιέχουσα μετὰ τοῦ ἄξονος ἐφεξῆς γωνίας, ἡ πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς γωνία εἶναι ὀξεῖα, καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ πέρατος τῆς ἐλαχίστης ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, αὕτη θὰ διαιρῇ τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀπολαμβανομένην ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς καὶ τοῦ σημείου τοῦ ἄξονος ἐξ οὗ ἤχθη ἡ ἐλαχίστη εἰς τμήματα τῶν ὁποίων τὸ πρὸς τὸ κέντρον θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ ἄλλο τμῆμα, ὃν ἔχει ἡ πλαγία διάμετρος πρὸς τὴν παράμετρον.



Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΓ, καὶ ΑΓ ἡ ἐλαχίστη ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Γ, καὶ κέντρον τῆς τομῆς τὸ Δ. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ὀξεῖα, καὶ ὅτι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΓ διαιρεῖ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ εἰς ὃν λόγον ἔχει ὁ πλάγιος ἄξων πρὸς τὴν παράμετρον.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου καὶ ἡ ΒΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πλαγίου ἄξονος (πλαγίας πλευρᾶς), εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΔΒ : ΒΓ ⟨ πλάγιος ἄξων : παράμετρος. Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΓ σημεῖόν τι Ε, τοιοῦτον, ὥστε τὰ λαμβανόμενα τμήματα νὰ ἔχωσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα : παράμετρον. Λέγω, ὅτι ἡ κάθετος ἡ ὑψουμένη ἐκ τοῦ σημείου Ε ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΓ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α.

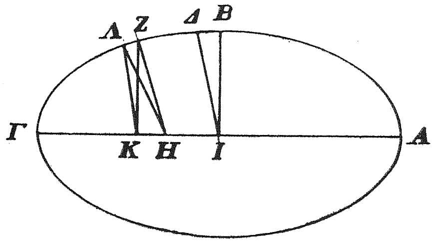
Διότι, ἐὰν δὲν διέρχηται, ἔστω, ὅτι ἡ διερχομένη κάθετος εἶναι ἡ ΕΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΖ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΓΖ θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Γ πρὸς τὴν τομὴν (θ. 9)· ὅπερ ἄτοπον, διότι ὡς ἐλαχίστη εὐθεῖα ἐλήφθη ἡ ΑΓ. Ἡ κάθετος ἄρα ἡ ὑψουμένη ἐκ τοῦ σημείου Ε θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Α τῆς τομῆς, καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ὀξεῖα, καὶ ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸν ἄξονα διαιρεῖ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα ΔΕ : ΕΓ = πλάγιος ἄξων : παράμετρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15

Ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς τοῦ μεγάλου ἄξονος ἐλλείψεως ἀχθῇ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἐὰν αὕτη διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν μεγάλον ἄξονα, καὶ ἐὰν διέρχηται δι' ἄλλου σημείου θὰ περιέχῃ μετὰ τοῦ μεγάλου ἄξονος γωνίαν ἀμβλεῖαν πρὸς τὸ μέρος τοῦ κέντρου, καὶ ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ πέρατος τῆς ἐλαχίστης θὰ πέσῃ μεταξὺ τοῦ σημείου ἐξ οὗ ἤχθη ἡ ἐλαχίστη καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τοῦ κέντρου νὰ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τοῦ ληφθέντος σημείου εἰς τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν παράμετρον.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Ι. Ἄς ὑψωθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ι πρὸς τὴν τομὴν ἡ ἐλαχίστη ΙΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΙΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω, ὅτι εἶναι ἡ ΙΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΙΔ ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν δυναμένων ν' ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ ληφθέντος σημείου παρὰ τὴν ὑπόθεσιν, διότι ὑπετέθη, ὅτι ἡ ΙΒ εἶναι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΙΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Ἂς ληφθῇ τώρα ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἄλλο σημεῖόν τι Η, ὥστε ἡ ΗΖ νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Η πρὸς τὴν τομήν. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΖΗΙ εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ ὅτι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τοῦ σημείου Ι θὰ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀπολαμβανομένην ἀπὸ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τοῦ σημείου Η εἰς τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν παράμετρον.



Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΖΗ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Η πρὸς τὴν τομήν, ἡ εὐθεῖα ΗΓ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου (θ. 7)· εἶναι δὲ ἡ ΓΙ τὸ ἥμισυ τῆς πλαγίας πλευρᾶς· εἶναι ἄρα ὁ λόγος ΙΓ : ΗΓ $<$ πλαγία πλευρὰ : παράμετρος. Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΗΓ σημεῖόν τι Κ, οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι εὐθεῖα ΙΚ : ΚΗ $=$ πλαγία πλευρὰ : παράμετρος· λέγω, ὅτι ἡ κάθετος ἡ ὑψουμένη ἐκ τοῦ σημείου Κ θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Διότι, ἐὰν δὲν τὴν συναντήσῃ, ἔστω, ὅτι τὴν συναντᾷ εἰς τὸ Λ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΗΛ ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Η πρὸς τὴν τομήν (θ. 10)· ὅπερ ἄτοπον, διότι ἐλαχίστη εἶναι ἡ ΗΖ. Ἡ ὑψουμένη ἄρα κάθετος ἐκ τοῦ σημείου Κ θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν εἰς τὸ Ζ, καὶ ἡ γωνία ΙΗΖ εἶναι ἀμβλεῖα.

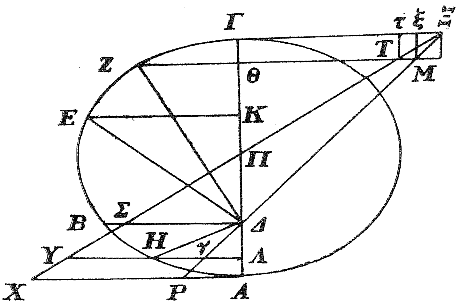
Καί, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΖΚ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΓ, θὰ εἶναι ΙΚ : ΚΗ = πλαγία πλευρὰ : παράμετρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος ἐλλείψεως ληφθῇ σημεῖόν τι, ὥστε ἡ ἀπόστασις τούτου ἀπὸ τῆς κορυφῆς νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, τὸ τμῆμα τοῦ ἄξονος τὸ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου θὰ εἶναι ἡ μεγίστη εὐθεῖα ἐκ τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ ἄξονος, ἐκ τῶν ἄλλων δὲ εὐθειῶν ἡ πλησιέστερον εὑρισκομένη πρὸς τὴν μεγίστην θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον καὶ αἱ ὑπεροχαὶ τοῦ τετραγώνου τῆς μεγίστης ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἑκάστης καὶ τῶν ἄλλων ἀγομένων εὐθειῶν, θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς ὀρθογώνια κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀπολαμβανομένων μεταξὺ τῶν τεταγμένως κατηγμένων καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ μικροῦ ἄξονος, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια πρὸς ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ μικροῦ ἄξονος καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς παραμέτρου ἀπὸ τοῦ ἄξονος τούτου.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μικρὸς ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Π. Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου σημεῖόν τι Δ τοιοῦτον, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΓΔ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου. Λέγω, ὅτι ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομὴν ἡ μὲν ΔΓ εἶναι ἡ μεγίστη, ἡ δὲ ΔΑ εἶναι ἡ ἐλαχίστη, καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ πλησιέστεραι πρὸς τὴν ΔΓ εἶναι μικρότεραι τῶν εὑρισκομένων μακρύτερον, καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΔ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου πάσης ἄλλης εὐθείας κατὰ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης (ἐπὶ τὴν ΓΑ) καὶ τοῦ σημείου Γ, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, ΔΗ καὶ ἔστω ἡ ΔΒ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Ἄς ληφθῇ ἡ ΓΞ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΞΠ, ΞΔ καὶ



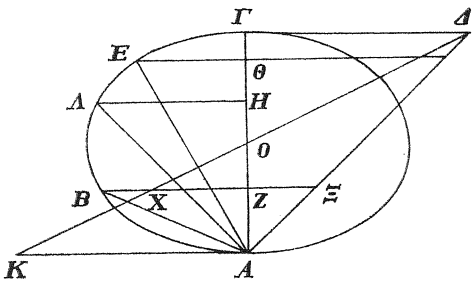
ἂς ἐκβληθῶσι, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΖΘ, ΕΚ, ΗΛ καὶ πρὸς ταύτας παράλληλος ἡ ΑΧ, καὶ αἱ εὐθεῖαι Μξ, Ττ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ΑΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΓΔ $=$ ΓΞ, τὸ ΓΔ$^2 =$ 2 τρίγωνον ΓΔΞ, καὶ τὸ ΘΔ^2 $=$ 2 τρίγωνον ΘΔΜ, καὶ τὸ ΘΖ$^2 =$ 2 τραπέζιον ΓΞΘΤ· τὸ ΓΔ^2 ἄρα ὑπερέχει τοῦ ΔΖ^2 κατὰ 2 τρίγωνον ΤΜΞ, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΤΜτξ. Εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα ΓΠ : ΠΔ $=$ πλαγία διάμετρος: ὑπεροχὴ τῆς παραμέτρου ἀπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου, καὶ ἡ εὐθεῖα Ττ : Τξ, τουτέστιν ἡ εὐθεῖα τΤ : ΤΜ, εἰς τὸν αὐτὸν λόγον· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα τΤ : ΤΜ $=$ πλαγία διάμετρος : ὑπεροχὴ τῆς παραμέτρου ἀπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα $Ττ = ΓΘ$· ἡ διαφορὰ ἄρα $ΓΔ^2 - ΖΔ^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΘ, καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ διαφορὰ $ΓΔ^2 - ΔΕ^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΚ, ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον, καὶ ὅτι τὸ $ΒΔ^2 = 2$ τετράπλευρον ΑΔΣΧ (θ. 3), καὶ τὸ $ΔΓ^2 = 2$ τρίγωνον ΔΓΞ, καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΠΧ = τρίγωνον ΓΠΞ, θὰ εἶναι $ΓΔ^2 - ΒΔ^2 = 2$ τρίγωνον ΔΣΞ. Εἶναι ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου τούτου ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΔ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΔΖ, ἡ ΔΖ μεγαλυτέρα τῆς ΔΕ, καὶ ἡ ΔΕ μεγαλυτέρα τῆς ΔΒ.

Εἶναι δὲ τὸ $ΛΗ^2 = 2$ τετράπλευρον ΑΛΥΧ (θεώρ. 3), καὶ τὸ $ΛΔ^2 = 2$ τρίγωνον ΔγΛ· εἶναι ἄρα τὸ $ΔΗ^2$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ΑΛΥΧ + τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔγΛ. Εἶναι ἄρα τὸ $ΓΔ^2 = 2$ τρίγωνον ΓΞΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΞΠ = τρίγωνον ΑΧΠ· ἡ διαφορὰ ἄρα $ΓΔ^2 - ΔΗ^2 = 2$ τρίγωνον ΞΥγ, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΛ, ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον. Εἶναι δὲ τὸ $ΔΑ^2 = 2$ τρίγωνον ΔΑΠ, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΠΞ = τρίγωνον ΠΧΑ· εἶναι ἄρα ἡ διαφορὰ $ΔΓ^2 - ΔΑ^2 = 2$ τρίγωνον ΞΧΡ. Τὸ διπλάσιον ἄρα τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ, ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον. Εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΓ ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι ἐκ τούτων ἡ ἐλαχίστη. Ἐκ τῶν ἄλλων δὲ εὐθειῶν ἡ εὑρισκομένη πλησιέστερον πρὸς τὴν ΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΓΔ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε ἄλλης ἐκ τῶν ἀγομένων, εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τῆς κορυφῆς Γ, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ μικρὸς ἄξων ἐλλείψεως, καὶ ὅτι τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον καὶ κέντρον τῆς τομῆς τὸ σημεῖον Ο. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ἡ μεγίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Α πρὸς τὴν τομήν, καὶ ὅτι ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον ταύτης, καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ τετραγώνου της (τῆς μεγίστης) ἀπὸ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε ἄλλης εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τῆς κορυφῆς Γ, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα ὀρθογώνιον.

Ἐὰν διατάξωμεν τὴν πρότασιν ὡς τὴν προηγουμένην, ἀποδεικνύεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΑΕ κατὰ ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΘ, ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον, καὶ ὅτι, ὁμοίως, τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΑΛ κατὰ ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΗ, ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον. Καί, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΒΖ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΑΖΧΚ, (θ. 3) καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΖΑ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΖΞ, ὡς καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΓΔ, ἐπειδὴ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΔ. Εἶναι ἄρα τὸ

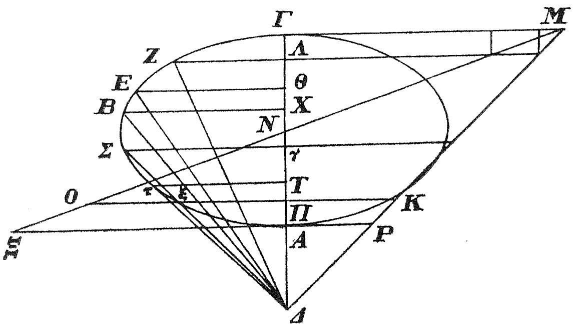


τρίγωνον ΓΟΔ = τρίγωνον ΚΟΑ· ἡ διαφορὰ ἄρα $ΑΓ^2 — ΑΒ^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΧΞ, ἐνῷ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΖ, ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον· ὅπερ ἀποδεικνύεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΓ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΑΕ, ἡ ΑΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΑΛ, καὶ ἡ ΑΛ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἡ μεγίστη τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Α (πρὸς τὴν τομήν)· καὶ ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε ἄλλης εὐθείας εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τῆς κορυφῆς Γ, εἶναι ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον [περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ μικροῦ ἄξονος καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς παραμέτρου ἀπὸ τοῦ ἄξονος τούτου]. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18

Τέλος, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ὁ μικρὸς ἄξων ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἂν ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι ἡ μεγίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΑ εἶναι ἡ ἐλαχίστη μεταξὺ αὐτῶν, καὶ ὅτι ἐκ τῶν εὐθειῶν, αἵτινες τέμνουσι τὴν τομήν, ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, καὶ ὅτι ἐκ τῶν εὐθειῶν αἵτινες συναντῶσιν ἐξωτερικῶς τὴν τομήν, ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΑΔ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἥτις εὑρίσκεται μακρύτερον, καὶ ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΓΔ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε ἄλλης ἀγομένης εὐθείας εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ σημείου Γ καὶ τῆς τεταγμένως κατηγμένης, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον, δηλαδὴ πρὸς ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ μικροῦ ἄξονος καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς παραμέτρου ἀπὸ τοῦ ἄξονος τούτου.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ καὶ ἂς κατασκευασθῶσι τὰ αὐτά, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΔ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΖΔ κατὰ ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΛ, ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον, καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΔ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΕΔ κατ' ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθέν, τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς ἀπολαμβανομένης εὐθείας ΓΘ, καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΔ ὑπερέχει τοῦ



τετραγώνου τῆς εὐθείας ΒΔ κατ' ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΧ.

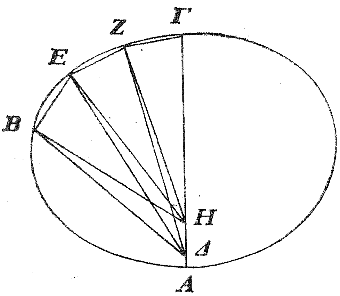
Καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΔ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΔΡ, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΓΜ, ΓΔ εἶναι μεταξύ των ἴσαι, καὶ ἀκόμη τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΔ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΓΜ, καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΜΓΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΝΞ, εἶναι ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΓΔ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΑΔ ἰσοδύναμος πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΞΜΡ, οὗτινος (τριγώνου) τὸ διπλάσιον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, ὡς τὸ προρρηθέν, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΔΓ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΔΖ, ἡ εὐθεῖα ΔΖ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΔΕ, ἡ εὐθεῖα ΔΕ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΔΒ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΒ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΔΑ.

Τέλος, τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας Πξ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΞΟΠΑ (θ. 3), καὶ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΔΠ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΠΚ· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ξΔ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τραπεζίου ΞΟΠΑ σὺν τὸ τρίγωνον ΠΔΚ. Εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΔ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΓΜΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΜΝ = τρίγωνον ΑΝΞ· εἶναι ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ξΔ ἰσοδύναμος πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΟΜΚ, τουτέστι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΠ, εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ προρρηθὲν εἰς τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα.

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας Δτ κατ᾿ ὀρθογώνιον ὅμοιον κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΤ, καί, ὅτι δὲν εἶναι προφανὲς ἄλλως, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΣ κατ᾿ ὀρθογώνιον τοῦ αὐτοῦ περιεχομένου, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας Γγ. Εἶναι ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΔΓ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΑ ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθέν, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΑ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΔΑ εἶναι μικροτέρα τῆς Δξ, ἡ Δξ εἶναι μικροτέρα τῆς Δτ, καὶ ἡ Δτ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΣ. Ἡ ΔΓ ἄρα εἶναι ἡ μεγίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Δ, καὶ ἡ ΔΑ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐξ αὐτῶν. Μεταξὺ δὲ τῶν εὐθειῶν, αἵτινες τέμνουσιν ἐσωτερικῶς τὴν τομήν, ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, καὶ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν αἵτινες συναντῶσιν ἐξωτερικῶς τὴν τομήν, αἱ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΔΑ εἶναι μικρότεραι τῶν εὑρισκομένων μακρύτερον, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε ἀγομένης εὐθείας κατὰ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς ἀπολαμβανομένης εὐθείας μεταξὺ τοῦ σημείου Γ καὶ τῆς τεταγμένως κατηγμένης, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος ἐλλείψεως ληφθῇ σημεῖόν τι, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, ἡ μεγίστη εὐθεῖα, ἥτις δύναται ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὴν τομὴν θὰ εἶναι ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, καὶ ἐκ τῶν ἄλλων εὐθειῶν ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.



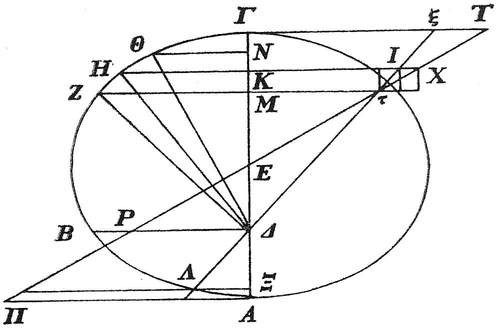
Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μικρὸς ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς σημεῖόν τι Δ, τοιοῦτον, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΓΔ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἡ μεγίστη ἐκ τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομήν, καὶ ὅτι ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον.

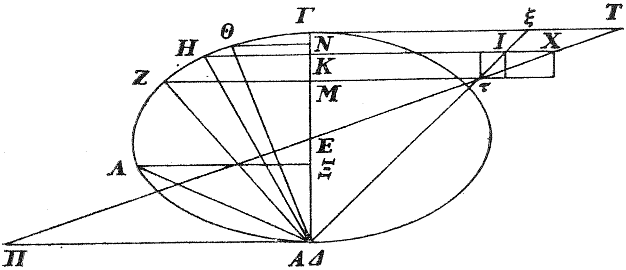
Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΓΗ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου Δ αἱ εὐθεῖαι ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΗΖ, ΗΕ, ΗΒ καὶ αἱ (χορδαὶ) ΓΖ, ΖΕ, ΕΒ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΗ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΖΗ καὶ ἡ γωνία ΓΖΗ ἄρα θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΓΗ καὶ ἡ γωνία ΓΖΔ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΓΔ (Τρία προηγούμενα θεωρήματα). Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΔ μεγαλυτέρα τῆς ΖΔ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΗΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΗΕ, ἡ γωνία ΖΕΗ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΖΗ, καὶ ἡ γωνία ΖΕΔ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΖΔ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΔΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΔΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΒ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΔΓ ἡ μεγίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἡ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

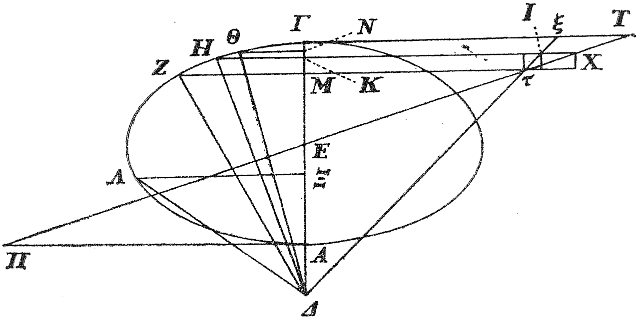
20

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος ἐλλείψεως ληφθῇ σημεῖόν τι, εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς μικροτέραν μὲν τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, ἀλλὰ μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεος τοῦ μικροῦ ἄξονος, καὶ ἂν ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς διαιρεθῇ οὕτως, ὥστε τὸ μέρος τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου νὰ εἶναι πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου τούτου (τῆς διαιρέσεως) πρὸς τὸ ἀρχικῶς ληφθὲν σημεῖον εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ πλαγία διάμετρος πρὸς τὴν παράμετρον, καὶ ἐκ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα συναντῶσα τὴν τομήν, καὶ ἂν ἐκ τοῦ σημείου συναντήσεως ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα μέχρι τοῦ ἀρχικῶς ληφθέντος σημείου, ἡ ἐπιζευχθεῖσα θὰ εἶναι ἡ μεγίστη ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ ληφθέντος σημείου μέχρι τῆς τομῆς, καὶ ἐκ τῶν ἄλλων εὐθειῶν ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν μεγίστην εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς μεγίστης θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε ἄλλης εὐθείας κατὰ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ ληφθέντος σημείου καὶ τῆς τεταγμένως κατηγμένης, εἶναι ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου καὶ τῆς διαφορᾶς τῆς διαμέτρου ταύτης ἀπὸ τῆς παραμέτρου.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, καὶ μικρὸς ἄξων αὐτῆς ἡ ΑΓ καὶ σημεῖόν τι ἐπ' αὐτοῦ τὸ Δ, τοιοῦτον, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΓΔ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΓ, ἢ τῆς πλαγίας διαμέτρου, ἀλλὰ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Ἔστω Ε τὸ κέντρον καὶ ἂς διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα ΕΓ, κατὰ τὸ σημεῖον Μ, κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΕΜ : ΜΔ = πλαγία διάμετρος ΑΓ : παράμετρος. Ἂς ὑψωθῇ ἐκ τοῦ σημείου Μ ἡ ΖΜ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΔ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΔ εἶναι ἡ μεγίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην, καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη αὐτῆς εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον, καὶ ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΖΔ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε ἄλλης εὐθείας, ἐκ τῶν ἀγομένων πρὸς







τὴν τομὴν εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς ἀπολαμβανομένης εὐθείας μεταξὺ τοῦ σημείου Μ καὶ τῆς εὐθείας τῆς τεταγμένως κατηγμένης, εἶναι ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον καθωρίσαμεν εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα.

Ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὡς αἱ ΔΘ, ΔΗ, ΔΖ, ΔΛ, καὶ ἡ ΔΒ ἔστω κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΤ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΘΝ, ΗΚ, ΛΞ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΤ καὶ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ, ὡς τοῦτο ἔγινεν εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΜΕ : ΔΜ = πλαγία πλευρὰ : παράμετρος, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΓ : ΓΤ = πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἡ εὐθεῖα ΜΕ : Μτ = ΕΓ : ΓΤ, εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΜΔ = Μτ, καὶ τὸ ΜΔ^2 εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΜΔτ. Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΜΖ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τραπεζίου ΓΤτΜ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς εὐθείας ΔΖ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΜΔτ αὐξηθὲν κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΓΤτΜ. Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΗΚ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΚΓΤΧ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΔΚ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΚΔΙ· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΔΗ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΚΔΙ αὐξηθέντος κατὰ τὸ τετράπλευρον ΚΓΤΧ· εἶναι ἄρα ἡ διαφορὰ $\text{ΔΖ}^2 - \text{ΔΗ}^2$ ἰσοδύναμος πρὸς τὸ τρίγωνον ΧΙτ. Τὸ διπλάσιον ἄρα τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΜ, ὅμοιον πρὸς ὀρθογώνιον, περὶ τοῦ ὁποίου ἐλέχθη ἤδη, καὶ τὸ ὁποῖον ἐστηρίχθη κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ' ὃν ἀπεδείχθη εἰς τὸ δέκατον ἕβδομον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΖΔ ὑπερἔχει τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΔΘ κατ' ὀρθογώνιον κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΝ, τοῦ αὐτοῦ ἐμβαδοῦ, ὡς τὸ προρρηθὲν ὀρθογώνιον. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΓξ, ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι ἡ διαφορὰ $ΔΖ^2$—$ΔΓ^2$ θὰ εἶναι διπλασία τοῦ τριγώνου ξΓτ, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον τοῦ προρρηθέντος ἐμβαδοῦ, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΜ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΔΖ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΔΗ, ἡ εὐθεῖα ΔΗ μεγαλυτέρα τῆς ΔΘ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΘ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΔΓ.

Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΔΒ διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΠΑΔΡ (θ. 3), καὶ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΖΔ εἶναι διπλάσιον τῶν τριγώνων ΕΓΤ + ΔΕτ, καὶ τὸ τρίγωνον ΕΓΤ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΠΕΑ· εἶναι ἄρα ἡ διαφορὰ $ΔΖ^2$—$ΔΒ^2$ διπλασία τοῦ τριγώνου ΡΔτ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, τοῦ προμνησθέντος ἐμβαδοῦ, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΜ· ὅπερ ἀποδεικνύεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς εἰς τὸ δέκατον ἕκτον θεώρημα. Διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς ἡ διαφορὰ $ΔΖ^2$—$ΔΛ^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον ὅμοιον, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΞ.

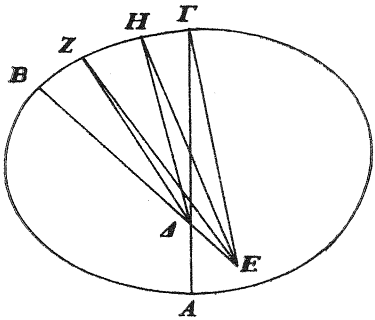
Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΔΖ εἶναι ἡ μεγίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἐκ τούτων ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΔΖ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου οἱασδήποτε ἄλλης ἐκ τῶν ἀγομένων εὐθειῶν εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον, τοῦ προρρηθέντος ἐμβαδοῦ, κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ σημείου Μ καὶ τῆς εὐθείας τῆς τεταγμένως κατηγμένης. Πάντα ταῦτα συμβαίνουσι, ὅταν ὁ μικρὸς ἄξων εἶναι ἴσος ἢ μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Καὶ πράγματι, ἐὰν ὁ μικρὸς ἄξων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, καὶ ἂν αἱ εὐθεῖαι ἄγωνται ἐκ τοῦ σημείου Δ, ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα, ἢ ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, ἢ ἀκόμη ἐξ ἐξωτερικοῦ σημείου, ὡς τὸ Δ, ὡς εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, ἡ μεγίστη εὐθεῖα θὰ εἶναι ἡ προρρηθεῖσα, ἐπειδὴ ὁ τρόπος ἀποδείξεως εἰς τὸ δεύτερον καὶ τὸ τρίτον σχῆμα εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν τρόπον ἀποδείξεως εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα.

21

Ἐὰν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως πέραν τοῦ μικροῦ ἄξονος μεγίστης εὐθείας ἀγομένης εἰς ἔλλειψιν κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ληφθῇ σημεῖόν τι, ἡ σχηματισθεῖσα εὐθεῖα, τῆς ὁποίας ἡ μεγίστη εὐθεῖα ἀποτελεῖ μέρος, εἶναι ἡ μεγίστη ὅλων τῶν εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὴν τομήν, καὶ τὴν πλησιέστερον πρὸς ταύτην, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη αὐτῆς εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἥτις εἶναι μακρύτερον.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, καὶ ἡ ΒΔ ἔστω ἡ μεγίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομήν, ὡς ἐξετέθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΔ σημεῖόν τι Ε, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΕΒ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΔ. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΒ εἶναι ἡ μεγίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομὴν καὶ ὅτι ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη αὐτῆς, εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΕΗ, ΕΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΖ, ΔΗ, ΔΓ, καὶ αἱ (χορδαὶ) ΓΗ, ΗΖ, ΖΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΖ, ἡ γωνία ΒΖΔ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΒΔ (Εὐκλ. 1, 18), καὶ ἡ γωνία ΒΖΕ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΒΕ· εἶναι ἄρα ἡ ΒΕ μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΔΖ εἶναι μεγαλυτέρα



τῆς ΔΗ, ἡ γωνία ΔΗΖ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΖΗ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΖΗΕ μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΖΗ, καὶ ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΕ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΗ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον θὰ φανῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΕΓ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΕΒ ἡ μεγίστη ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τομῆς, καὶ ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΕΒ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἥτις εὑρίσκεται μακρύτερον. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἐὰν ἡ μεγίστη εὐθεῖα ἔχῃ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α, ἢ ἐξ οἱουδήποτε ἄλλου ληφθέντος ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ἄξονος ΑΓ (σχ. 3ον προηγουμένου θεωρήματος).

22

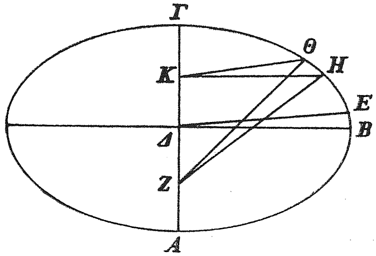
Ἐὰν ἐκ σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος ἐλλείψεως ἀχθῇ εὐθεῖά τις σχηματίζουσα γωνίαν μετὰ τοῦ ἄξονος τούτου, εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα αὕτη ἡ μεγίστη ἐκ τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὴν τομήν, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν μικρὸν ἄξονα, ὅταν τὸ ληφθὲν σημεῖον εἶναι τὸ κέντρον τῆς τομῆς, καὶ ἐὰν τὸ σημεῖον τοῦτο δὲν εἶναι τὸ κέντρον, ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη μετὰ τοῦ ἄξονος θὰ εἶναι ὀξεῖα, καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἄκρου τῆς μεγίστης εὐθείας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη ἀπὸ τῆς καθέτου ταύτης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, θὰ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τοῦ σημείου τοῦ ληφθέντος ἐπὶ τοῦ ἄξονος, εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, εἰς ὃν εἶναι ὁ πλάγιος ἄξων πρὸς τὴν παράμετρον.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ τῆς ὁποίας μικρὸς ἄξων εἶναι ἡ ΑΓ, καὶ μεγίστη εὐθεῖα, ὡς ἡ ΒΔ, διερχομένη πρῶτον διὰ τοῦ κέντρου· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω, ὅτι εἶναι κάθετος ἡ ΔΕ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΔΕ ἡ μεγίστη ἐκ τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομὴν (θ. 11)· ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι ἡ ΔΒ εἶναι ἡ μεγίστη εὐθεῖα. Εἶναι ἄρα ἡ ΔΒ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ.

Ἂς ἀχθῇ τώρα μεγίστη εὐθεῖα ἐξ ἄλλου σημείου, τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΓΖΗ εἶναι ὀξεῖα, καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Η ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη ἀπὸ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου Δ, θὰ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τοῦ σημείου Ζ, εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, εἰς ὃν εἶναι ὁ πλάγιος ἄξων πρὸς τὴν παράμετρον.

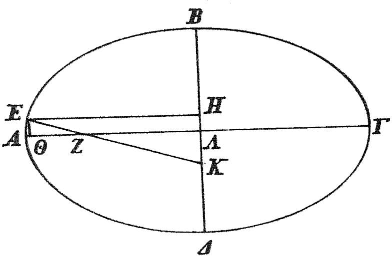
Ἡ εὐθεῖα ΖΓ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου ἢ θὰ εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν. Ἀλλὰ δὲν θὰ εἶναι ἴση, ἐὰν αὕτη δὲν εἶναι μεγίστη (θ. 16, 17, 18)· καὶ δὲν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι πάλιν μεγίστη (θ. 19). Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΖΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου· ἐὰν ἄρα γίνῃ, ὥστε εὐθεῖά τις ἀπολαμβανομένη νὰ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν



τὴν συνισταμένην ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῆς ἀπολαμβανομένης ταύτης καὶ τῆς εὐθείας ΖΔ, ὡς ἡ πλαγία διάμετρος πρὸς τὴν παράμετρον, ἡ ἀπολαμβανομένη αὕτη θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΓΔ, ἐπειδὴ καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΖ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τῆς πλαγίας διαμέτρου· θὰ εἶναι ἄρα ὁ λόγος τῆς τελευταίας ταύτης εὐθείας πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, μικρότερος τοῦ λόγου τῆς ὑπεροχῆς τῆς παραμέτρου ἀπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου, πρὸς τὴν πλαγίαν διάμετρον, καὶ ὁ λόγος της πρὸς εὐθεῖαν μικροτέραν τῆς εὐθείας ΓΔ θὰ εἶναι ἄρα ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν τελευταῖον τοῦτον λόγον. Ἔστω ΔΚ ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΚΔ : ΖΚ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Λέγω, ὅτι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Κ ἐπὶ τὸν ἄξονα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Η. Διότι, ἐὰν δὲν διέρχηται διὰ τοῦ σημείου τούτου, ἔστω ὅτι διέρχεται ἐκ τοῦ σημείου Θ τῆς εὐθείας ΚΘ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΘΖ θὰ εἶναι μεγίστη (θ. 20)· ὅπερ ἄτοπον· ἡ κάθετος ἄρα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Η, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Κ, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΔΚ : ΚΖ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23

Ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς τοῦ μικροῦ ἄξονος ἐλλείψεως ἀχθῇ πρὸς τὴν τομὴν μεγίστη εὐθεῖα, τὸ τμῆμα τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τοῦ μεγάλου ἄξονος ὑπὸ τῆς μεγίστης εὐθείας, μέχρι τῆς τομῆς εἶναι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἐκ τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου τούτου τομῆς τοῦ μεγάλου ἄξονος ὑπὸ τῆς μεγίστης εὐθείας μέχρι τῆς τομῆς.

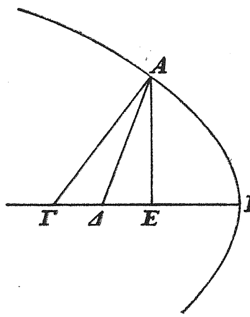


Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓΔ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ καὶ μικρὸς ἄξων ἡ ΒΔ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΚΕ ἔστω ἡ μεγίστη ἐκ τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Κ πρὸς τὴν τομήν. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΕ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν ἀγομένων εὐθειῶν ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομήν.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ε ἡ εὐθεῖα ΕΗ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΒ καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΘ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Εἶναι ἄρα ὁ ἄξων ΔΒ πρὸς τὴν παράμετρόν του, ὡς ἡ παράμετρος τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον ΑΓ, καὶ ὁ ἄξων ΒΔ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρόν του, ὡς ἡ εὐθεῖα ΛΗ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΗΚ (θ. 22)· εἶναι ἄρα ἡ παράμετρος τοῦ μεγάλου ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸν ἄξονα ΑΓ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΛΗ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΗΚ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΛΗ : ΗΚ = ΘΖ : ΘΛ· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΘΛ : ΘΖ = ἄξων ΑΓ : παράμετρός του. Εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΕ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΓ· εἶναι ἄρα ἡ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ΕΖ ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν (θ. 15)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24

Εἰς πᾶσαν τομὴν κώνου μία καὶ μόνη ἐλαχίστη εὐθεῖα ἄγεται ἐκ τοῦ ἄξονος πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς τομῆς.

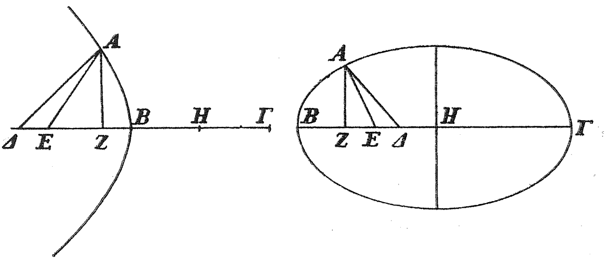


Ἔστω πρῶτον τομὴ παραβολὴ ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι Α ἐπὶ τῆς τομῆς. Λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ ἄξονος πρὸς τὸ σημεῖον Α μία καὶ μόνη ἐλαχίστη εὐθεῖα ἄγεται.

Διότι, ἂς ἀχθῶσιν, εἰ δυνατόν, ΑΓ, ΑΔ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΓ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΕΔ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΓ θὰ εἶναι ἐπίσης ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ τοῦ ἄξονος ἄρα πρὸς τὸ σημεῖον Α μία καὶ μόνη ἐλαχίστη εὐθεῖα ἄγεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25

Ἐὰν δὲ ἡ τομὴ ΑΒ εἶναι ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις, ἔχουσα ὡς ἄξονα τὴν εὐθεῖαν ΓΒ, καὶ ὡς κέντρον τὸ σημεῖον Η, καὶ ἐὰν ληφθῇ σημεῖόν τι Α ἐπὶ τῆς τομῆς, λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ ἄξονος πρὸς τὸ σημεῖον Α μία καὶ μόνη ἐλαχίστη εὐθεῖα ἄγεται.



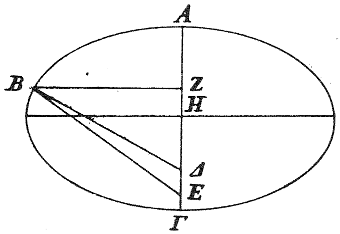
Ἔστω, ὅτι ἐκτὸς τῆς μιᾶς ἐλαχίστης ἄγονται καὶ ἄλλαι, ὡς αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΑΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α, ἡ εὐθεῖα ΑΖ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΓ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΗ : ΖΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος (θ. 14 καὶ 15). Πρέπει ἄρα ἡ εὐθεῖα ΗΖ : ΖΔ = πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον οἷον ἡ πλαγία διάμετρος : παράμετρος· ὅπερ ἀδύνατον. Πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἄρα Α τῆς τομῆς δὲν ἄγονται ἐκ τοῦ ἄξονος δύο ἐλάχισται εὐθεῖαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΚΩΝΙΚΩΝ ε΄

26

Ἐκ σημείου τινὸς ἐλλείψεως μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ μικροῦ ἄξονος μία καὶ μόνη μεγίστη εὐθεῖα ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μικρὸς ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, καὶ σημεῖόν τι Β ἐπὶ τῆς τομῆς. Λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Β μία καὶ μόνη μεγίστη εὐθεῖα ἄγεται πρὸς τὸν (μικρὸν) ἄξονα.

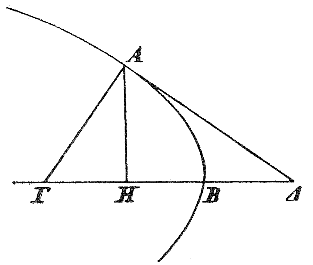


Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἃς ἀχθῶσιν καὶ μέγισται εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἡ κάθετος ΒΖ (ἐπὶ τὸν μικρὸν ἄξονα), καὶ ἔστω Η τὸ κέντρον τῆς τομῆς. Ἐὰν ἄρα ἡ εὐθεῖα ΒΕ εἶναι μία ἐκ τῶν μεγίστων εὐθειῶν τῶν ἀγομένων πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ εὐθεῖα ΖΗ : ΖΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος (θ. 22). Πρέπει ἄρα ἐπίσης ἡ εὐθεῖα ΖΗ : ΖΔ = πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον, οἷον ἡ πλαγία διάμετρος : παράμετρος· ὅπερ ἄτοπον. Ἐκ τοῦ σημείου ἄρα Β πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα μία καὶ μόνη μεγίστη εὐθεῖα ἄγεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27

Ὅταν εὐθεῖά τις ἠγμένη ἀπὸ τοῦ ἄκρου ἐλαχίστης εὐθείας, ὁρισθείσης κατὰ τὰ προηγούμενα θεωρήματα, εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν τομήν, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην εὐθεῖαν.

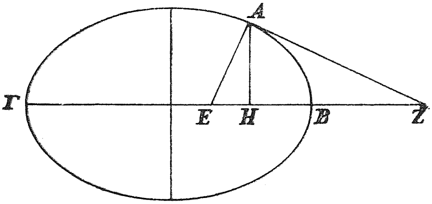
Ἔστω πρῶτον τομὴ ἡ παραβολὴ ΑΒ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΓ. Λέγω, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὴν τομὴν ἀπὸ τοῦ ἄκρου οἱασδήποτε ἐλαχίστης εὐθείας θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην αὐτὴν εὐθεῖαν. Ἐὰν ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα εἶναι μέρος τοῦ ἄξονος ΒΓ, τὸ πρᾶγμα εἶναι φανερόν· ἀλλὰ ἐὰν ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα εἶναι ἄλλη τις, ὡς ἡ ΑΓ, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ΑΒ. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ὀρθή.



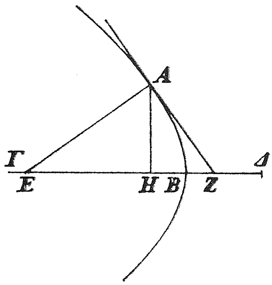
Ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος (ἐπὶ τὴν ΒΓ) ἡ ΑΗ, ὁπότε ἡ ΗΓ = 1/2 τῆς παραμέτρου (θ. 13). Καὶ ἂν ἡ ΑΔ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α ἡ κάθετος ΑΗ, ἡ εὐθεῖα ΒΔ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ (1, 35)· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΗ : παράμετρος = ΒΗ : ΗΔ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΓΗ, ΗΔ, θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΗ καὶ τῆς παραμέτρου. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΒΗ x παράμετρος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΗ (1, 11)· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΗ ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον ΓΗ x ΗΔ. Ἡ γωνία ἄρα ΑΗΔ εἶναι ὀρθὴ (Λῆμμα Πάππου 1)· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΔΑΓ ὀρθή.

28

Ἐὰν δὲ ἡ τομὴ ΑΒ εἶναι ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΓ, λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ ἄκρου μιᾶς ἐλαχίστης εὐθείας, ὡς ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην αὐτὴν εὐθεῖαν.



Ἔστω ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα μέρος τοῦ ἄξονος ΒΓ· εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην αὐτὴν εὐθεῖαν. Ἔστω τώρα ἄλλη τις εὐθεῖα ἐλαχίστη ἡ ΑΕ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΑΖ. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΖΑΕ εἶναι ὀρθή.

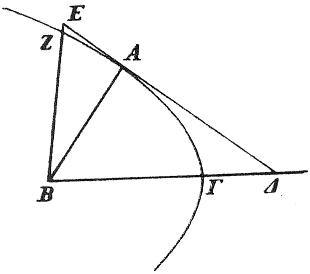


Ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΑΗ, καὶ ἔστω Δ τὸ κέντρον (τῆς ὑπερβολῆς). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΕ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ἡ ΑΗ εἶναι τεταγμένως κατηγμένη, ἡ εὐθεῖα ΔΗ : ΗΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος (θ. 14 καὶ 15). Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΔΗ : ΗΕ = ὀρθογώνιον ΔΗ x ΗΖ : ὀρθογώνιον ΗΖ : ΗΕ· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΔΗ x ΗΖ : ὀρθογώνιον ΗΖ x ΗΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Ἀλλὰ ἡ πλαγία διάμετρος : παράμετρος = ὀρθογώνιον ΔΗ x ΗΖ : ΑΗ² (1, 37)· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΗΖ x ΗΕ = ΑΗ². Ἡ γωνία ἄρα ΑΗΖ εἶναι ὀρθὴ

(Λῆμμα Πάππου 1), καὶ ἡ γωνία ΖΑΕ εἶναι ὀρθή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29

Ἡ αὐτὴ πρότασις ἀποδεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς·



Ἔστω κωνική τις τομὴ ἡ ΑΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΔ, καὶ ΑΒ ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ΑΔ ἐφαπτομένη. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ὀρθή.

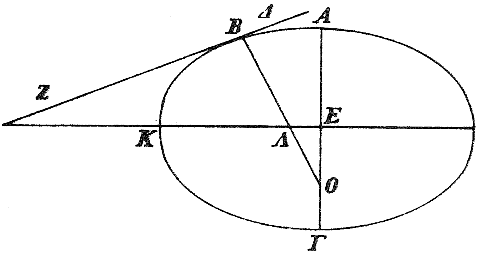
Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ἡ ΒΕ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΒ μεγαλυτέρα τῆς ΒΕ, καὶ ἡ ΑΒ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΖ· ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ ΑΒ ὑπετέθη, ὅτι εἶναι ἡ ἐλαχίστη. Ἐὰν ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι ἐλαχίστη, ἡ γωνία ΔΑΒ θὰ εἶναι ὀρθή.

30

Ἐὰν ἐκ τοῦ ἄκρου εὐθείας τινὸς μεγίστης εἰς ἔλλειψιν ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, λέγω, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν μεγίστην αὐτήν.

Ἔστω ἡ ἔλλειψις ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μικρὸς ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ ⟨κέντρον δὲ τὸ Ε⟩. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ ἄξονος τούτου πρὸς τὴν τομὴν μεγίστη εὐθεῖα ἡ ΟΒ, καὶ ἔστω ἡ ΒΔ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Β. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΔΒΟ εἶναι ὀρθή.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ εὐθεῖα ΕΚ ⟨τέμνουσα τὴν ΟΒ εἰς τὸ σημεῖον Λ. Halley⟩, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μεγάλου ἄξονος. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ὁ μικρὸς ἄξων καὶ ὁ ἄξων ΕΚ συναντᾷ τὴν μεγίστην εὐθεῖαν, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη μεταξὺ τῆς



τομῆς καὶ τοῦ μεγάλου ἄξονος, θὰ εἶναι ἐλαχίστη (θ. 23). Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΒΛ εἶναι ἐλαχίστη. Εἶναι δὲ ἡ ΒΔ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΛ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

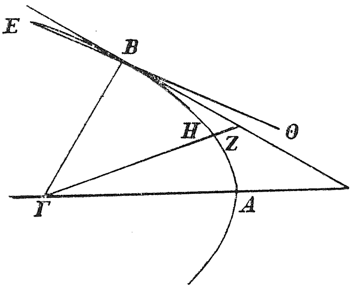
31

Ἐὰν ἐκ τοῦ ἄκρου ἐλαχίστης εὐθείας, κειμένου ἐπὶ μιᾶς τῶν τριῶν τομῶν κώνου, ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην, ἡ ἀγομένη κάθετος θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς.

Ἔστω τομὴ κώνου ἡ ΑΒ, καὶ εἰς αὐτὴν εὐθεῖα ἐλαχίστη ἡ

ΓΒ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΒ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω, ὅτι δὲν εἶναι ἐφαπτομένη, καὶ ὅτι τέμνει τὴν τομήν, ὡς ἡ ΕΒΘ. Ἂς ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα, ὡς ἡ ΒΖ, ἐκ τοῦ σημείου Ζ λαμβανομένου ἐκτὸς τῆς τομῆς, ὅμως κειμένου μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ΒΘ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου

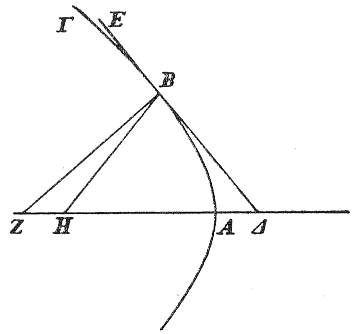


Γ ἡ κάθετος ΓΗΖ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΖ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΓΒΖ ὀξεῖα, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΖΒ εἶναι ὀρθή· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΖ μικροτέρα τῆς ΓΒ, καὶ ἡ ΓΗ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΒ· ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ ΓΒ ἐλήφθη ὡς ἐλαχίστη. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

32

Ἐὰν εὐθεῖά τις εἶναι ἐφαπτομένη μιᾶς τῶν τομῶν κώνου, καὶ ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην συναντῶσα τὸν ἄξονα, ἡ κάθετος αὕτη θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἐκ τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὸν ἄξονα.

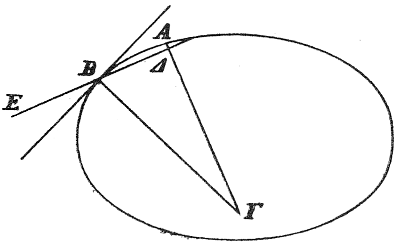
Ἔστω τομή τις κώνου ἡ ΑΒΓ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Β, κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ἡ ΒΖ, συναντῶσα τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Λέγω, ὅτι ἡ ΒΖ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα.



Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω, ὅτι εἶναι ἐλαχίστη ἡ ΒΗ, διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Β. Ἡ γωνία ἄρα ΔΒΗ θὰ εἶναι ὀρθὴ (θ. 27 καὶ 28)· ὅπερ ἄτοπον, διότι ἐλήφθη ὀρθὴ ἡ γωνία ΔΒΖ. Ἡ ΒΖ ἄρα εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33

Ἐὰν ἐκ τοῦ ἄκρου εὐθείας μεγίστης, κειμένου ἐπὶ τομῆς κώνου, ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τῆς μεγίστης, αὕτη θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς.

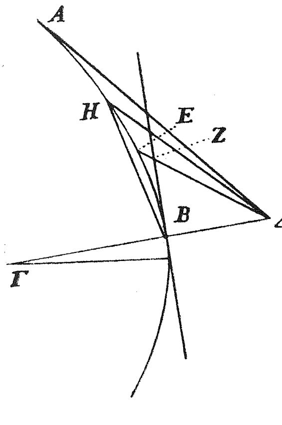


Ἔστω τομὴ κώνου ἡ ΑΒ καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΓ μεγίστη. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω, ὅτι τέμνει τὴν τομήν, ὡς ἡ εὐθεῖα ΕΒΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἡ εὐθεῖα ΓΔΑ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΕΒ ⟨ἐκβαλλομένην⟩ εἰς τὸ σημεῖον Δ ⟨καὶ τὴν τομὴν εἰς τὸ σημεῖον Α. Halley⟩. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΓΔ ὑποτείνει γωνίαν ὀρθήν, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΒ ὑποτείνει γωνίαν ὀξεῖαν, ἡ εὐθεῖα ΓΔ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΒ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΓ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΓ μεγαλυτέρα τῆς ΓΒ· ὅπερ ἄτοπον· διότι ὑπετέθη, ὅτι ἡ ΓΒ εἶναι μεγίστη. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΒ, εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

34

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστης ἢ ἐλαχίστης εὐθείας τομῆς κώνου, ληφθῇ σημεῖόν τι κείμενον ἐκτὸς τῆς τομῆς, ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς τομῆς, θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων πρὸς τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς, χωρὶς αὗται νὰ θεωρηθῶσιν ἐκβαλλόμεναι, ἀλλὰ συναντῶσαι τὴν τομὴν μόνον εἰς ἓν σημεῖον, ἐκ τῶν ἄλλων δὲ εὐθειῶν ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

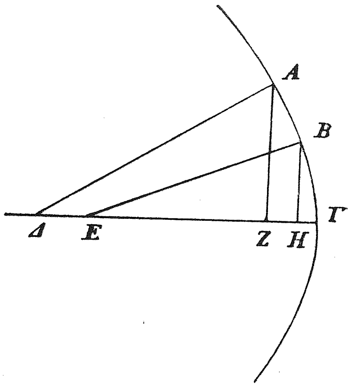


Ἔστω ἡ ΑΒ τομὴ κώνου καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΓ μεγίστη ἢ ἐλαχίστη, καὶ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς ταύτης ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι Δ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὴν τομὴν αἱ εὐθεῖαι ΔΑ, ΔΗ, ΔΕ, ἑκάστη τῶν ὁποίων συναντᾷ τὴν τομὴν εἰς ἓν μόνον σημεῖον. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομήν, καὶ ὅτι ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην εὐθεῖα εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἥτις εἶναι μακρύτερον.

Διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΖ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, ἡ γωνία ΖΒΔ θὰ εἶναι ὀρθὴ (θ. 27, 28, 30)· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΔΕ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΔΒ. Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΗΒ, ΗΕ· ἡ γωνία ἄρα ΔΕΗ θὰ εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ ἡ γωνία ΔΗΖ θὰ εἶναι ὀξεῖα· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΔΗ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΔΕ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΑ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΗ. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις διὰ τὰς εὐθείας τὰς ἀγομένας πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΒΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35

Ἐὰν εἰς πᾶσαν τομὴν κώνου ἀχθῶσι πολλαὶ εὐθεῖαι ἐλάχισται, αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῶν ἐλαχίστων εὐθειῶν, αἱ κείμεναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς θὰ εἶναι μεγαλύτεραι ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφήν.

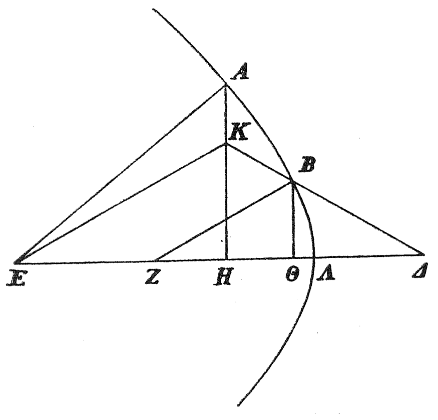


Ἔστω πρῶτον, ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἡ παραβολὴ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ ΓΔ καὶ ἔστωσαν ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΒΕ. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΑΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΒΕΓ.

Ἃς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΑΖ, ΒΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΕ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ εὐθεῖα ΕΗ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου (θ. 13), καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΖ θὰ εἶναι ἐπίσης τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου (θ. 13)· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΕΗ = ΔΖ (Εὐκλ. κοιναὶ ἔννοιαι α'). Ἡ κάθετος ἄρα ΑΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς καθέτου ΒΗ· ἡ γωνία ἄρα ΑΔΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΒΕΗ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

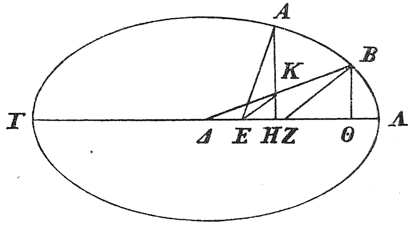
36

Ἔστω τώρα ἡ τομὴ ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΛΕ, κέντρον δὲ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἔστωσαν ἐλά-



χισται εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΑΕΛ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΒΖΛ.

Διότι, ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΒΘ, ΑΗ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΚΒ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΔΗ : ΗΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, τουτέστιν = ΔΘ : ΘΖ (θ. 14 καὶ 15)· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΔΗ : ΗΕ = ΔΘ : ΘΖ, καὶ ἐναλλὰξ ΔΗ : ΔΘ = ΗΕ : ΘΖ (Εὐκλ. 5, 16). Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΔΗ : ΔΘ = ΚΗ : ΒΘ· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΗΕ : ΘΖ = ΚΗ : ΒΘ. Αἱ γωνίαι ἄρα ΑΗΕ, ΒΘΖ εἶναι ὀρθαί· εἶναι ἄρα τὰ τρίγωνα ΚΕΗ, ΒΖΘ ὅμοια. Ἡ γωνία ἄρα ΑΕΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΒΖΘ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

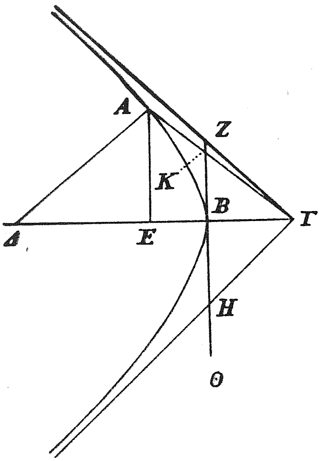


37

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἀχθῇ ἐλαχίστη εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τοῦ ἄξονος γωνίαν, ἡ γωνία αὕτη θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν σχηματιζομένων μετὰ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἀσυμπτώτου καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀγομένης ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς καθέτως ἐπὶ τὸν ἄξονα.

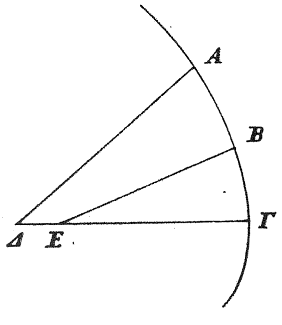
Ἔστωσαν ΓΔ ὁ ἄξων καὶ αἱ ΖΓ, ΓΗ ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς ΑΒ, καὶ ΑΔ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἂς ὑψωθῇ δὲ ἐκ τοῦ σημείου Β ἡ εὐθεῖα ΖΒΗ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΑΔΓ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΓΖΗ.

Ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΘ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, τοῦ σημείου Θ πίπτοντος ἐπὶ τοῦ σημείου Η ἢ μεταξὺ τῶν σημείων Β, Η ἢ πέραν τούτων, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΓΒ : ΒΘ = πλάγιος ἄξων : παράμετρος (θ. 14).



Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΕ : ΕΔ = πλάγιος ἄξων : παράμετρος· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΓΒ : ΒΘ = ΓΕ : ΕΔ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΚΒ : ΒΓ = ΑΕ : ΕΓ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΚΒ : ΒΘ = ΑΕ : ΕΔ. Ὁ λόγος ἄρα ΚΒ : ΒΘ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΖΒ : ΒΘ καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΒ : ΒΘ = ΓΒ : ΒΖ (2, 3)· ὁ λόγος ἄρα ΑΕ : ΕΔ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΓΒ : ΒΖ. Ἀλλὰ αἱ πλευραὶ αὗται περιέχουσι γωνίας ὀρθάς· εἶναι ἄρα φανερόν, ὅτι ἡ γωνία ΑΔΓ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΓΖΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38



Ἐὰν εἰς τομὴν κώνου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐλάχισται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος, αὗται ἐκβαλλόμεναι θὰ συναντηθῶσι πρὸς τὸ ἀπέναντι μέρος τῆς τομῆς, τουτέστι πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἄξονος.

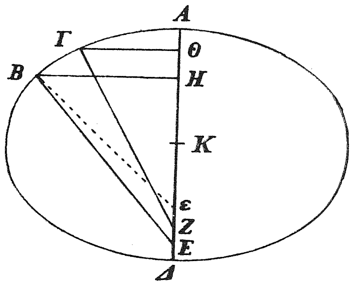
Ἔστω τομὴ κώνου ἡ ΑΒ, καὶ ἄξων ὁ ΓΔ, καὶ δύο εὐθεῖαι ἐλάχισται αἱ ΑΔ, ΒΕ ἠγμέναι ⟨ἐκ τῆς τομῆς⟩ πρὸς τὸν ἄξονα. Λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ ἐκβαλλόμεναι θὰ συναντηθῶσι πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΒΕΓ, αἱ γωνίαι ΑΔΕ, ΔΕΒ θὰ εἶναι μεγαλύτεραι δύο γωνιῶν ὀρθῶν (θ. 35 καὶ 36)· αἱ ἐφεξῆς ἄρα τούτων γωνίαι θὰ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΔ, ΒΕ εἶναι δύο εὐθεῖαι ἐλάχισται· προεκβαλλόμεναι ἄρα αὗται θὰ συναντηθῶσι πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39

Ἐὰν εὐθεῖαι μέγισται ἀχθῶσιν ἐκ τῆς τομῆς πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα ἐλλείψεως αὗται τέμνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τομῆς.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μικρὸς ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΔ. Λέγω, ὅτι μέγισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῆς τομῆς ΑΒΓ τέμνονται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἡμιελλείψεως ΑΒΔ.



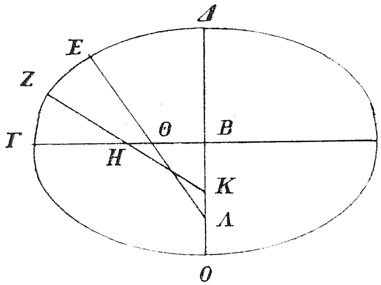
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστωσαν δύο μέγισται εὐθεῖαι αἱ ΒΕ, ΓΖ αἱ ὁποῖαι δὲν τέμνονται μεταξύ των πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος· ἃς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΒΗ, ΓΘ, καὶ ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΚΘ : ΘΖ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος (θ. 22), καὶ ὁμοίως ἡ εὐθεῖα ΚΗ : ΗΕ = πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον· καὶ δι' ἀναστροφῆς θὰ εἶναι ΚΗ : ΚΕ = ΚΘ :

ΚΖ, καὶ ἐναλλὰξ ΚΗ : ΚΘ = ΚΕ : ΚΖ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΚΖ εἶναι μικροτέρα τῆς ΚΕ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΚΘ μικροτέρα τῆς ΚΗ· ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Αἱ μέγισται ἄρα εὐθεῖαι Βε, ΓΖ τέμνονται μεταξύ των· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40

Εἰς ἔλλειψιν ἡ συνάντησις εὐθειῶν ἐλαχίστων λαμβάνει χώραν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τοῦ ⟨μεγάλου⟩ ἡμιάξονος, πρὸς τὸν ὁποῖον αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι ἄγονται, καὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος.

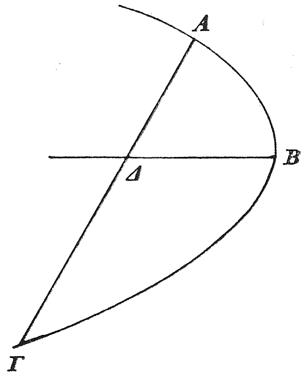
Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΔΕΓ, τῆς ὁποίας μικρὸς ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΕΟ, καὶ ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἐλάχισται αἱ ΕΘ, ΖΗ. Λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΘ, ΖΗ ἐκβαλλόμεναι συναντῶνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΓΒΟ.



Διότι, ἂς προεκβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι αὗται ἐκ τῶν σημείων Η, Θ μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὴν εὐθεῖαν ΔΒΟ κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΕΘ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ εὐθεῖα ΕΛ θὰ εἶναι μεγίστη (θ. 23). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΗ προεκβαλλομένη συναντᾷ τὴν ΒΟ εἰς τὸ σημεῖον Κ, ἡ εὐθεῖα ΖΚ θὰ εἶναι ἐπίσης μεγίστη. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΕΘ, ΖΗ προεκβαλλόμεναι συναντῶνται μεταξύ των εἰς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἄξονος (θ. 38), καὶ αἱ εὐθεῖαι ΕΛ, ΖΚ, ἐφ' ὅσον εἶναι μέγισται, συναντῶνται μεταξύ των πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μικροῦ ἄξονος (θ. 39). Τὸ σημεῖον ἄρα συναντήσεώς των κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας, τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΓΒ, ΒΟ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

41

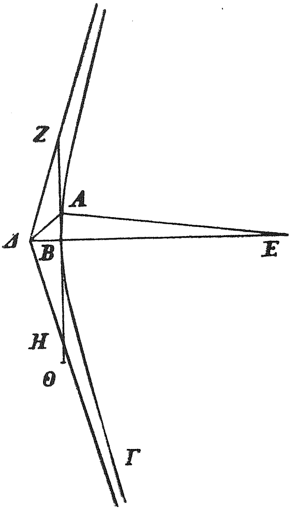
Εἰς παραβολὴν ἢ ἔλλειψιν, αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῆς τομῆς πρὸς τὸν ἄξονα, ἐκβαλλόμεναι συναντῶνται πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἄξονος.



Εἶναι δὲ τοῦτο φανερὸν ἀφ' ἑαυτοῦ εἰς τὴν ἔλλειψιν. Ἐὰν δὲ ἡ τομὴ εἶναι ἡ παραβολὴ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΔ, καὶ ἐὰν ἡ ΑΔ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη, λέγω, ὅτι ἡ ΑΔ προεκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὸ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς, τὴν ΒΓ. Διότι, ἐπειδὴ ἡ τομὴ εἶναι παραβολὴ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἔχει ἀχθῆ πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς, ἡ εὐθεῖα αὕτη προεκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν ΒΓ (1, 27)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42

Ἐὰν εἰς ὑπερβολήν, ἡ πλαγία διάμετρος δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς (ἀντιστοίχου) παραμέτρου αὐτῆς, οὐδεμία ἐλαχίστη εὐθεῖα ἄγεται ἐκ τῆς τομῆς πρὸς τὸν ἄξονα, συναντῶσα τὸ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς, καὶ ἐὰν ἡ πλαγία διάμετρος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου αὐτῆς, μέρος τῆς ἐλαχίστης προεκβαλλόμενον θὰ συναντήσῃ τὸ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς, καὶ τὸ ἄλλο μέρος αὐτῆς (προεκβαλλόμενον) δὲν θὰ τὴν συναντήσῃ.



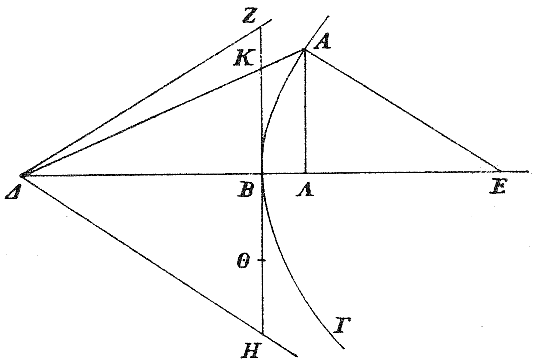
Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΕ κέντρον δὲ τὸ σημεῖον Δ, καὶ εὐθεῖά τις ἐλαχίστη ἡ ΑΕ, καὶ ἡ πλαγία διάμετρος νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΕ προεκτεινομένη δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

Ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῆς τομῆς αἱ ΔΖ, ΔΗ, ἡ εὐθεῖα ΖΒΗ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΘ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ πλαγία διάμετρος δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου, ἡ εὐθεῖα ΔΒ δὲν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΒΘ, καὶ θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα $ΔΒ : ΒΘ = ΒΔ^2 : ΒΖ^2$ (2, 3)· Δὲν θὰ εἶναι ἄρα τὸ $ΒΔ^2$ μεγαλύτερον τοῦ $ΒΖ^2$· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΒΔ δὲν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΒΖ, καὶ ἡ γωνία ΒΖΔ δὲν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΔΒ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΒΖΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΑΕΒ (θ. 37)· ἡ γωνία ἄρα ΖΔΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΑΕΒ. Ἡ γωνία ἄρα ΖΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΔΗ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΒΔΗ μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΑΕΒ. Καὶ ἡ ἐφεξῆς γωνία τῆς γωνίας ΑΕΒ αὐξηθεῖσα κατὰ τὴν γωνίαν ΑΕΒ ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας· ὥστε ἡ γωνία ΕΔΗ αὐξηθεῖσα κατὰ τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς γωνίας ΑΕΒ, εἶναι μεγαλυτέρα δύο ὀρθῶν γωνιῶν. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΕ, ΔΗ προεκβαλλόμεναι ἐκ τῶν σημείων Ε, Η, δὲν θὰ συναντηθῶσι πρὸς ἀλλήλας· καὶ προσέτι ἡ εὐθεῖα ΑΕ δὲν θὰ συναντήσῃ τὸ μέρος ΒΓ τῆς τομῆς (2, 8), διότι δὲν θὰ συναντήσῃ καὶ τὴν ἀσύμπτωτον ΔΗ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

43

Καὶ ἂν ⟨εἰς ὑπερβολὴν⟩ ἡ πλαγία διάμετρος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου, λέγω, ὅτι ἄλλαι μὲν ἐλάχισται εὐθεῖαι ἀγόμεναι πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ καὶ προεκβαλλόμεναι θὰ συναντήσωσι πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τὴν τομήν, ἄλλαι δὲ ἐλάχισται δὲν θὰ τὴν συναντήσωσι.

Ἔστωσαν αἱ ΖΔ, ΔΗ αἱ δύο ἀσύμπτωτοι τῆς τομῆς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ πλαγία διάμετρος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου, ἡ εὐθεῖα ΔΒ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΒΘ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· ὥστε ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΖΒ : ΒΘ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΖΒ : ΒΔ. Ἄς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΚΒ : ΒΘ = ΖΒ : ΒΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΚ, ἥτις προεκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν (2, 2). Ἔστω, ὅτι θὰ τὴν συναντήσῃ εἰς τὸ σημεῖον Α· ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α ἡ εὐθεῖα ΑΛ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΔΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΛ : ΛΕ = ΔΒ : ΒΘ, τουτέστιν = πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΛ εἶναι κάθετος, ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ΑΕ θὰ εἶναι εὐθεῖα ἐκ τῶν ἐλαχίστων (θ. 9). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΚ : ΒΔ = ΑΛ : ΛΔ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΒ : ΒΘ = ΔΛ : ΛΕ, θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΛ : ΛΕ = ΒΚ : ΒΘ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΒΚ : ΒΘ = ΖΒ : ΒΔ· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΛ : ΛΕ = ΖΒ : ΒΔ. Αἱ γωνίαι ἄρα ΖΒΔ, ΑΛΕ εἶναι μεταξύ των ἴσαι, διότι εἶναι ὀρθαὶ (Εὐκλ. αἰτ. δ')· τὰ τρίγωνα ἄρα ΖΒΔ,

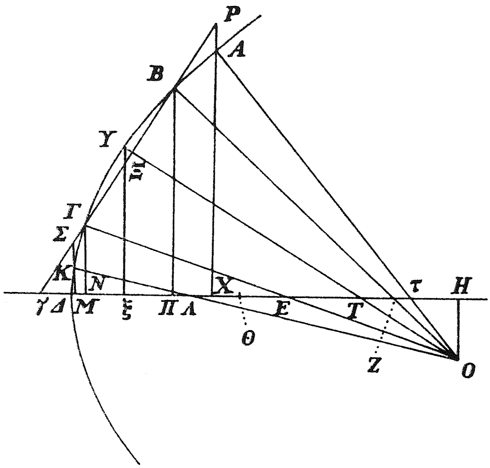


ΑΛΕ εἶναι ὅμοια, καὶ ἡ γωνία ΖΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΕΛ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΒΔΗ ἴση πρὸς τὴν αὐτὴν γωνίαν ΑΕΛ. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΔΗ, ΑΕ δὲν συναντῶνται μεταξύ των, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΕ προεκβαλλομένη δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν εἰ μὴ μόνον εἰς τὸ σημεῖον Α, ἐπειδὴ δὲν συναντᾷ οὐδεμίαν τῶν ἀσυμπτώτων ΔΗ, ΔΖ (2, 8) καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΗ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΕ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν εἰ μὴ μόνον εἰς τὸ σημεῖον Α. Αἱ δὲ ἐλάχισται εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συναντῶσι τὸν ἄξονα μεταξὺ τῶν σημείων Β, Ε, σχηματίζουσι μετὰ τοῦ ἄξονος γωνίας μικροτέρας τῆς γωνίας ΒΔΗ (θ. 36), ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΔΗ, καὶ αἱ γωνίαι, αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Β, Ε, ὑφ' ἃς σχηματίζονται αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι, εἶναι μικρότεραι τῆς γωνίας ΑΕΒ· αἱ ἐλάχισται αὗται ἄρα εὐθεῖαι προεκβαλλόμεναι δὲν θὰ συναντήσωσι τὴν εὐθεῖαν ΔΗ, καὶ ἄρα δὲν θὰ συναντήσωσι τὴν τομὴν ΒΓ, δι' οὕς λόγους ἐλέχθη ἤδη εἰς τὸ ὄγδοον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου (2, 8). Ὡς πρὸς τὰς ἄλλας ἐλαχίστας εὐθείας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι μετὰ τοῦ ἄξονος γωνίας μεγαλυτέρας τῆς ΑΕΒ, ἐπειδὴ αὗται συναντῶσι τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, θὰ συναντῶσι καὶ τὴν τομὴν ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

44

Ἐὰν πρὸς τὸν ἄξονα τομῆς κώνου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐλάχισται καὶ προεκβληθῶσι μέχρις ὅτου συναντηθῶσι, καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου συναντήσεως ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα, ἥτις τέμνουσα τὸν ἄξονα συναντᾷ τὴν τομήν, τὸ μέρος τῆς εὐθείας ταύτης, τὸ ἀπολαμβανόμενον μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος δὲν θὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ἐὰν ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα δὲν κεῖται εἰς τὸν μεταξὺ τῶν δύο ἐλαχίστων εὐθειῶν τόπον, καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ ἄκρου αὐτῆς, τοῦ ἐπὶ τῆς τομῆς, ἀχθῇ πρὸς τὴν τομὴν εὐθεῖα ἐλαχίστη, αὕτη θὰ τμήσῃ μέρος τοῦ ἄξονος προσκείμενον πρὸς τὴν κορυφήν, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέρους τοῦ ἄξονος, τοῦ ἀπολαμβανομένου ὑπὸ τῆς ἀχθείσης, καὶ ἐὰν ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα κεῖται εἰς τὸν τόπον τῶν δύο ἐλαχίστων εὐθειῶν, ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ ἄκρου της πρὸς τὸν ἄξονα, θὰ τμήσῃ μέρος τοῦ ἄξονος, προσκείμενον πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ μέρους τοῦ τμηθέντος ὑπὸ τῆς εὐθείας αὐτῆς, καὶ ἐὰν ἡ τομὴ εἶναι ἔλλειψις θὰ πρέπει αἱ δύο ἐλάχισται εὐθεῖαι καὶ ἡ ἀχθεῖσα τρίτη εὐθεῖα νὰ συναντῶσι πάντοτε τὸν αὐτὸν μέγαν ἡμιάξονα τῆς τομῆς αὐτῆς.

Ἔστω πρῶτον τομὴ κώνου ἡ παραβολὴ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄ-



ξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΗ καὶ δύο εὐθεῖαι ΒΖ, ΓΕ ἐλάχισται ἀγόμεναι ἐκ ταύτης, αἵτινες συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Ο, καὶ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὸ σημεῖον Ο ἡ εὐθεῖα ΚΛ, ἡ ὁποία πρότερον νὰ κεῖται ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν ΟΓ, ΟΒ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΛ δὲν εἶναι ἐλαχίστη, καὶ ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Κ, τέμνει ἐπὶ τοῦ ἄξονος μέρος κείμενον πρὸς τὴν κορυφὴν Δ τῆς τομῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΔΛ.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΗ, ΒΠ, ΓΝ, ΚΜ ⟨ἐπὶ τὸν ἄξονα⟩, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΘΗ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΖ εἶναι ἐλαχίστη καὶ ἡ ΒΠ εἶναι κάθετος, ἡ εὐθεῖα ΠΖ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου (θ. 13). Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΠΖ = ΘΗ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΠΘ = ΖΗ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΗΘ : ΘΠ = ΠΖ : ΖΗ. Ἀλλὰ ΠΖ : ΖΗ = ΠΒ : ΟΗ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΟΗ x ΗΘ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΠ x ΠΘ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΝΘ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΟΗ x ΗΘ· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΠΒ x ΘΠ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΝΘ, καὶ ΠΒ : ΓΝ = ΝΘ : ΘΠ. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΓ, καὶ ἂς προεκβληθῇ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὸν ἄξονα ΔΗ εἴς τι σημεῖον γ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ κάθετος ΚΜ μέχρι τοῦ σημείου Σ. Εἶναι ἄρα ΠΒ : ΓΝ = Πγ : γΝ, καὶ Πγ : γΝ = ΝΘ : ΘΠ καὶ ἡ εὐθεῖα γΝ = ΠΘ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα γΜ εἶναι μικροτέρα τῆς ΠΘ· ὁ λόγος ἄρα τῆς ΠΜ : Μγ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΠΜ : ΠΘ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος Πγ : γΜ, τουτέστιν ὁ λόγος ΠΒ : ΜΣ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΜΘ : ΘΠ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΒΠ x ΠΘ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΣΜ x ΜΘ, καὶ μεγαλύτερον ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου ΚΜ x ΜΘ. Ἀπεδείχθη λοιπόν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΒΠ x ΠΘ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΟΗ x ΗΘ· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΟΗ x ΗΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΚΜ x ΜΘ, καὶ ὁ λόγος ΟΗ : ΚΜ, τουτέστιν ὁ λόγος ΗΛ : ΛΜ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΜΘ : ΘΗ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΗΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΜΛ. Ἀλλὰ ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΜΛ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Ἡ ἐλαχίστη ἄρα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Κ ἀποκόπτει ἐκ τοῦ ἄξονος τμῆμα μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΛΔ, καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΛ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 24).

Ἐὰν τώρα ἀχθῇ εὐθεῖά τις, ὡς ἡ ΟΑ, πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῶν εὐθειῶν ΒΟ, ΟΓ, καὶ δὴ καὶ ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν τούτων, λέγω, ὅτι τὸ μέρος Ατ τῆς εὐθείας αὐτῆς, δὲν εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη, καί, ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α, θ' ἀποκόψῃ ἐκ τοῦ ἄξονος μέρος μεγαλύτερον τῆς εὐθείας Δτ.

Ἔστω ΑΧ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΗ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΠΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γΝ (θ. 24)· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα γΧ μεγαλυτέρα τῆς ΠΘ, καὶ ὁ λόγος ΠΧ : Χγ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΧΠ : ΠΘ. Καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 17) ὁ λόγος ΧΠ : Πγ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς πρώτης αὐτῆς εὐθείας πρὸς τὴν ΧΘ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18) ὁ λόγος Χγ : γΠ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς ΠΘ : ΘΧ· ὁ λόγος ἄρα ΧΡ : ΠΒ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΠΘ : ΘΧ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΘΧ x ΧΡ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΠ x ΠΘ· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΑΧ x ΧΘ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΠ x ΠΘ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΒΠ x ΠΘ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΟΗ x ΗΘ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΑΧ x ΧΘ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΟΗ x ΗΘ· ὥστε ὁ λόγος ΑΧ : ΟΗ, τουτέστιν ὁ λόγος Χτ : τΗ, θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΗΘ : ΘΧ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΗΘ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας Χτ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΘΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα Χτ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Ἡ ἐλαχίστη ἄρα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Α θὰ ἀποκόπτῃ εὐθεῖαν μεγαλυτέραν τῆς Χτ· ὥστε τὸ μέρος τοῦ ἄξονος, τὸ ἀρχόμενον ἀπὸ τῆς κορυφῆς Δ τῆς τομῆς, θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέρους Δτ, τοῦ ἀποκοπτομένου ὑπὸ τῆς εὐθείας Ατ, καὶ ἄρα, ἡ εὐθεῖα Ατ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 24).

Καὶ ἂν ληφθῇ εὐθεῖά τις, ὡς ἡ ΟΥ , κειμένη εἰς τὸν τόπον τὸν ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΟΒ, ΟΓ, λέγω, ὅτι ἡ ΥΤ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Υ, θ' ἀποκόψῃ τμῆμα τοῦ ἄξονος, τὸ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Δ, μικρότερον τοῦ τμήματος ΔΤ τοῦ ἄξονος τούτου.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ⟨ἐπὶ τὸν ἄξονα⟩ ἡ Υξ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη ὅτι ἡ εὐθεῖα ΠΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γΝ, ἡ εὐθεῖα ξγ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΠΘ· ὁ λόγος ἄρα Πξ : ξγ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς Πξ : ΠΘ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος Πγ : γξ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς ξΘ : ΘΠ. Ἀλλὰ Πγ : γξ = ΒΠ : Ξξ· ὁ λόγος ἄρα ΒΠ : Ξξ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ξΘ : ΘΠ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΠ x ΠΘ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου Ξξ x ξΘ, καὶ ἀκόμη, μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου Υξ x ξΘ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΟΗ x ΗΘ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΠ x ΠΘ· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΟΗ x ΗΘ μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου Υξ x ξΘ· ὥστε ὁ λόγος ΟΗ : Υξ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ξΘ x ΘΗ. Ἀλλὰ ΟΗ : Υξ = ΗΤ : Τξ· θὰ εἶναι ἄρα ὁ λόγος ΗΤ : Τξ μικρότερος τοῦ λόγου ξΘ : ΘΗ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΗΘ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας Τξ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΗΘ τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· ἡ ἐλαχίστη ἄρα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Υ θ' ἀποκόψῃ μέρος μικρότερον τῆς εὐθείας ξΤ, καὶ τὸ τμῆμα τοῦ ἄξονος, τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, θὰ εἶναι μικρότερον τῆς εὐθείας ΔΤ. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΥΤ ἐλαχίστη εὐθεῖα· ἀλλὰ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Υ θ' ἀποκόψῃ ἐκ τοῦ ἄξονος μέρος μικρότερον τῆς εὐθείας ΔΤ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

45

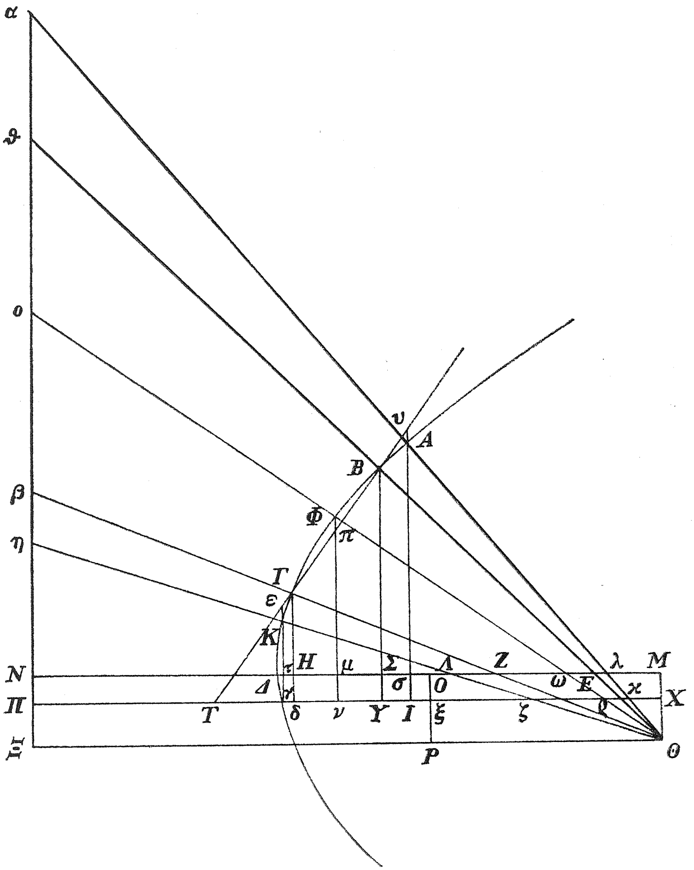
Ἐὰν τώρα ἡ τομὴ εἶναι ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις, ὡς ἡ ΑΒΓΔ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΜΔ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Ν, ἂς ἀχθῶσιν εἰς αὐτὴν δύο εὐθεῖαι ἐλάχισται, ὡς αἱ ΒΕ, ΓΖ καὶ ἐκ τοῦ σημείου συναντήσεως αὐτῶν τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΘΛΚ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ἀποκοπτομένη ἐκ ταύτης, μεταξὺ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος, δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Κ, ἀποκόπτει τμῆμα τοῦ ἄξονος μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΔΛ.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Θ, ἡ εὐθεῖα ΘΜ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Ν, ἡ εὐθεῖα ΝΞ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΘ. Ἔστω ΘΞ ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Θ, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΝΞ, μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὰς εὐθείας ΘΓ, ΘΒ· ἔστω, ὅτι συναντᾷ αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα β, θ. Καὶ ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΞΠ : ΠΝ = ΝΟ : ΟΜ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΟΡ, ΒΣ, ΓΗ, Κτ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα (χορδὴ) ΓΒ μέχρι τοῦ σημείου Τ, ὅπου συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΠΧ, ἀχθεῖσαν ἐκ τοῦ σημείου Π, παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα ΔΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΒΕ, ΓΖ εἶναι ἐλάχισται εὐθεῖαι, καὶ ἡ ΒΣ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἡ εὐθεῖα ΝΣ : ΣΕ =

πλαγία διάμετρος : παράμετρος (θ. 9 καὶ 10). Θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΝΟ : ΟΜ = ΝΣ : ΖΕ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἢ διὰ διαιρέσεως (Εὐκλ. 5, 17), εἰς τὴν ἔλλειψιν, θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΜΝ : ΝΟ = ΕΝ : ΝΣ· καὶ ἂν ἀφαιρεθῶσιν αἱ δύο μικρότεραι εὐθεῖαι ἀπὸ τὰς δύο μεγαλυτέρας θὰ εἶναι ΜΕ : ΟΣ = ΜΝ : ΝΟ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΟΣ = ξΥ, καὶ ἡ ΕΜ : ξΥ = ΜΝ : ΝΟ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΞΠ : ΠΝ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, θὰ εἶναι ΞΠ : ΠΝ = ΝΣ : ΣΕ· καὶ διὰ συνθέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 18) εἰς τὴν ὑπερβολὴν ἢ διὰ διαιρέσεως (τῶν λόγων) (Εὐκλ. 5, 17), εἰς τὴν ἔλλειψιν, ΞΝ : ΝΠ = ΝΕ : ΕΣ, τουτέστιν ὡς ἡ Νθ : ΒΣ, ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων, καὶ διὰ προσθέσεως τῶν ὅρων εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἢ δι' ἀφαιρέσεως τῶν μικροτέρων ὅρων ἀπὸ τοὺς μεγαλυτέρους εἰς τὴν ἔλλειψιν, θὰ εἶναι ἡ Ξθ : ΒΥ = ΝΕ : ΕΣ = ΞΝ : ΝΠ. Σύγκειται δὲ ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΞΝ x ΝΜ : ΠΝ x ΝΟ ἐκ τοῦ λόγου ΞΝ : ΝΠ καὶ τοῦ λόγου ΜΝ : ΝΟ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι ΞΝ : ΝΠ = Ξθ : ΒΥ, καὶ ὅτι ΜΝ : ΝΟ = ΕΜ : ξΥ· σύγκειται ἄρα ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΝΜ x ΜΘ : ὀρθογώνιον ΝΠ x Πξ ἐκ τοῦ λόγου Ξθ : ΒΥ καὶ τοῦ λόγου ΕΜ : ξΥ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΝΜ x ΜΘ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον Ξθ x ΕΜ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα Ξθ : ΘΞ = ΘΜ : ΜΕ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΝΠ x Πξ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΒΥ x Υξ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΝΠ x Πξ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον Γδ x δξ, καὶ ὅτι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΒΥ x Υξ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον Γδ x δξ. Εἶναι ἄρα ΒΥ : Γδ = δξ : ξΥ. Ἀλλὰ ΒΥ : Γδ = ΥΤ : Τδ· εἶναι ἄρα ΥΤ : Τδ = δξ : ξΥ, καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων

(Εὐκλ. 5, 17), εἶναι Υδ : δΤ = Υδ : ξΥ, ἐξ οὗ εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ξΥ = Τδ.

Εἶναι ἄρα φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα Υξ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς

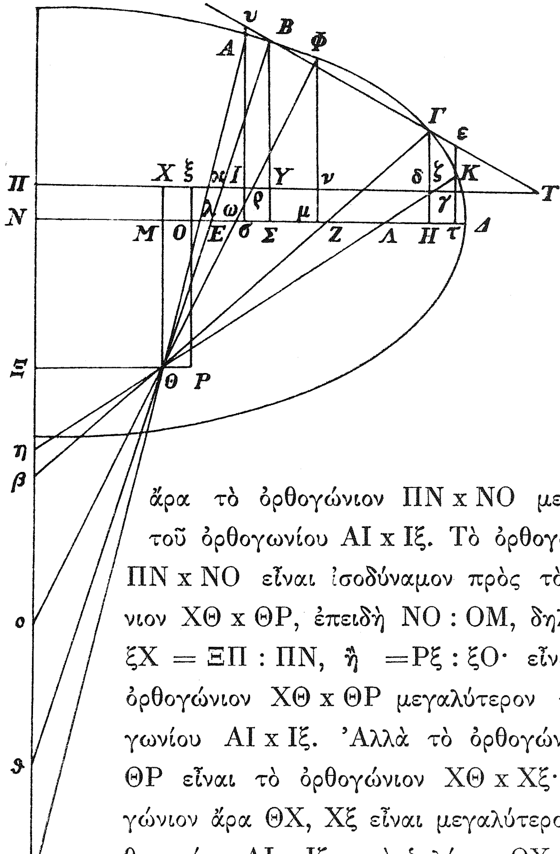


εὐθείας Τγ· ὁ λόγος ἄρα τῆς εὐθείας γΥ : Τγ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας γΥ : Υξ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ.

5, 18), ὁ λόγος ΥΤ : Τγ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου γξ : ξΥ. Ἀλλὰ ΥΤ : Τγ = ΒΥ : εγ· ὁ λόγος ἄρα ΒΥ : εγ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου γξ : ξΥ· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΒΥ x Υξ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου εγ x γξ, καὶ ἀκόμη μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου Κγ x γξ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΒΥ x Υξ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΝΠ x Πξ· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΝΠ x Πξ μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου Κγ x γξ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΝΠ x Πξ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΧΘ x ΘΡ, ἐπειδὴ ΝΟ : ΟΜ = ΘΧ : ΧΜ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΧΘ x ΘΡ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου Κγ x γξ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΧΘ x ΘΡ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΘΧ x Χξ· θὰ εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΘΧ x Ξξ, μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου Κγ x γξ, καὶ ὁ λόγος ΘΧ : Κγ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου γξ : ξΧ. Ἀλλὰ ΘΧ : Κγ = Χζ : ζγ· ὥστε ὁ λόγος Χζ : ζγ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου γξ : ξΧ, καὶ διὰ συνθέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 18) ὁ λόγος Χγ : ζγ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Χγ : ξΧ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ξΧ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ζγ, καὶ ὁ λόγος ΞΟ : ξΧ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΞΘ : ζγ. Θὰ εἶναι ἄρα ΞΘ : ζγ = Ξη : Κγ· ὁ λόγος ἄρα ΞΘ : Χξ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου Ξη : Κγ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΘΞ = ΜΝ, καὶ ἡ εὐθεῖα Ξξ = ΜΟ· ὁ λόγος ἄρα ΜΝ : ΜΟ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου Ξη : Κγ. Εἶναι δὲ ΜΝ : ΜΟ = ΞΝ : ΝΠ, ἐπειδὴ ἔχει γίνει ΝΟ : ΟΜ καὶ ΞΠ : ΠΝ, ἴσον πρὸς τὸν λόγον, πλαγία διάμετρος : παράμετρος· ὁ λόγος ἄρα ΞΝ : ΝΠ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου Ξη : Κγ, καὶ δι᾽ ἀφαιρέσεως τῶν δύο μικροτέρων εὐθειῶν ἀπὸ τὰς δύο μεγαλυτέρας, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὑπερβολῆς, ἤ, διὰ προσθέσεως τῶν εὐθειῶν εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλλείψεως, ὁ λόγος Νη : Κτ γίνεται μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΞΝ : ΝΠ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΝΠ = πρὸς τὴν εὐθεῖαν γτ. Εἶναι δὲ ἡ Νη : Κτ = ΝΛ : Λτ· ὥστε ὁ λόγος ΝΛ : Λτ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΞΝ [: ΝΠ, καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων, (Εὐκλ. 5, 17), εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἢ διὰ συνθέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 18), εἰς τὴν ἔλλειψιν, ὁ λόγος Ντ : τΛ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΞΠ] : ΠΝ, τουτέστι μεγαλύτερος τοῦ λόγου, πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Ἐὰν ἄρα γίνῃ, εὐθεῖα Ντ : ἄλλην εὐθεῖαν = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, ἡ ἄλλη αὐτὴ εὐθεῖα θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας Λτ· ὥστε ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Κ θὰ τμήσῃ τμῆμα τοῦ ἄξονος, πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Δ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΔΛ (θ. 9 . 10 . 25).

Ἐὰν τώρα ἀχθῇ εὐθεῖα ἄλλη, ὡς ἡ ΘλΑα, λέγω, ὅτι ἡ Αλ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α, θὰ τμήσῃ ἐκ τοῦ ἄξονος τμῆμα μεγαλύτερον τῆς εὐθείας Δλ.

Διότι, ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ εὐθεῖα Ασ, καὶ ἂς προεκβληθῇ αὕτη μέχρι τοῦ σημείου υ καὶ τοῦ σημείου Ι. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα Τδ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν Υξ, ἡ εὐθεῖα Τδ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ξΙ, ὁ λόγος δΙ : Ιξ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου δΙ : Τδ, καὶ διὰ συνθέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 18) ἢ διὰ διαιρέσεως (Εὐκλ. 5, 17), ὁ λόγος δξ : ξΙ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΙΤ : Τδ. Ἀλλὰ ΙΤ : Τδ = Ιυ : Γδ· ὥστε ὁ λόγος δξ : ξΙ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Ιυ : Γδ, καὶ ἀκόμη, μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΙΑ : Γδ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον Γδ x δξ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΙ x Ιξ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα Γδ x δξ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΠΝ x ΝΟ· εἶναι



ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΠΝ x ΝΟ μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΙ x Ιξ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΠΝ x ΝΟ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΧΘ x ΘΡ, ἐπειδὴ ΝΟ : ΟΜ, δηλαδὴ Πξ : ξΧ = ΞΠ : ΠΝ, ἢ =Ρξ : ξΟ· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΧΘ x ΘΡ μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΙ x Ιξ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΧΘ x ΘΡ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΧΘ x Χξ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΘΧ, Χξ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΙ x Ιξ, καὶ ὁ λόγος ΘΧ : ΑΙ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Ιξ : ξΧ. Ἀλλὰ ΘΧ : ΑΙ = Χϰ : ϰΙ· ὁ λόγος ἄρα Χϰ : ϰΙ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Ιξ : ξΧ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος ΙΧ : Χϰ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΙΧ : Ιξ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα Χκ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας Ιξ, καὶ ἂν εἰς ἑκάστην τούτων προστεθῇ ἡ εὐθεῖα ξκ, ἡ εὐθεῖα Χξ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας Ικ· ὥστε ὁ λόγος ΞΘ : Χξ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΞΘ : Ικ. Ἀλλὰ ΞΘ : Ικ = Ξα : ΑΙ· ὁ λόγος ἄρα Ξα : ΑΙ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΞΘ : Χξ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΞΘ = ΝΜ, καὶ ἡ εὐθεῖα Χξ = ΜΟ· ὁ λόγος ἄρα Ξα : ΑΙ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΝΜ : ΜΟ. Εἶναι δὲ ΝΜ : ΜΟ = ΞΝ : ΝΠ· καὶ δι' ἀφαιρέσεως τῶν δύο μικροτέρων εὐθειῶν ἀπὸ τὰς δύο μεγαλυτέρας, εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἢ διὰ προσθέσεως αὐτῶν εἰς τὴν ἔλλειψιν, ὁ λόγος αΝ : Ασ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΞΝ : ΝΠ. Ἀλλὰ αΝ : Ασ = Νλ : λσ· ὁ λόγος ἄρα Νλ : λσ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΞΝ : ΝΠ καὶ διὰ διαιρέσεως (τῶν λόγων) (Εὐκλ. 5, 17), εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἢ διὰ συνθέσεως εἰς τὴν ἔλλειψιν (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος Νσ : σλ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΞΠ : ΠΝ. Ἀλλὰ ΞΠ : ΠΝ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος· ἐὰν ἄρα γίνῃ Νσ : ἄλλη εὐθεῖα = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, ἡ ἄλλη αὐτὴ εὐθεῖα θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας σλ. Ἡ ἐλαχίστη ἄρα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Α θὰ τμήσῃ ἐκ τοῦ ἄξονος τμῆμα μεγαλύτερον τῆς εὐθείας Θλ, καὶ τοῦτο, συμφώνως πρὸς τὰ ἀποδειχθέντα εἰς τὰ θεωρήματα ἔνατον καὶ δέκατον τοῦ βιβλίου τούτου.

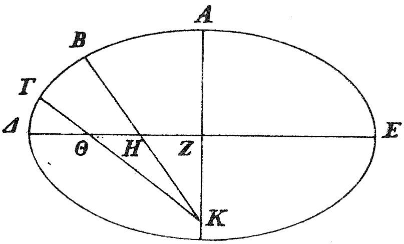
Ἐὰν τώρα ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα, ὡς ἡ ΘωΦο, εἰς τὸν τόπον τῶν ἐλαχίστων ΒΕ, ΓΖ, λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ωΦ δὲν εἶναι ἐκ τῶν ἐλαχίστων εὐθειῶν, καὶ ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Φ θ' ἀποκόψῃ ἐκ τοῦ ἄξονος τμῆμα μικρότερον τῆς εὐθείας Δω.

῞Ας ἀχθῆ ἡ εὐθεῖα Φμν κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. ᾿Επειδὴ λοιπόν, ὡς ἐδείχθη ἤδη, ἡ εὐθεῖα Τδ = εὐθεῖα Υξ, ἡ Τδ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας νξ, καὶ ὁ λόγος νδ : δΤ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου νδ : νξ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος νΤ : Τδ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου δξ : ξν. ᾿Αλλὰ νΤ : Τδ = πν : Γδ· ὁ λόγος ἄρα πν : Γδ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου δξ : ξν· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα πν x νξ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου Γδ x δξ. Πάντοτε δέ, ἡ εὐθεῖα Φν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας πν· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα Φν x νξ, θὰ εἶναι ἀκόμη, μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου Γδ x δξ. Εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον Γδ x δξ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΝΠ x Πξ, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΧΘ x ΘΡ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα Φν x νξ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΧΘ x ΘΡ. ᾿Αλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΧΘ x ΘΡ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΘΧ x Χξ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα Φν x νξ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΘΧ x Χξ, καὶ ὁ λόγος Φν : ΘΧ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Χξ : ξν. Εἶναι ἄρα Φν : ΘΧ = νρ : ρΧ· ὁ λόγος ἄρα νρ : ρΧ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Χξ : ξν, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος νΧ : Χξ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου νΧ : νρ· εἶναι ἄρα φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα Χξ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας νρ, καὶ ὁ λόγος ΞΘ : Χξ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΞΘ : νρ. ᾿Αλλὰ ΞΘ : νρ = Ξο : Φν· ὁ λόγος ΞΘ : Χξ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Ξο : Φν. ᾿Επειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΞΘ = εὐθεῖα ΜΝ, καὶ ἡ Χξ = τὴν ΜΟ, ὁ λόγος ΜΝ : ΜΟ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Ξο : Φν· καὶ ἐπειδὴ ΜΝ : ΜΟ = ΞΝ : ΝΠ, ὁ λόγος ΞΝ : ΝΠ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Ξο : Φν. Δι᾿ ἀφαιρέσεως ἄρα τῶν δύο μικροτέρων εὐθειῶν ἀπὸ τὰς δύο μεγαλυτέρας εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἢ διὰ προσθέσεως τούτων εἰς τὴν ἔλλειψιν, ὁ λόγος ΞΝ : ΝΠ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου οΝ : Φμ. Ἀλλὰ οΝ : Φμ = Νω : ωμ· ὁ λόγος ἄρα ΞΝ : ΝΠ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Νω : ωμ, καὶ διὰ διαιρέσεως (τῶν λόγων) (Εὐκλ. 5, 17), εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἢ διὰ συνθέσεως τούτων (Εὐκλ. 5, 18), εἰς τὴν ἔλλειψιν, ὁ λόγος ΞΠ : ΠΝ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Νμ : μω. Εἶναι ἄρα ΞΠ : ΠΝ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος· ὥστε θὰ εἶναι ὁ τελευταῖος οὗτος λόγος μεγαλύτερος τοῦ λόγου Νμ : μω. Ἐὰν τώρα κάμωμεν Νμ : ἄλλη τις εὐθεῖα = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, ἡ ἄλλη αὐτὴ εὐθεῖα θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας μω, καὶ ἄρα ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Φ θὰ ἀποκόπτῃ ἐκ τοῦ ἄξονος τμῆμα μικρότερον τῆς εὐθείας Δω (θ. 9 καὶ 10). Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ Φω δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 25)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

46

Ἐὰν εἰς ἓν τεταρτημόριον ἐλλείψεως ἀχθῶσι δύο ἐλάχισται εὐθεῖαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἐὰν αὗται προεκβληθῶσι μέχρις ὅτου συναντηθῶσιν εἴς τι σημεῖον, ἐκ τοῦ σημείου τούτου δὲν ἄγεται εἰς τὸ αὐτὸ τεταρτημόριον τῆς ἐλλείψεως, ἄλλη εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστην εὐθεῖαν, καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου τούτου, οἱαιδήποτε εὐθεῖαι ἀναχωρῶσι πρὸς τὴν τομήν, μεταξὺ ἐλαχίστης εὐθείας καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ μεγάλου ἄξονος, αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν τούτων πρὸς τὸν ἄξονα, ἀποκόπτουσι τμήματα τοῦ ἄξονος, πρὸς τὴν κορυφήν, μεγαλύτερα τῶν τμημάτων τοῦ ἄξονος τῶν ἀποκοπτομένων ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀχθεισῶν ἐκ τοῦ σημείου.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, μέγας ἄξων αὐτῆς ἡ ΔΕ, καὶ κέντρον τὸ Ζ. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα ἡ εὐθεῖα ΖΑ καὶ ἂς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου Κ, ὅπου συναντᾶται μὲ τὴν προέκτασιν τῆς ἐλαχίστης ΒΗ, τὴν ἐλαχίστην εὐθεῖαν ΒΚ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα, ὡς ἡ ΚΘΓ. Λέγω, ὅτι ἡ ΘΓ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καί, ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Γ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΕ θ' ἀποκόψῃ ἐκ τοῦ ἄξονος μέρος μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΔΘ.



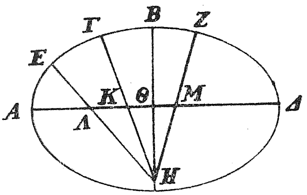
Διότι, ἐὰν ἡ ΓΘ ἦτο ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ προέκτασίς της θὰ συνήντα τὴν ἐλαχίστην εὐθεῖαν ΒΗ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΔΖΚ, συμφώνως πρὸς τὸ τεσσαρακοστὸν θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΓΘ δὲν συναντᾷ τὴν ἐλαχίστην εὐθεῖαν παρὰ εἰς τὸ σημεῖον Κ· δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΘΓ ἐλαχίστη εὐθεῖα. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Γ πρὸς τὸν ἄξονα ΔΕ, θ' ἀποκόψῃ ἐκ τοῦ ἄξονος τούτου τμῆμα μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΔΘ, ἐπειδὴ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Γ θὰ συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν ΒΗ, ἐπίσης ἐλαχίστην εὐθεῖαν, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΗΖΚ (θ. 40)· ἐξ οὗ εἶναι φανερόν, ὅτι θ' ἀποκόψῃ μέρος τοῦ ἄξονος μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΔΘ.

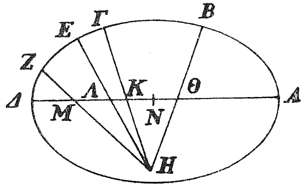
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

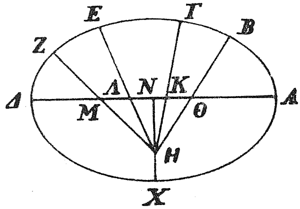
47

Τέσσαρες ἐλάχισται εὐθεῖαι ἀγόμεναι εἰς τὴν αὐτὴν ἡμιέλλειψιν καὶ τεμνόμεναι ὑπὸ τοῦ μεγάλου ἄξονος, δὲν συναντῶνται μεταξύ των εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓΔ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΔ. Λέγω, ὅτι, ἐὰν ἐκ τῆς τομῆς ΑΒΓΔ ἀχθῶσι πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα ΑΔ τέσσαρες ἐλάχισται εὐθεῖαι, αὗται δὲν συναντῶνται μεταξύ των εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.





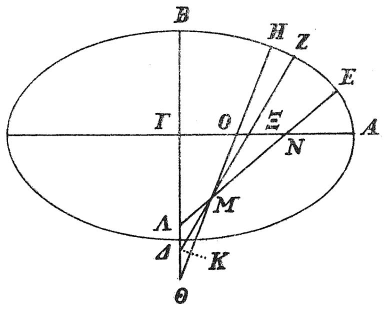


Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ⟨ἐλάχισται⟩ ΚΓ, ΛΕ, ΜΖ, ΘΒ, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται μεταξύ των εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Η. Ἐκ τῶν εὐθειῶν τούτων ἢ ἡ μία θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΔ, ἢ οὐδεμία θὰ εἶναι κάθετος. Ἔστω πρῶτον ἡ ΒΘ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΘ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΔ, τὸ σημεῖον Θ θὰ εἶναι κέντρον τῆς τομῆς (θ. 15). Ἔστω, ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ΚΓ συναντᾷ τὴν τελευταίαν ταύτην εὐθεῖαν εἰς τὸ σημεῖον Η, καὶ ἂς ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα ἡ ΕΗ· τὸ μέρος ἄρα ΕΛ τῆς εὐθείας ταύτης δὲν θὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 46). Ὑπετέθη ὅμως, ὅτι αὕτη εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα· ὅπερ ἄτοπον.

Ἔστω, ὅτι οὐδεμία τῶν εὐθειῶν ΒΘ, ΚΓ, ΛΕ, ΜΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΔ, καὶ τὸ κέντρον Ν εἶναι μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΒΘ, ΓΚ. Ἔστω, ὅτι ἄγονται πρὸς τὸν αὐτὸν ἡμιάξονα τῆς τομῆς τρεῖς εὐθεῖαι ἐλάχισται, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Εἶναι φανερόν, ὅτι αὐτὸ δὲν δύναται νὰ γίνῃ (θ. 45). Ἐὰν τώρα τὸ κέντρον Ν εὑρίσκηται μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΚΓ ΛΕ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΝΧ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΔ, καὶ τὸ σημεῖον συναντήσεως τῶν εὐθειῶν ΕΛ, ΖΜ, ἔστω ὅτι κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΔΝΧ (θ. 40). Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΘ, ΓΚ θὰ συναντηθῶσιν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΑΝΧ. Ὀφείλουσιν ἄρα αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι νὰ συναντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Η· ὅπερ ἄτοπον. Αἱ τέσσαρες ἄρα ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῆς τομῆς δὲν συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

48

Τρεῖς μέγισται εὐθεῖαι ἀγόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ τεταρτημόριον ἐλλείψεως δὲν συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ ΑΓ, καὶ μικρὸς ἄξων ἡ ΒΔ. Λέγω, ὅτι τρεῖς μέγισται εὐθεῖαι ἀγόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ τεταρτημόριον ΑΒΓ τῆς ἐλλείψεως, δὲν συναντῶνται μεταξύ των εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

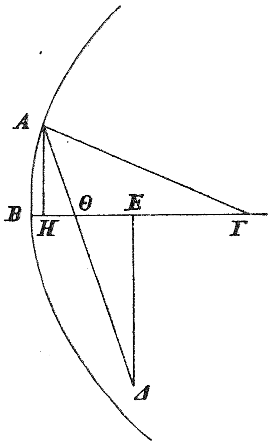
Διότι, ἂς ἀχθῶσιν, εἰ δυνατόν, αἱ εὐθεῖαι ΕΛ, ΖΚ, ΗΘ, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΕΛ, ΖΚ, ΗΘ εἶναι εὐθεῖαι μέγισται, αἱ εὐθεῖαι ΕΝ, ΖΞ, ΟΗ θὰ εἶναι τρεῖς εὐθεῖαι ἐλάχισται (θ. 23)· αἱ τρεῖς ἄρα ἐλάχισται εὐθεῖαι ἀγόμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ τεταρτημόριον τῆς τομῆς, πρέπει νὰ συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον· ὅπερ ἄτοπον (θ. 45 καὶ 46). Αἱ τρεῖς ἄρα μέγισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ τεταρτημόριον ΑΒΓ τῆς τομῆς δὲν δύνανται νὰ συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

49

Ἐὰν εἰς τομὴν κώνου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ἐκ σημείου τινός, τὸ ὁποῖον ν' ἀπέχῃ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἀπόστασιν οὐχὶ μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, καὶ ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς τῆς καθέτου ταύτης ἀχθῇ εὐθεῖα μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς, ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς τελευταίας ταύτης εὐθείας, δὲν θ' ἀποτελέσῃ μέρος ταύτης, ἀλλὰ θ' ἀποκόψῃ ἀπὸ τὸν ἄξονα μέρος προσκείμενον πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἐκείνου, τὸ ὁποῖον ἀποκόπτει ἡ ἀγομένη εὐθεῖα ἐκ τοῦ ληφθέντος σημείου.

Ἔστω πρῶτον, ὅτι ὁ ἄξων ΒΓ εἶναι ἄξων τῆς παραβολῆς ΑΒ, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΔ εἶναι κάθετος (ἐπὶ τὸν ἄξονα), οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΕΒ, ἡ ὁποία εἶναι τμῆμα τοῦ ἄξονος ἀποκοπτόμενον ὑπὸ τῆς καθέτου, νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Ἄς ληφθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ σημεῖόν τι Δ, κείμενον ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΘΑ. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΘ δὲν εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ⟨ἐπὶ τὸν ἄξονα⟩ ΑΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΕΒ δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, ἡ εὐθεῖα ΕΗ θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Ἄς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΗΓ = πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΓ. Ἡ ΑΓ θὰ εἶναι ἄρα ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 8)· ὥστε ἡ ΑΘ δὲν θὰ εἶναι ἐλαχίστη (θ. 24). Ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ ἐλαχίστη ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α ἀποκόπτει τμῆμα τοῦ ἄξονος μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΒΕ· κατὰ συνέπειαν πίπτει μακρύτερον τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς παρὰ ἡ εὐθεῖα ΑΘ.

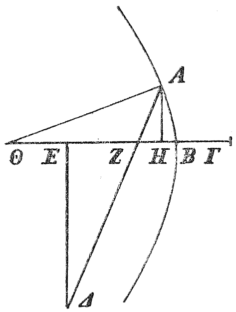


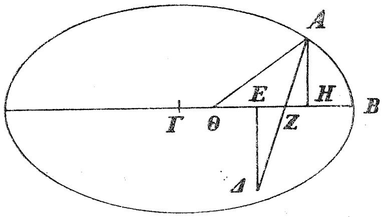
50

Ἔστω τώρα, ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ ΒΓ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Γ. Ἄς ἀχθῇ ἐπὶ τὸν ἄξονα κάθετος ἡ ΔΕ, οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΒΕ νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, καὶ ἂς ληφθῇ ἐκ σημείου τινὸς Δ, κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ, εὐθεῖά τις ὡς ἡ ΔΖΑ. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΖ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α, θ' ἀποκόψῃ ἐκ τοῦ ἄξονος μέρος μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΒΖ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλλείψεως, πρέπει ἡ κάθετος νὰ πίπτῃ ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἄξονος, καὶ ἡ ἀγομένη εὐθεῖα νὰ συναντᾷ τὸ αὐτὸ μέσον τοῦ ἄξονος ἐπὶ τοῦ ὁποίου πίπτει ἡ κάθετος.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΑΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα





ΒΕ δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΒ εἶναι ἡ πλαγία διάμετρος, ὁ λόγος, πλαγία διάμετρος : παράμετρος, δὲν θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΓΒ : ΒΕ. Ἀλλὰ ὁ λόγος ΓΗ : ΗΕ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΓΒ : ΒΕ· ὁ λόγος ἄρα τῆς εὐθείας ΓΗ : ΗΕ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου, πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΗΓ : ΗΘ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, ὁπότε ἡ εὐθεῖα ΑΘ θὰ εἶναι ἐλαχίστη (θ. 9 διὰ τὴν ὑπερβολήν, καὶ 10 διὰ τὴν ἔλλειψιν). Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΖ δὲν εἶναι ἐλαχίστη (θ. 25)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

51

'Εὰν ἡ κάθετος περὶ ἧς ἐγένετο λόγος (θ. 40 καὶ 49) ἀποκόπτῃ τμῆμα τοῦ ἄξονος μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, λέγω, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ εὐθεῖά τις ἀναφορᾶς τοιαύτη, ὥστε, ἐὰν ἡ ἀπόστασις σημείου τινὸς ἀπὸ τοῦ ἄξονος, τουτέστιν τὸ μῆκος τῆς καθέτου, εἶναι μεγαλύτερον τῆς προσδιορισθείσης εὐθείας, οὐδεμία εὐθεῖα ἄγεται ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς καθέτου πρὸς τὴν τομήν, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων τέμνει ἐλαχίστην εὐθεῖαν, ἡ δὲ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ ἄκρου πάσης εὐθείας, ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὴν τομήν, θὰ ἀποκόψῃ ἐκ τοῦ ἄξονος τμῆμα, πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, μεγαλύτερον ἐκείνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀποκοπῇ ὑπὸ τῆς εὐθείας τῆς ἀχθείσης ἐκ τοῦ σημείου· καὶ ἐὰν ἡ κάθετος εἶναι ἴση πρὸς τὴν προσδιορισθεῖσαν εὐθεῖαν, λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς καθέτου ἄγεται μία καὶ μόνη εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας δύναται ν' ἀποκοπῇ μία εὐθεῖα ἐλαχίστη, αἱ δὲ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων ὅλων τῶν ἄλλων εὐθειῶν τῶν ἀναχωρουσῶν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, θ' ἀποκόψωσι τμήματα προσκείμενα πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ ἄξονος, μεγαλύτερα ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀπεκόπησαν ὑπὸ τῶν εὐθειῶν, τῶν ἀχθεισῶν ἐκ τοῦ σημείου· ἐὰν δὲ ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα τῆς προσδιορισθείσης εὐθείας, λέγω, ὅτι μόνον δύο εὐθεῖαι ἄγονται ἐπὶ τῶν ὁποίων ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστας εὐθείας, καὶ ὅτι αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀχθεισῶν ἐκ τοῦ σημείου, καὶ κείμεναι μεταξὺ τῶν ἐλαχίστων εὐθειῶν, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν, θ' ἀποκόψωσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τμήματα πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, μικρότερα ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀπεκόπησαν ὑπὸ τῶν ἐκ τοῦ σημείου ἀχθεισῶν εὐθειῶν, αἱ δὲ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν ἄλλων ἀχθεισῶν ἐκ τοῦ σημείου εὐθειῶν, μὴ κειμένων εἰς τὸν τόπον τῶν δύο λεχθεισῶν ἐλαχίστων εὐθειῶν, θ' ἀποκόψωσι μέρη τοῦ ἄξονος μεγαλύτερα ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀπεκόπησαν ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀχθεισῶν ἐκ τοῦ σημείου. Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις τῆς ἐλλείψεως, ἡ κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα.

Ἔστω πρῶτον ἡ τομή, παραβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἐπὶ τοῦ ἄξονος δὲ αὐτῆς τοῦ ΓΖ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΕΖ, οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα ΓΖ τοῦ ἄξονος νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Λέγω, ὅτι, ἐὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ ληφθῶσι σημεῖά τινα, ἐξ ὧν νὰ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν τομήν, ἰσχύουσιν ὅλαι αἱ προτάσεις περὶ ὧν ἐγένετο λόγος ἐνταῦθα.

Ἐπειδὴ ἡ ΓΖ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, ἔστω ἡ εὐθεῖα ΖΗ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΗ κατὰ τὸ σημεῖον Θ, οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα ΘΗ νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ τμήματος ΘΓ, ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ κάθετος ΘΒ, καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις Κ : εὐθεῖα ΘΒ = ΘΗ : ΗΖ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι Ε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ, οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΖΕ νὰ εἶναι κατὰ πρῶτον μεγαλυτέρα τῆς Κ. Λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ε δὲν ἄγεται εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστην εὐθεῖαν, καὶ ἐὰν ἀχθῇ εὐθεῖα, ὡς ἡ ΕΛΒ, λέγω, ὅτι ἡ ΒΛ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα.

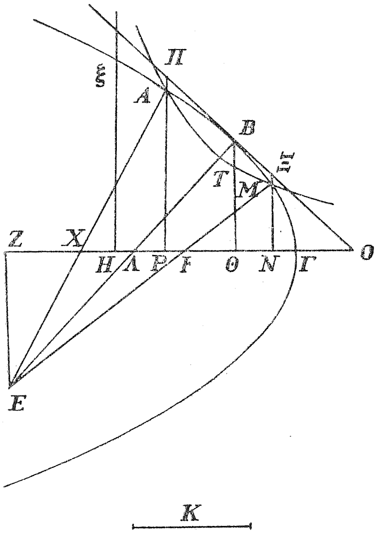
Διότι, ἡ εὐθεῖα Κ : ΘΒ = ΘΗ : ΗΖ, καὶ εἶναι ἡ Κ μικροτέρα τῆς ΖΕ· ὁ λόγος ἄρα ΖΕ : ΒΘ, τουτέστιν ὁ λόγος ΖΛ : ΛΘ, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΘΗ : ΗΖ, καὶ διὰ συνθέσεως

(Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος ΖΘ : ΘΛ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΘΖ : ΖΗ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΖΗ, ἡ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΘΛ, καὶ ἡ ΘΛ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Ἡ ἐλαχίστη ἄρα εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Β θὰ πέσῃ πλησιέστερον πρὸς τὸ σημεῖον Ζ (θ. 8), καὶ διὰ τοῦτο, ἡ ΒΛ δὲν θὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα, ὡς ἡ ΕΙΜ, λέγω ἀκόμη, ὅτι ἡ ΙΜ δὲν θὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Β, ἡ εὐθεῖα ΒΟ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς καὶ ἡ ΜΝ κάθετος, ἥτις ἂς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου Ξ. Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ παραβολῆς, ἡ εὐθεῖα ΓΟ = ΓΘ (1, 35)· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΘΟ = 2ΘΓ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΘΗ = 2ΘΓ· ἑπομένως εἶναι ἡ εὐθεῖα ΘΟ = ΘΗ. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΘΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΟΝ, καὶ ὅτι ὁ λόγος ΘΝ : ΝΟ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΝΘ : ΘΗ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος ΘΟ : ΟΝ, τουτέστιν ὁ λόγος ΒΘ : ΝΞ, θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΝΗ : ΗΘ· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΒΘ x ΘΗ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΞΝ x ΝΗ, καὶ ἄρα μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΜΝ x ΝΗ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΕΖ x ΖΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΘ x ΘΗ, ἐπειδὴ ὁ λόγος ΕΖ : ΒΘ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΘΗ : ΖΗ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΕΖ x ΖΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΜΝ x ΝΗ. Ἑπομένως, ὁ λόγος ΖΕ : ΜΝ, τουτέστιν ὁ λόγος ΖΙ : ΙΝ, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΝΗ : ΗΖ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος ΖΝ : ΝΙ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΝΖ : ΖΗ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΗΖ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΝΙ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΗΖ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΝΙ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, καὶ συνεπῶς ἡ ΜΙ δὲν εἶναι ἐκ τῶν ἐλαχίστων εὐθειῶν· ἀλλὰ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Μ πρὸς τὸν ἄξονα θὰ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ σημεῖον Ζ (θ. 8).

Ἐὰν τώρα ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα, ὡς ἡ ΑΧΕ, λέγω, ὅτι ἡ ΑΧ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα.



Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΑΡ, καὶ ἂς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου Π. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΘΟ = ΘΗ, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, ἔπεται ὅτι ἡ ΘΟ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΡΗ· ὥστε ὁ λόγος ΡΘ : ΘΟ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΡΘ : ΡΗ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος ΡΟ : ΟΘ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΘΗ : ΡΗ. Εἶναι ἄρα ΡΟ : ΟΘ = ΡΠ : ΒΘ· ὁ λόγος ἄρα ΡΠ : ΒΘ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΘΗ : ΡΗ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΡΠ x ΡΗ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΘ x ΘΗ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΡ x ΡΗ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΘ x ΘΗ. Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΘ x ΘΗ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΑΡ x ΡΗ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖ x ΖΗ. Ὁ λόγος ἄρα ΑΡ : ΕΖ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΖΗ : ΗΡ. Ἀλλὰ ΑΡ : ΕΖ = ΡΧ : ΧΖ· ὁ λόγος ἄρα ΡΧ : ΧΖ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΖΗ : ΗΡ, καὶ δι' ἀναστροφῆς (Εὐκλ. 5, 19 πόρισμα), ὁ λόγος ΖΧ : ΧΡ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΡΗ : ΗΖ, ἐπειδὴ διὰ συνθέσεως, ὁ λόγος ΖΡ : ΡΧ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΡΖ : ΖΗ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΡΧ. Ἀλλὰ ἡ ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΡΧ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΑΧ ἐλαχίστη εὐθεῖα· ἀλλὰ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α θὰ πέσῃ πλησιέστερον πρὸς τὸ σημεῖον Ζ (θ. 8 καὶ 24). Συνεπῶς, ὅταν ἡ κάθετος ΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας Κ, δὲν δύναται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομὴν οὐδεμία εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστην εὐθεῖαν.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Κ, λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ε ἄγεται μόνον μία εὐθεῖα πρὸς τὴν τομὴν ἐπὶ τῆς ὁποίας μεγίστη τις εὐθεῖα ἀποκόπτεται, καὶ ὅτι αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν ἄλλων εὐθειῶν, τῶν ἀχθεισῶν ἐκ τοῦ σημείου Ε, κεῖνται μακρύτερον τῆς κορυφῆς Γ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΘΗ : ΗΖ εἶναι ὡς ἡ Κ ἢ ἡ ΕΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν, εἶναι πρὸς τὴν ΒΘ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΖΛ : ΛΘ = πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον, θὰ εἶναι ΘΗ : ΗΖ = ΖΛ : ΛΘ· συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ΖΗ = ΛΘ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· ὅθεν ἡ εὐθεῖα ΛΘ εἶναι ἐπίσης ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἡ ΛΒ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη. Λέγω ἀκόμη, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ε δὲν ἄγεται ἄλλη εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ν' ἀποκόπτῃ ἐλαχίστην εὐθεῖαν.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα, ὡς ἡ ΜΕ, καὶ ἔστω ΜΝ ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ σημείου Ξ, καὶ ἡ ΒΟ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, καὶ ἂς γίνῃ, ὡς προηγουμένως, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΒΘ x ΘΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΗ, νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΜΝ x ΝΗ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ὡς πρότερον, ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΗ, ἡ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΙΝ, καὶ ὅτι ἡ ΙΜ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἀλλ' ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Μ, θὰ πέσῃ πρὸς τὸ μέρος τοῦ σημείου Ζ. Ὡσαύτως, ἐὰν ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα, ὡς ἡ ΑΧΕ, ἡ εὐθεῖα ΑΧ δὲν θὰ εἶναι ἐλαχίστη· ἀλλὰ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α, θὰ πέσῃ ἐπίσης πρὸς τὸ μέρος τοῦ σημείου Ζ. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΑΡ, καὶ προεκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου Π, ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΡ x ΡΗ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΘ x ΘΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΗ· ἐξ οὗ συνάγεται, ὡς καὶ πρότερον, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΧΡ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΗΖ, τουτέστι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Ἡ ΑΧ ἄρα δὲν θὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα· ἀλλὰ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α θὰ πέσῃ πρὸς τὸ μέρος τοῦ σημείου Ζ.

Ἔστω τώρα, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας Κ. Λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ε δύνανται ν' ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, ἐπὶ τῶν ὁποίων ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστας εὐθείας, καὶ ὅτι, ἐὰν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἐλάχισται ἐκ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν τῶν κειμένων εἰς τὸν τόπον τῶν δύο τελευταίων τούτων εὐθειῶν, αὗται ἀποκόπτουσι τμήματα τοῦ ἄξονος μικρότερα τῶν ἀποκοπτομένων ὑπὸ τῶν ἐκ τοῦ σημείου Ε ἀγομένων εὐθειῶν, καὶ ὅτι ἄλλαι ἐξωτερικαὶ εὐθεῖαι θ' ἀποκόπτωσι τμήματα τοῦ ἄξονος μεγαλυτέρα τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα θ' ἀποκόπτωνται ὑπὸ τῶν ἐλαχίστων εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν τούτων πρὸς τὸν ἄξονα.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΖΕ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας Κ, ὁ λόγος ΕΖ : ΘΒ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου Κ : ΘΒ, τουτέστι μικρότερος τοῦ λόγου ΘΗ : ΗΖ· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΗ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΘ x ΘΗ. Ἂς γίνῃ, τὸ ὀρθογώνιον ΤΘ x ΘΗ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΗ· ἔστω δὲ ἡ ξΗ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΖΗ, καὶ ἂς γραφῇ διὰ τοῦ σημείου Τ, ὑπὸ τὰς ἀσυμπτώτους ξΗ, ΗΓ, ὑπερβολὴ συναντῶσα τὴν παραβολὴν εἰς τὰ σημεῖα Α, Μ (2, 4). Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΕΑ, ΕΜ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΑΡ, ΜΝ. Ἐπειδὴ λοιπόν, ἡ τομὴ ΑΤΜ εἶναι ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἀσύμπτωτοι εἶναι αἱ ξΗ, ΗΓ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΡ, ΜΝ, ΤΘ κάθετοι, ἕπεται ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΜΝ x ΝΗ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΤΘ x ΘΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΗ (2, 12). Θὰ εἶναι ἄρα ΜΝ : ΕΖ = ΖΗ : ΗΝ. Ἀλλὰ ΜΝ : ΕΖ = ΝΙ : ΙΖ· εἶναι ἄρα ΖΗ : ΗΝ = ΝΙ : ΙΖ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18) εἶναι ΖΝ : ΗΖ = ΝΖ : ΝΙ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΝΙ = ΖΗ, τουτέστι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· εἶναι ἄρα ἡ ΜΙ εὐθεῖα ἐλαχίστη (θ. 8). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ΑΧ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα· εἶναι ἄρα αἱ ΜΙ, ΑΧ δύο εὐθεῖαι ἐλάχισται, αἱ ὁποῖαι τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἔτι δὲ ἐὰν ἀχθῇ πρὸς τὴν τομὴν ἐκ τοῦ σημείου Ε ἄλλη τις εὐθεῖα εἰς τὸν τόπον τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΕΜ, καὶ ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς εὐθείας ταύτης ἀχθῇ ἐλαχίστη εὐθεῖα, αὕτη θὰ πέσῃ πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, καὶ ἐὰν ἀχθῇ εὐθεῖα εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΕΜ, ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ πρὸς ταύτην θὰ πέσῃ μακρύτερον τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς. Πάντα ταῦτα, ἐξ ἄλλου, ἀποδεικνύονται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τεσσαρακοστοῦ τετάρτου θεωρήματος τοῦ βιβλίου τούτου.

52

Ὑπολείπεται, ἐὰν ἡ τομὴ ΑΒΓ εἶναι ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἔχουσα ἄξονα τὴν εὐθεῖαν ΕΓΔ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΖΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΕΓ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, λέγω, ὅτι τὰ λεχθέντα προηγουμένως διὰ τὴν παραβολὴν ἰσχύουσι τὰ αὐτὰ καὶ εἰς τὰς τομὰς ταύτας.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΔΓ εἶναι ἡ πλαγία ἡμιδιάμετρος, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΕ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΔΓ : ΓΕ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου πλαγία διάμετρος: παράμετρος. Ἐὰν λοιπὸν γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΔΗ : ΗΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, τὸ σημεῖον Η θὰ πέσῃ μεταξὺ τῶν σημείων Γ καὶ Ε. Ἂς εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΘ : ΔΚ μέσαι ἀνάλογοι μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΔΗ, ΔΓ· ἔστω ἡ εὐθεῖα ΚΒ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα Λ : ΚΒ = πρὸς τὸν συγκείμενον λόγον (ΔΕ : ΕΗ) x (ΗΚ : ΚΔ).

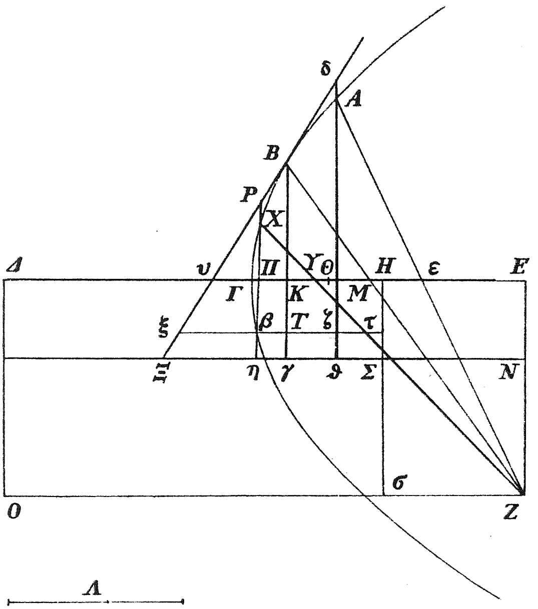
Ἔστω πρῶτον ἡ εὐθεῖα ΕΖ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας Λ (δηλ.

τῆς εὐθείας ἀναφορᾶς εἰς τὸ θ. 51). Λέγω, ὅτι εἶναι ἀδύνατον ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ἀποκόπτει εὐθεῖαν ἐλαχίστην, καὶ ὅτι αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι πρὸς τὴν τομήν, ἐκ τῶν ἄκρων οἱωνδήποτε εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ, θ' ἀποκόψωσιν ἐκ τοῦ ἄξονος τμήματα, καταλήγοντα πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, μεγαλύτερα τῶν τμημάτων τῶν ἀποκοπτομένων ὑπὸ τῶν ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἀγομένων εὐθειῶν.

Διότι, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΖΜΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΜ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα.

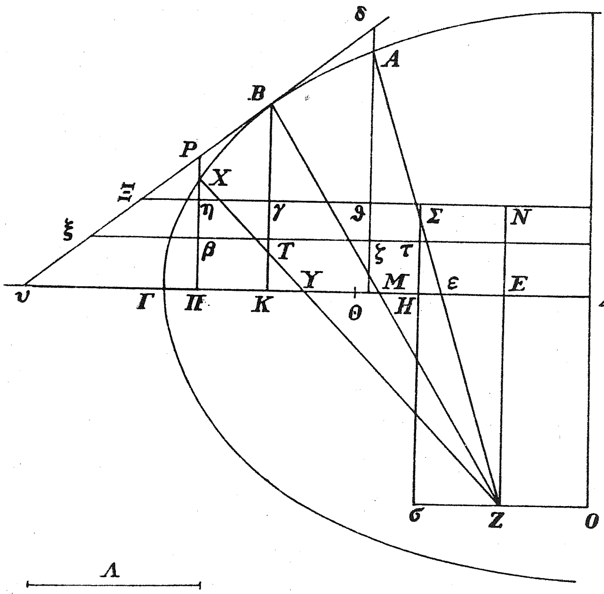
Ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΖΝ : ΝΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ ἂς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι αἱ ΖσΟ, ΝΣΞ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ΕΓΔ, καὶ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΗΣσ, ΔΟ παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας Λ, ὁ λόγος ΕΖ : ΚΒ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Λ : ΚΒ. Ὁ λόγος ἄρα ΕΖ : ΚΒ σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ΖΕ : ΕΝ καὶ ἐκ τοῦ λόγου Κγ : ΚΒ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα Κγ = πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΝ, [σημείωσις : ὁ λόγος α : β σύγκειται ἐκ τῶν λόγων γ : δ καὶ ε : ζ σημαίνει α : β = (γ : δ) x (ε : ζ)]· ὁ δὲ λόγος Λ : ΒΚ σύγκειται, ἐξ ὑποθέσεως, ἐκ τοῦ λόγου ΔΕ : ΕΗ καὶ τοῦ λόγου ΗΚ : ΚΔ· ὥστε ὁ λόγος ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν λόγων ΖΕ : ΕΝ καὶ Κγ : ΚΒ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου, τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν λόγων ΔΕ : ΕΗ καὶ ΗΚ : ΚΔ. Ἀλλὰ ΖΕ : ΕΝ = ΔΕ : ΕΗ, ἐπειδὴ εἶναι ἀντιστοίχως ΖΝ : ΝΕ καὶ ΔΗ : ΗΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος· ὁ λειπόμενος ἄρα λόγος Κγ : ΚΒ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΗΚ : ΚΔ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον Κγ x ΚΔ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΚΒ x

ΗΚ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα Κγ x ΚΔ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΔΚ x Κγ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΚΒ x ΗΚ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΔΚ x Κγ. Ἂς θεωρήσωμεν τὸ κοινὸν ὀρθογώνιον γΚΗ, τουτέστι τὸ ὀρθογώνιον Κγ x γΣ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον Βγ x γΣ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΔΗ x ΗΣ. Εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΔΣ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον σΝ, ἐπειδὴ ΖΝ : ΝΕ = ΔΗ : ΗΕ· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον Βγ x



γΣ μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου σΝ. Ἐδείχθη δὲ διὰ τοῦ τεσσαρακοστοῦ πέμπτου θεωρήματος, ὅτι τὸ πρῶτον τοῦτο ὀρθογώνιον ὀφείλει νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δεύτερον· ὥστε ἡ ΒΜ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα· ἀλλὰ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Β, θ' ἀποκόψῃ μέρος τοῦ ἄξονος, μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΓΜ.

'Εὰν τώρα ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα, ὡς ἡ ΖΥΧ, ἐντεῦθεν τοῦ σημείου Β, λέγω ἐπίσης, ὅτι ἡ ΧΥ δὲν εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη, καὶ ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Χ, θ' ἀποκόψῃ ἐκ τοῦ ἄξονος τμῆμα, μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΓΥ.



Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΞ, ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, καὶ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ εὐθεῖα ΧΠ, ἥτις ἂς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου Ρ. 'Επειδὴ λοιπὸν ὁ λόγος Κγ : ΚΒ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΗΚ : ΚΔ, ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΤΚ : ΚΒ =

$HK : K\Delta$, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου T, ἡ εὐθεῖα $\xi T\tau$ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα $E\Gamma\Delta$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $B\upsilon\xi\Xi$ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, καὶ ἡ BK εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα $\Delta\upsilon K$, τὸ ὀρθογώνιον $K\Delta \times \Delta\upsilon$ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\Delta\Gamma^2$ (1, 37). Εἶναι ἄρα $K\Delta : \Delta\Gamma = \Delta\Gamma : \Delta\upsilon$ καὶ ἡ εὐθεῖα $\Delta\upsilon$ εἶναι τρίτη ἀνάλογος μεταξὺ τῶν εὐθειῶν $K\Delta$, $\Delta\Gamma$ καὶ ἡ $K\Delta$ εἶναι τρίτη ἀνάλογος, μεταξὺ τῶν εὐθειῶν $H\Delta$, $\Delta\Theta$. Εἶναι δὲ $K\Delta : \Delta\Gamma = \Delta H : \Delta\Theta$· εἶναι ἄρα $H\Delta : \Delta K = \Delta K : \Delta\upsilon$, καὶ δι' ἀφαιρέσεως τῶν δύο μικροτέρων εὐθειῶν ἀπὸ τὰς δύο μεγαλυτέρας, ἡ ὑπόλοιπος εὐθεῖα HK : ὑπόλοιπον εὐθεῖαν $K\upsilon = H\Delta : \Delta K$. Ἀλλὰ $H\Delta : \Delta K = TB : BK$, ἐπειδὴ ἔχει γίνει $TK : KB = HK : K\Delta$· θὰ εἶναι ἄρα $HK : K\upsilon = TB : BK$. Εἶναι ἄρα $TB : BK = T\xi : K\upsilon = HK : K\upsilon$, ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα $HK = T\xi$. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα $HK = T\tau$· ἡ εὐθεῖα ἄρα $T\tau = T\xi$. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα $\xi\beta$ μικροτέρα τῆς $T\tau$, καὶ ὁ λόγος $T\beta : \beta\xi$ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $T\beta : T\tau$, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος $T\xi : \xi\beta$ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $\beta\tau : T\tau$. Ἀλλὰ $T\xi : \xi\beta = BT : P\beta$, καὶ ἄρα ὁ λόγος $TB : P\beta$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $\beta\tau : T\tau$. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $BT \times T\tau$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου $P\beta \times \beta\tau$, ὥστε καὶ μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου $X\beta \times \beta\tau$. Ἐπειδὴ δὲ $HK : K\Delta = TK : KB$, τὸ ὀρθογώνιον $HK \times KB$ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $K\Delta \times TK$, καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $TK \times KH$ εἶναι κοινόν, τὸ ὀρθογώνιον $BT \times T\tau$ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $\Delta H \times H\tau$. Εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $BT \times T\tau$ μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου $X\beta \times \beta\tau$, καὶ ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $\Delta H \times H\tau$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου $X\beta \times B\tau$. Ἐὰν δὲ εἰς τὴν ὑπερβολὴν θεωρήσωμεν τὸ ὀρθογώνιον βη x ηΣ ὡς κοινόν, τὸ ὀρθογώνιον Χη x ηΣ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὀρθογωνίων ΔΗ x Ητ + βη x ηΣ· εἰς δὲ τὴν ἔλλειψιν, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ ὀρθογώνιον βη x ηΣ, ἡ διαφορὰ τῶν ὀρθογωνίων ΔΗ x Ητ — βη x ηΣ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ὀρθογωνίου Χη x ηΣ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα Χη x ηΣ θὰ εἶναι κατὰ μείζονα λόγον μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΔΗ x ΗΣ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΔΗ x ΗΣ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΣΝ, ΝΖ, ἐπειδὴ ΖΝ : ΝΕ = ΔΗ : ΗΕ· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον Χη x ηΣ μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΣΝ x ΝΖ. Ἐδείχθη δὲ κατὰ τὸ τεσσαρακοστὸν πέμπτον θεώρημα, ὅτι τὸ πρῶτον τοῦτο ὀρθογώνιον ὀφείλει νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δεύτερον· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΧΥ δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Χ, θ' ἀποκόψῃ ἐπὶ τοῦ ἄξονος μέρος καταλῆγον εἰς τὴν κορυφὴν μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΓΥ.

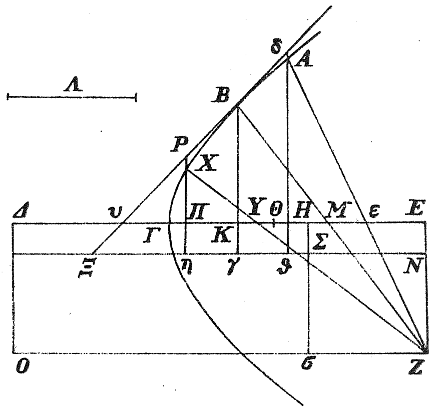
Ἐὰν ἀκόμη ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα, ὡς ἡ ΖεΑ, λέγω, ὅτι ἡ Αε δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α, ἀποκόπτει μέρος τοῦ ἄξονος μεγαλύτερον τῆς εὐθείας Γε.

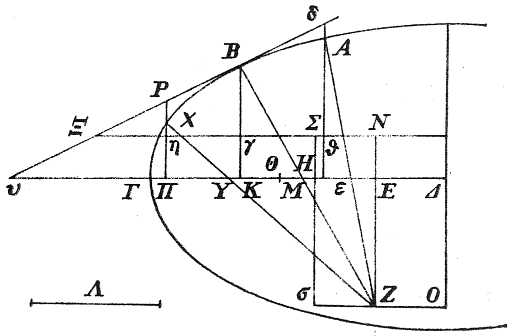
Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος Αθ, καὶ ἂς προεκβληθῇ αὕτη μέχρι τοῦ σημείου δ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι ἡ εὐθεῖα Ττ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Τξ, ὥστε ἡ εὐθεῖα τζ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας Τξ. Ὁ λόγος ἄρα Τζ : ζτ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ζΤ : Τξ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος Ττ : τζ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ζξ : Τξ. Ἀλλὰ ζξ : Τξ = δζ : ΒΤ· ὁ λόγος ἄρα Ττ : τζ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου δζ : ΒΤ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΤ x Ττ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου δζ x ζτ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς δὲ λόγους, ὡς πρὸ ὀλίγου, ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον Αθ x θΣ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΣΝ x ΝΖ, καὶ ὅτι ἡ Αε δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 45), ἀλλὰ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α, θ' ἀποκόψῃ μέρος ἐκ τοῦ ἄξονος μεγαλύτερον τῆς εὐθείας Γε.

Ἂς ληφθῇ τώρα ἡ κάθετος ΖΕ = εὐθεῖα Λ. Λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ζ μία μόνον εὐθεῖα ἄγεται, ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶναι δυνατὸν ν' ἀποκοπῇ ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ὅτι αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι, αἱ ἀναχωροῦσαι ἐκ τῶν ἄκρων ὅλων τῶν ἄλλων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, θ' ἀποκόψωσι, ἐπὶ τοῦ ἄξονος μέρη μεγαλύτερα ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀποκόπτονται παρὰ τῶν οὕτω ἀγομένων εὐθειῶν.

Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΚ, ὡς ἐξετέθη ἀνωτέρω, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΖΒ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΖΕ : ΒΚ = Λ : ΒΚ. Ὁ λόγος ἄρα ΖΕ : ΒΚ σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου (ΖΕ : ΕΝ) x ((Κγ = ΕΝ) : ΒΚ), καὶ ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὁ λόγος Λ : ΒΚ σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου (ΔΕ : ΕΗ) x (ΗΚ : ΚΔ)· ὁ λόγος ἄρα ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν λόγων (ΖΕ : ΕΝ) x (Κγ : ΚΒ) εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων (ΔΕ : ΕΗ) x (ΗΚ : ΚΔ). Ἀλλὰ ὁ λόγος ΖΕ : ΕΝ = πρὸς τὸν λόγον ΔΕ : ΕΗ· ὁ λόγος ἄρα Κγ : ΚΒ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον ΗΚ : ΚΔ, καὶ ἄρα, τὸ ὀρθογώνιον Κγ x ΚΔ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΚΒ x ΗΚ. Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν ὡς κοινὸν τὸ ὀρθογώνιον Κγ x ΚΗ, τὸ ἄθροισμα εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἢ ἡ διαφορὰ εἰς τὴν ἔλλειψιν, τουτέστι τὸ ὀρθογώνιον Βγ x γΣ, θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΗ x ΗΣ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΖΝ x ΝΣ· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον

ΖΝ x ΝΣ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον Βγ x γΣ (θ. 45). Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι τὰ πράγματα παρουσιάζονται ὅπως εἰς τὰς ἐλαχίστας εὐθείας· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΒΜ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα.





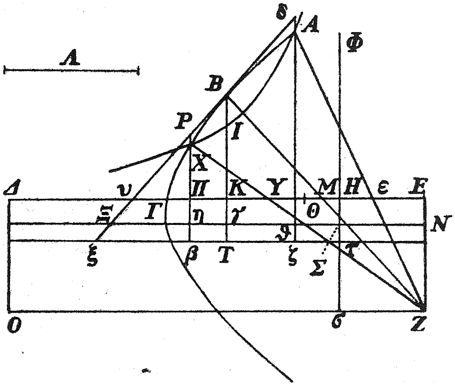
Λέγω τώρα, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ζ οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα ἄγεται ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστην εὐθεῖαν.

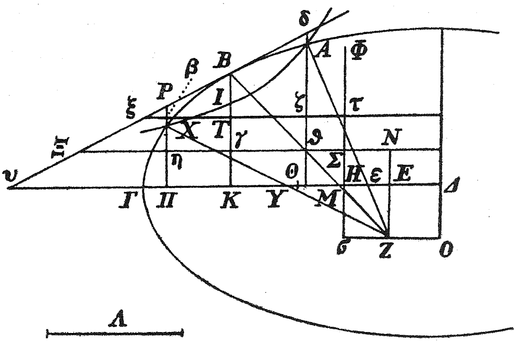
Διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα, ὡς ἡ ΖΥΧ, καὶ ἡ κάθετος ΧΠ, ἐπιτυγχάνεται, ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη, νὰ γίνῃ ἡ εὐθεῖα

$\gamma\Sigma$ = εὐθεῖα $\gamma\Xi$. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα $\Xi\eta$ εἶναι μικροτέρα τῆς $\gamma\Sigma$· ὁ λόγος ἄρα $\eta\gamma : \Xi\eta$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $\eta\gamma : \gamma\Sigma$, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος $\gamma\Xi : \Xi\eta$ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $\eta\Sigma : \Sigma\gamma$. Εἶναι ἄρα $\gamma\Xi : \Xi\eta = B\gamma : P\eta$· συνεπῶς, ὁ λόγος $B\gamma : P\eta$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $\eta\Sigma : \Sigma\gamma$· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $B\gamma \times \gamma\Sigma$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου $P\eta \times \eta\Sigma$, καὶ κατὰ μείζονα λόγον μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου $X\eta \times \eta\Sigma$. Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $B\gamma \times \gamma\Sigma$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $\Sigma N \times NZ$· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $X\eta \times \eta\Sigma$ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου $\Sigma N \times NZ$. Πρέπει ὅμως νὰ εἶναι ἴσον πρὸς αὐτὸ (θ. 45)· ἡ ΧΥ ἄρα δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Χ, θ' ἀποκόπτῃ ἀπὸ τοῦ ἄξονος τμῆμα πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΓΥ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ Αε δὲν εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 45), καὶ ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α, ἀποκόπτει ἐπὶ τοῦ ἄξονος μέρος μεγαλύτερον τῆς εὐθείας Γε.

Ἔστω τώρα, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΕ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας Λ. Λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ζ μόνον δύο εὐθεῖαι ἄγονται, ἐπὶ τῶν ὁποίων ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστας εὐθείας, καὶ ὅτι αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι, αἱ ἀγόμεναι ἐκ σημείων τῆς τομῆς κειμένων μεταξὺ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν, θ' ἀποκόπτωσι μέρη τοῦ ἄξονος μικρότερα ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀποκόπτονται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ, καὶ ὅτι αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων ἄλλων εὐθειῶν ἀχθεισῶν ἐκ τοῦ σημείου Ζ, πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν μέρος τῶν δύο προηγουμένων εὐθειῶν, θ' ἀποκόπτωσι μέρη τοῦ ἄξονος προσκείμενα πρὸς τὴν κορυφήν, μεγαλύτερα ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀποκόπτονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου, ὑπὸ τῶν οὕτως ἀγομένων εὐθειῶν.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ λόγος ΖΕ : ΒΚ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου



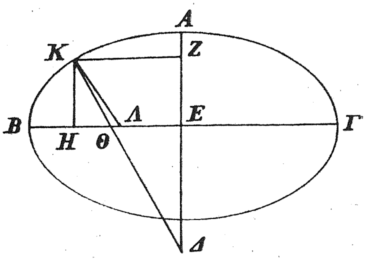


Λ : ΒΚ, δεικνύεται, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι ὁ λόγος Κγ : ΚΒ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΗΚ : ΚΔ, καὶ ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΣΝ x ΝΖ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου Βγ x γΣ. Ἄς γίνῃ τὸ ὀρθογώνιον γΙ x γΣ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΣΝ x ΝΖ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ι ἄς γραφῇ ὑπερβολὴ ὑπὸ τὰς ἀσυμπτώτους ΞΣ, ΣΗΦ, ὅπερ δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τὸ τέταρτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου. Ἔστω ἡ ὑπερβολὴ αὕτη ἡ ΑΙΧ. Ἐὰν δὲ ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι Αθ, Χη, τὰ ὀρθογώνια Αθ x θΣ καὶ Χη x ηΣ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα (ἕκαστον) πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΣΝ x ΝΖ, καὶ ἄρα εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ Αε, ΧΥ θὰ εἶναι δύο εὐθεῖαι ἐλάχισται, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι, θὰ συναντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι ἐὰν οὕτως εἶναι τὸ πρᾶγμα, καὶ ἐὰν ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα ἐκ τοῦ σημείου Ζ, δὲν δύναται ν' ἀποκοπῇ ἐλαχίστη εὐθεῖα. Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα, μεταξὺ τῶν εὐθειῶν Αε, ΧΥ, καὶ ἂν ἀχθῇ ἐκ τοῦ ἄκρου των εἰς τὸν ἄξονα, ἐλαχίστη εὐθεῖα, αὕτη θ' ἀποκόψῃ μέρος τοῦ ἄξονος, καταλῆγον εἰς τὴν κορυφήν, μικρότερον τοῦ τμήματος τοῦ ἀποκοπτομένου ὑπὸ τῆς εὐθείας τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Ζ, ἐνῷ θὰ συμβῇ τὸ ἀντίστροφον διὰ τὰς εὐθείας τὰς ἐλαχίστας, αἱ ὁποῖαι ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν ἄλλων ἀχθεισῶν εὐθειῶν, θ' ἀποκόψωσι μέρη τοῦ ἄξονος μεγαλύτερα. Ὅ,τι ἐλέχθη διὰ τὸν ἄξονα τῆς ἐλλείψεως ἰσχύει διὰ τὸν μεγάλον ἄξονα.

53

Ἐὰν ἐκτὸς τοῦ ἡμίσεος τῆς ἐλλείψεως διαιρεθείσης διὰ τοῦ μεγάλου ἄξονος ληφθῇ σημεῖόν τι, ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ ἀγομένη κάθετος πίπτει ἐπὶ τοῦ κέντρου, καὶ ἐὰν ὁ λόγος τῆς καθέτου ταύτης αὐξηθείσης κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ μικροῦ ἄξονος, πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μικροῦ ἄξονος δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς πλαγίας διαμέτρου πρὸς τὴν παράμετρον, ἐκ τοῦ σημείου τούτου οὐδεμία εὐθεῖα ἄγεται, τῆς ὁποίας τὸ μέρος τὸ ἀποκοπτόμενον μεταξὺ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς τομῆς νὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἀλλὰ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἀναχωροῦσα ἐκ τοῦ ἄκρου ἀχθείσης τινὸς εὐθείας, θὰ πέσῃ πρὸς τὸ μέρος τῆς τελευταίας αὐτῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς τοῦ μεγάλου ἄξονος.

Ἔστω ἡ ἡμιέλλειψις ΒΑΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐκτὸς τῆς ἡμιελλείψεως ταύτης σημεῖόν τι Δ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ νὰ πίπτῃ ἐπὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἔστω τοῦ Ε, καὶ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΔΑ : ΑΕ νὰ μὴ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Δ δὲν ἄγεται εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος ΒΓ, νὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη, καὶ ὅτι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀχθῇ εὐθεῖά τις ΔΚ, ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Κ θὰ πέσῃ πρὸς τὸ μέρος τοῦ σημείου Ε.



Ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΚΗ, ΚΖ, καὶ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΔΑ : ΑΕ νὰ μὴ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Ὁ λόγος ἄρα ΔΑ : ΑΕ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΔΖ : ΖΕ· ὁ λόγος ἄρα ΔΖ : ΖΕ, τουτέστιν ὁ λόγος ΕΗ : ΗΘ, θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Ἂς γίνῃ ΕΗ : ΗΛ = πλαγία διάμετρος :

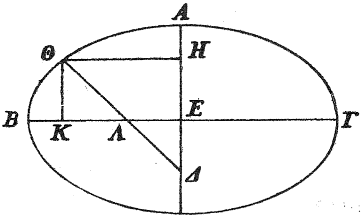
παράμετρος. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΚΛ θὰ εἶναι ἐλαχίστη (θ. 10)· ὥστε ἡ ΚΘ δὲν εἶναι ἐλαχίστη (θ. 25), ἀλλὰ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Κ πίπτει πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον Ε, παρὰ ἡ εὐθεῖα ΚΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

54

Ἐὰν ἐκτὸς τοῦ ἡμίσεος τῆς ἐλλείψεως, διαιρεθείσης εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ μεγάλου ἄξονος, ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ ἀγομένη κάθετος πίπτει ἐπὶ τοῦ κέντρου, καὶ ἐὰν ὁ λόγος τῆς καθέτου αὐτῆς αὐξηθείσης κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ μικροῦ ἄξονος, πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μικροῦ ἄξονος εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς πλαγίας διαμέτρου πρὸς τὴν παράμετρον, ἐκ τοῦ σημείου τούτου, πρὸς τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο τεταρτημόριον τῆς ἐλλείψεως, μία μόνον εὐθεῖα ἄγεται, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τοῦ μεγάλου ἄξονος καὶ τῆς τομῆς θὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη, οὐδεμία δὲ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἀποκόπτεται ὑπὸ εὐθείας τινὸς ἀγομένης πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, ἀλλὰ ἐὰν εὐθεῖά τις εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς εὐθείας ταύτης θὰ εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς, καὶ τοὐναντίον, ἐὰν ἡ ἀγομένη εὐθεῖα εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς, ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ ἄκρου της θὰ πέσῃ πλησιέστερον τῆς κορυφῆς.

Ἔστω ἡμιέλλειψις ἡ ΒΑΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΓ. Ἂς ληφθῇ ἐκτὸς τῆς ἡμιελλείψεως σημεῖόν τι Δ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ ἀγομένη κάθετος πίπτει ἐπὶ τοῦ κέντρου, ὡς ἡ

ΔΕ, ἡ ὁποία πίπτει ἐπὶ τοῦ κέντρου Ε τῆς τομῆς, σχηματίζουσα μετὰ τοῦ ἄξονος ΓΒ γωνίας ὀρθάς, καὶ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΔΑ: ΑΕ νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Λέγω, ὅτι πρὸς τὸ αὐτὸ τεταρτημόριον τῆς ἐλλείψεως, ἐκ τοῦ σημείου Δ, μία μόνον εὐθεῖα ἄγεται, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τῆς καμπύλης ΒΑΓ καὶ τοῦ ἄξονος ΒΓ, εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ διὰ τὰς ἄλλας εὐθείας, τὰς ἀγομένας ἐκ τοῦ σημείου Δ, ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν Β, ἀχθῶσιν αὐθεῖαι ἐλάχισται, αὗται θὰ πέσωσι μακρύτερον τοῦ σημείου Β, αἱ δὲ ἐλάχισται εὐθεῖαι, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν ἐκ τοῦ σημείου Δ ἀγομένων εὐθειῶν, καὶ εὑρισκομένων μακρύτερον τοῦ σημείου Β, θὰ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν τῶν τελευταίων τούτων.

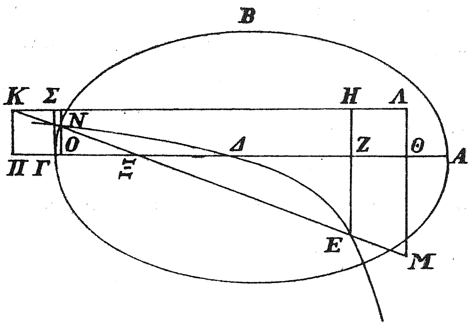


Διότι, ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΔΑ : ΑΕ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου πλαγία διάμετρος : παράμετρος, ἂς γίνῃ εὐθεῖα ΔΗ : ΗΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΗΘ, ΘΚ παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας ΒΓ, ΑΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΘΛΔ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΘΛ, μέρος ἀποτμηθὲν τῆς εὐθείας ΘΔ, εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα. Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΔΗ : ΗΕ = ΕΚ : ΚΛ, εἶναι ἄρα εὐθεῖα ΕΚ : ΚΛ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Ε εἶναι τὸ κέντρον τῆς τομῆς· εἶναι ἄρα ἡ ΘΛ εὐθεῖα ἐλαχίστη (θ. 10). Ἡ ἐλαχίστη δὲ αὔτη εὐθεῖα θὰ συναντήσῃ τὸν μικρὸν ἄξονα εἴς τι σημεῖον Δ, ὥστε ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Δ ἀναχωρήσῃ εὐθεῖά τις ἄλλη παρὰ ἡ ΔΘ, εὑρισκομένη μακρύτερον αὐτῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β, ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ὁποία θὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ ἄκρου της, θὰ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ σημεῖον Β παρὰ ἡ εὐθεῖα αὕτη· καὶ ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶναι ὀλιγώτερον μακρὰν τῆς κορυφῆς Β παρὰ ἡ εὐθεῖα ΔΘ, ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ ἄκρου της, θὰ συναντήσῃ τὸν μεγάλον ἄξονα εἰς σημεῖον κείμενον μακρύτερον τῆς κορυφῆς Β (θ. 46).

55

Ἐὰν ἐκτὸς τοῦ ἡμίσεος ἐλλείψεως, τμηθείσης εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ μεγάλου ἄξονος, ληφθῇ σημεῖόν τι, καὶ ἡ ἐξ αὐτοῦ ἀγομένη κάθετος δὲν πίπτῃ ἐπὶ τοῦ κέντρου, ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἄγεται εὐθεῖα συναντῶσα τὸ ἕτερον ἥμισυ τοῦ μεγάλου ἄξονος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δὲν πίπτει ἡ κάθετος, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ μεγάλου ἄξονος εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη, ἐκ τοῦ ἰδίου ὅμως σημείου δὲν ἄγεται ἄλλη εὐθεῖα, συναντῶσα τὸ ἄλλο ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἀποκόπτεται ἐλαχίστη εὐθεῖα.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, μέγας ἄξων ὁ ΑΓ, κέντρον αὐτῆς τὸ Δ, καὶ σημεῖόν τι δοθὲν τὸ Ε, ἐκ τοῦ ὁποίου ἄγεται ἡ εὐθεῖα ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΓ, καὶ τὸ κέντρον δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ σημείου Ζ. Λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ε εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ εὐθεῖα συναντῶσα τὴν εὐθεῖαν ΔΓ, ὥστε μεταξὺ τῆς τομῆς ΑΒΓ καὶ τοῦ ἡμιάξονος ΔΓ νὰ ἀποκόπτηται ἐλαχίστη τις εὐθεῖα. Ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΕΗ : ΗΖ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΘ : ΘΖ = πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄς ἀχθῇ δὲ διὰ τοῦ σημείου Η ἡ εὐθεῖα ΚΛ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Θ, ἡ εὐθεῖα ΜΘΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἂς γραφῇ ὑπερβολὴ ὑπὸ τὰς ἀσυμπτώτους ΜΛ, ΛΚ (2, 4). Ἔστω ΕΝ ἡ ὑπερβολὴ αὕτη, συναντῶσα τὴν ἔλλειψιν εἰς τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΝΞΕ. Λέγω, ὅτι ἡ ΝΞ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα.



Ἄς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΕΝ μέχρις ὅτου συναντήσῃ ἑκατέραν τῶν ἀσυμπτώτων ΜΛ, ΛΚ, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Μ, Κ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ αἱ κάθετοι ΝΟ, ΚΠ. Εἶναι λοιπόν, ἡ εὐθεῖα ΜΕ ἴση πρὸς τὴν ΚΝ (5, 3)· ὥστε ἡ ΖΘ = ΠΟ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΕΗ : ΗΖ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΠ : ΠΞ = ΕΗ : ΗΖ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΖΠ : ΠΞ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΔΘ : ΘΖ = εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, πλαγία διάμετρος : παράμετρος· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΠ : ΠΞ = ΔΘ : ΘΖ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΘΖ = εὐθεῖα ΠΟ, καὶ ἡ ΔΘ = ΠΟ+ΔΖ· ἐὰν λοιπὸν ἀφαιρεθῇ ἑκατέρα τῶν εὐθειῶν ΖΔ, ΠΟ ἀπὸ τῆς ΖΠ, καὶ ἡ ΠΟ ἀπὸ τῆς ΠΞ, ἡ ὑπόλοιπος εὐθεῖα ΔΟ θὰ εἶναι πρὸς τὴν ὑπόλοιπον εὐθεῖαν ΟΞ, ὡς ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα ΠΖ πρὸς ὁλόκληρον τὴν εὐθεῖαν ΠΞ, τουτέστιν ὡς ἡ πλαγία διάμετρος πρὸς τὴν παράμετρον. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΝΟ εἶναι μία κάθετος, καὶ τὸ σημεῖον Δ εἶναι τὸ κέντρον τῆς τομῆς· εἶναι ἄρα ἡ ΝΞ ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 10)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

56

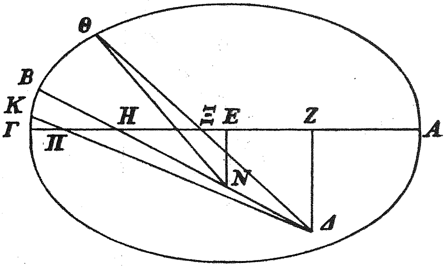
Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα ἐλέχθη, ὅτι ἡ ὑπερβολὴ θὰ συναντήσῃ τὴν ἔλλειψιν, ὅπερ ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΣ ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως εἰς τὴν κορυφὴν Γ (σχῆμα προηγ. θ.). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΘ : ΘΖ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ ὁ λόγος ΔΘ : ΘΖ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΓΘ : ΘΖ, ὁ λόγος ΓΘ : ΘΖ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου πλαγία διάμετρος : παράμετρος, τουτέστι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΗΕ : ΗΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ λόγος ΓΘ : ΘΖ [εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΗΕ : ΗΖ, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΓΘ x ΘΖ] θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΘΖ x ΗΕ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΗΖ = ΓΣ, καὶ ἡ ΖΘ = ΗΛ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΘΓ x ΓΖ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΕΗ x ΗΛ. Ἡ ὑπερβολικὴ τομὴ ἄρα διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Ε καὶ γεγραμμένη ὑπὸ τὰς ἀσυμπτώτους ΜΛ, ΛΣ, θὰ συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν ΓΣ (ἀντίστροφον τοῦ θ. 12 τοῦ 2ου βιβλίου). Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΓΣ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ΑΒΓ, καί, συνεπῶς, ἡ ὑπερβολὴ αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν ἡμιέλλειψιν ΑΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

57

Τούτου δειχθέντος μένει νὰ δειχθῇ τώρα, ὅτι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου συναντήσεως τοῦ αὐτοῦ τεταρτημορίου τῆς τομῆς, οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα ἄγεται ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστην εὐθεῖαν.

Ἔστω ἔλλειψις ἔχουσα μεγάλον ἄξονα τὸν ΓΑ, καὶ κέντρον τὸ Ε. Ἃς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΔΖ, ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Δ, κάτωθεν τοῦ ἄξονος, καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Δ ἃς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΗΒ, ἐπὶ τῆς ὁποίας, ἔστω, ὅτι ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστην εὐθεῖαν, τὴν ΗΒ, καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΚ, ΔΘ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Ε τῆς τομῆς, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΔ, ἡ ΕΝ συναντῶσα τὴν ΒΗΔ εἰς τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΝΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΗ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα συναντῶσα ἐλαχίστην εὐθεῖαν ἀγομένην ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Ν,



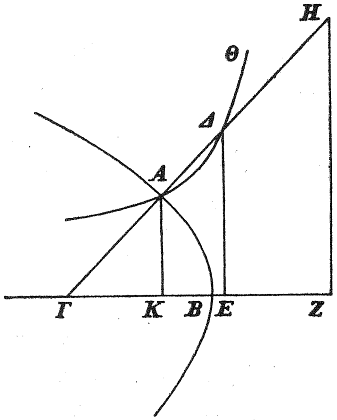
κείμενον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΗΖΔ, τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΝΘ, ἀποκοπτόμενον μεταξὺ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς τομῆς δὲν θὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη· ἀλλὰ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Θ θὰ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν Γ (θ. 46), καὶ ἄρα ἡ ΘΞ δὲν θὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη (θ. 25). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΠ δὲν εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη, καὶ ὅτι ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Κ, θὰ συναντήσῃ τὸν ἄξονα μακρύτερον τῆς κορυφῆς Γ, παρὰ ἡ εὐθεῖα ΚΠ.

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

58

Ἐκ δοθέντος σημείου εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας τομῆς τινος, μὴ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος, οὔτε ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ἄξονος, ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τούτου εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη.

Ἔστω πρῶτον, ὅτι ἡ τομὴ εἶναι παραβολή, ὡς ἡ ΑΒ, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΖ εἶναι ὁ ἄξων αὐτῆς προεκβεβλημένος, καὶ δοθὲν τὸ σημεῖον Δ, κείμενον εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς τομῆς καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἄξονος. Λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Δ ἄγεται εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μέρος τὸ ἀπολαμβανόμενον μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη.



Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΓΖ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΕΖ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΓ. Ἂς γραφῇ τώρα διὰ τοῦ σημείου Δ, ὑπὸ τὰς ἀσυμπτώτους ΗΖ, ΖΓ, ἡ ὑπερβολὴ ΑΔΘ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν παραβολὴν εἰς τὸ σημεῖον Α (2, 4), καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΑ, καὶ ἂς προεκβληθῇ αὕτη μέχρι τῶν σημείων Η, Γ.

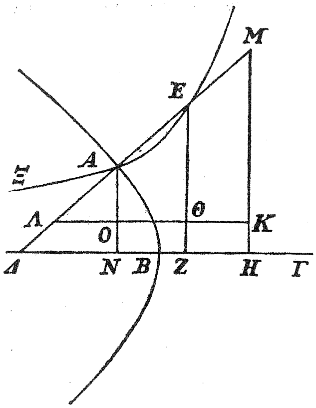
Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α ἡ ΑΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΗ = ΑΓ (2, 8), θὰ εἶναι ἐπίσης ἡ εὐθεῖα ΖΕ = ΚΓ. Ἀλλὰ ἡ ΖΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΚΓ = ἥμισυ παραμέτρου. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΚΑ εἶναι κάθετος, καὶ ἐπομένως ἡ ΑΓ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 8)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

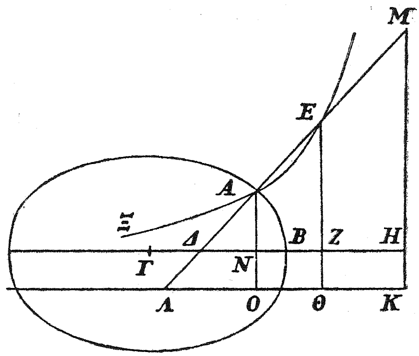
59

Ἐὰν ἡ τομὴ εἶναι ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις, ὡς ἡ ΑΒ, μὲ ἄξονα τὸν ΒΔ καὶ κέντρον τὸ Γ, καὶ ἐὰν δοθῇ τὸ σημεῖον Ε εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς τομῆς, μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος, οὔτε ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ἄξονος, καὶ ἐκ τοῦ σημείου ἀχθῇ ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΔ, ἂς ὑποτεθῇ πρῶτον, ὅτι ἡ κάθετος αὕτη δὲν πίπτει ἐπὶ τοῦ κέντρου. Λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ε εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀπολαμβανόμενον μέρος μεταξὺ τῆς τομῆς ΑΒ καὶ τοῦ ἄξονος ΒΔ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη.

Ἂς γίνῃ εὐθεῖα ΓΗ : ΗΖ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΗΜ, καὶ ἂς γίνῃ ἐπίσης εὐθεῖα ΕΘ : ΘΖ = πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον, πλαγία διάμετρος : παράμετρος· ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Θ ἡ ΚΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἂς γραφῇ διὰ τοῦ σημείου Ε, ὑπὸ τὰς ἀσυμπτώτους ΜΚ, ΚΛ, ὑπερβολὴ συναντῶσα (τέμνουσα) τὴν τομὴν ΑΒ (2, 4). Ἔστω ἡ ὑπερβολὴ αὕτη ἡ ΕΑΞ συναντῶσα τὴν τομὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Α, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΑ, καὶ ἂς προεκταθῇ αὕτη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη μέχρι τῶν σημείων Μ, Λ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΑΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΜΕ = ΑΛ (2, 8), θὰ εἶναι ἐπίσης ἡ ΚΘ = ΟΛ, καὶ ἐπομένως ἡ ΟΚ = ΘΑ = ΝΗ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΔ : ΘΛ, τουτέστι τὴν ΝΗ, = ΖΕ :

ΕΘ, τουτέστι = ΖΓ : ΓΗ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18) εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἢ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 17)

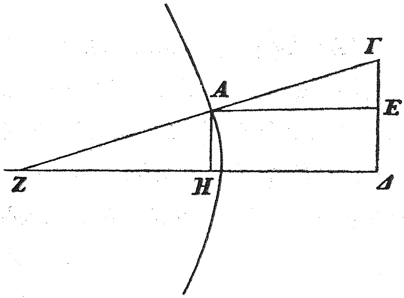




εἰς τὴν ἔλλειψιν, ἡ εὐθεῖα ΔΓ : ΓΝ = ΖΓ : ΓΗ· καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 19 πόρ.) εἰς τὴν ἔλλειψιν, ἢ διὰ διαιρέσεως (Εὐκλ. 5, 17) εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἡ εὐθεῖα ΓΝ : ΝΔ = ΓΗ : ΗΖ, τουτέστι = πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΝ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΔ, ὥστε ἡ ΑΔ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη (θ. 9 καὶ 10). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅταν ἡ κάθετος ΖΕ πίπτῃ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς Β.

60

Ἐάν, εἰς ὑπερβολήν, ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἔκ τινος σημείου Γ διδομένου ἐκτὸς τῆς τομῆς, πίπτῃ ἐπὶ τοῦ κέντρου, ὡς ἡ ΓΔ, καὶ γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΓΕ : ΕΔ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, ἀχθῇ δὲ παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα ΔΖ, ἡ εὐθεῖα ΑΕ καὶ προεκβληθῇ μέχρι συναντήσεως τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Α, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ ΓΑ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον Ζ, λέγω, ὅτι ἡ ΑΖ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα.

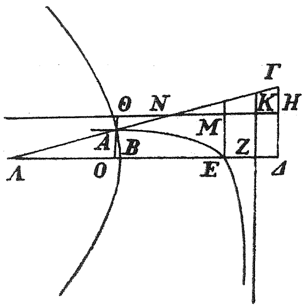


Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α, ἡ εὐθεῖα ΑΗ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΓΕ : ΕΔ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, θὰ εἶναι ΓΑ: ΑΖ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΔΗ : ΗΖ = ΓΑ : ΑΖ· εἶναι ἄρα ἡ ΔΗ : ΗΖ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα· εἶναι ἄρα ἡ ΑΖ ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 9)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

61

Πάντοτε δέ, ἐὰν ἡ ἀγομένη κάθετος ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου πίπτῃ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος, δηλ. πέραν τοῦ κέντρου τῆς ὑπερβολῆς, ὡς ἡ εὐθεῖα ΓΔ, ἔστω κέντρον τῆς ὑπερβολῆς τὸ Ε, καὶ ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΕΖ : ΖΔ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΗ : ΗΔ = πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον· ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΘ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα ΔΕ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΖΚ, ΕΜ παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΔ. Ἂς γραφῇ διὰ τοῦ σημείου Ε, ὑπὸ τὰς ἀσυμπτώτους ΘΚ, ΚΖ, ὑπερβολὴ (2, 4), ἡ ὁποία θὰ συναντήση τὴν τομὴν ΑΒ, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Α, καὶ ἔστω ΑΕ ἡ ὑπερβολὴ αὕτη. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΑ, καὶ ἂς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου Λ. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΛ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα.

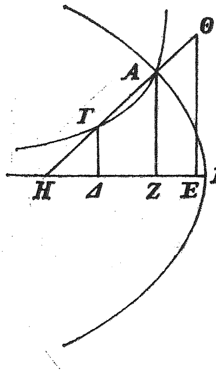
Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΘΑΟ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΔΟ· ἔχει δὲ γίνει ἡ εὐθεῖα ΓΗ : ΗΔ = ΕΖ : ΖΔ· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΓΗ x ΗΚ ἢ ΓΗ x ΖΔ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΚΜ x ΜΕ ἢ ΕΖ x ΜΕ, τουτέστιν ἐπὶ ΗΔ (=ΜΕ). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΚΜ x ΜΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΚΘ x ΘΑ, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι μεταξύ των ἀσύμπτωτοι (2, 12)· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΓΗ x ΗΚ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΚΘ x ΘΑ, καὶ εἶναι ἄρα ΑΘ : ΓΗ = ΗΚ : ΚΘ. Ἑπομένως ΑΘ : ΓΗ = ΘΝ : ΝΗ· εἶναι ἄρα ΗΚ : ΚΘ = ΘΝ : ΝΗ. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα ΘΚ = ΖΟ· εἶναι ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΖΟ, ΝΗ ἴσαι μεταξύ των, καὶ συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ΛΔ : ΝΗ = ΛΔ : ΖΟ· ὥστε ΛΔ : ΖΟ = ΛΓ : ΓΝ. Εἶναι δὲ ΛΓ : ΓΝ = ΔΓ : ΓΗ· [εἶναι ἄρα ΛΔ : ΖΟ = ΔΓ : ΓΗ. Ἀλλὰ ΔΓ : ΓΗ = ΔΕ : ΕΖ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα εὐθεῖα ΛΕ : ὑπόλοιπον εὐθεῖαν ΕΟ = ΔΕ : ΕΖ, καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 17), ἡ εὐθεῖα ΕΟ : ΟΛ = ΕΖ : ΖΔ, τουτέστιν ὡς ἡ πλαγία διάμετρος : παράμετρος. Ἐπειδὴ [λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΕΟ : ΟΛ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, ἡ εὐθεῖα ΛΑ θὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη (θ. 9)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



62

Δοθέντος σημείου τινὸς εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας τομῆς τινος κώνου, μὴ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος, εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἐλαχίστη εὐθεῖα.

Ἔστω πρῶτον ἡ τομὴ παραβολή, ὡς ἡ ΑΒ, μὲ ἄξονα τὸν ΒΗ, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας τῆς τομῆς, τὸ Γ. Λέγω, ὅτι εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Γ εὐθεῖα ἐλαχίστη.



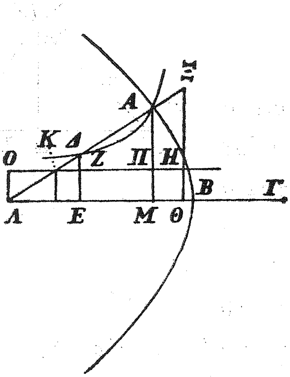
Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Γ, ἡ εὐθεῖα ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΔΕ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ε ἡ εὐθεῖα ΕΘ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΗ, καὶ ἂς γραφῇ διὰ τοῦ σημείου Γ, ὑπὸ τὰς ἀσυμπτώτους ΘΕ, ΕΗ, ἡ ὑπερβολὴ ΑΓ, ἡ ὁποία θὰ συναντήσῃ τὴν παραβολὴν (2, 4), ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μέχρι τῶν σημείων Η, Θ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΗ εἶναι ἐλαχίστη.

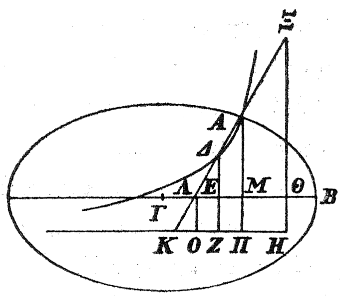
Ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΑΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΓΗ εἶναι, ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΘΑ (2, 8), ἡ εὐθεῖα ΔΗ = ΕΖ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΕΔ = ἥμισυ τῆς παραμέτρου· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΗ = ἥμισυ τῆς παραμέτρου. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΗ εἶναι ἐλαχίστη (θ. 8).

63

Ἐὰν ἡ τομὴ ΑΒ εἶναι ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις, ἄξων ὁ ΒΛ, καὶ κέντρον τὸ Γ, καὶ τὸ διδομένον σημεῖον Δ εἰς οἵαν θέσιν, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Δ εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ εὐθεῖα ἐλαχίστη.

Ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΔΕ, καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖα ΓΘ : ΘΕ = ΔΖ : ΖΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ζ, ἡ εὐθεῖα ΗΚ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα ΒΓ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΗΘΞ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΕ. Ἂς γραφῇ διὰ τοῦ σημείου Δ, ὑπὸ τὰς ἀσυμπτώτους ΗΞ, ΗΚ, ἡ ὑπερβολὴ





ΑΔ (2, 4), ἡ ὁποία θὰ συναντήσῃ τὴν δοθεῖσαν παραβολὴν ἢ τὴν ἔλλειψιν. Ἔστω Α τὸ σημεῖον συναντήσεως, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μέχρι τῶν σημείων Λ, Ξ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΛ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη.

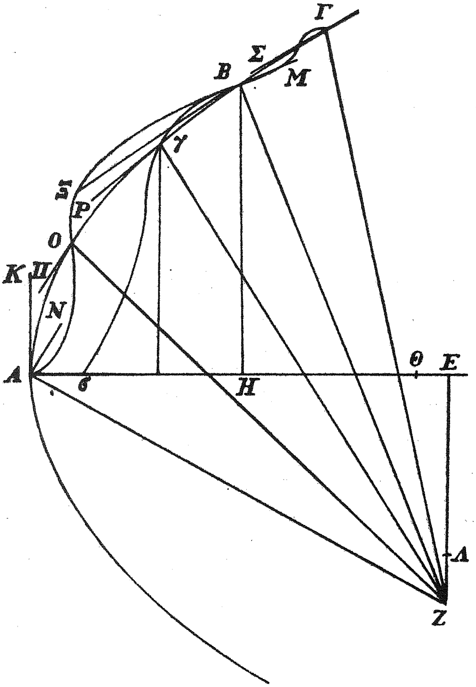
Διότι, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΞΑ, ΔΚ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (2, 8), αἱ εὐθεῖαι ΗΠ ἢ ΘΜ καὶ ΚΖ θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσαι. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΚ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΚΟ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ διαφορὰ ΖΚ—ΕΛ, ὡς ἡ ΔΖ : ΖΕ, καὶ ἡ ΔΖ : ΖΕ = ΓΘ : ΘΕ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΘΜ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν

ΘΜ, ΕΛ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΓΘ : ΘΕ· καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 17) εἰς τὴν ἔλλειψιν ἢ διὰ συνθέσεως αὐτῶν (Εὐκλ. 5, 18) εἰς τὴν ὑπερβολήν, θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΜ : ΜΛ = ΓΘ : ΘΕ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΓΘ : ΘΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ ἡ εὐθεῖα ΜΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΘΓ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΛ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη (θ. 9 διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ 10 διὰ τὴν ἔλλειψιν)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

64

Ἐὰν ὑπὸ τὸν ἄξονα παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς δοθῇ σημεῖόν τι, ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ ἀγομένη εὐθεῖα πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος γωνίαν ὀξεῖαν, χωρὶς ἐν τούτοις ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ δύναται ν' ἀχθῇ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς τομῆς νὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἤ, ἐὰν εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλλείψεως δὲν ὑπάρχει εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου πρὸς τὸ μέρος τῆς τομῆς τὸ ἀντίθετον ἐκείνου, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ δοθὲν σημεῖον, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ν' ἀποκόπτῃ εὐθεῖαν ἐλαχίστην, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες δύνανται ν' ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου, πρὸς τὸ μέρος αὐτὸ τῆς τομῆς, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν θὰ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

Ἔστω πρῶτον παραβολή, ὡς ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΕ, καὶ κάτωθεν τοῦ ἄξονος δοθὲν τὸ σημεῖον Ζ, ὥστε ἡ σχηματιζομένη γωνία ΖΑΕ ὑπὸ τῆς ἀγομένης εὐθείας ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, καὶ τοῦ ἄξονος ΑΕ, νὰ εἶναι ὀξεῖα, καὶ ἔστω ἐν πρώτοις ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ πρὸς τὴν τομὴν εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος νὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη. Λέγω, ὅτι ἡ ἐλαχίστη ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΓ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΖ, καὶ ὅτι αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι αἱ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν εἶναι μικρότεραι ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μακρύτερον. Τοῦτο εἶναι ἀφ' ἑαυτοῦ φανερόν, ὅταν ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἀχθῶσιν οἱαιδήποτε εὐθεῖαι μέχρι τῆς τομῆς, δὲν δύνανται ν' ἀχθῶσιν ἐκ τῶν ἄκρων των εὐθεῖαι ἐλάχισται μὴ συναντῶσαι τὸν ἄξονα μακρύτερον τῆς κορυφῆς Α, αἵτινες δὲν συναντῶσι τὰς ἀγομένας εὐθείας ἐκ τοῦ σημείου Ζ.



Θ' ἀποδειχθῇ τοῦτο ὡς ἑξῆς· ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΖΕ· ἡ εὐθεῖα **ΑΕ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ** τῆς παραμέτρου, ἢ μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα.

Ἔστω πρῶτον αὕτη ἴση ἢ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Μεταξὺ δὲ ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν δὲν ὑπάρχει καμμία, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος νὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη· ἀλλ' αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι, αἱ ἀγόμεναι πρὸς τὸν ἄξονα, ἀναχωροῦσαι ἐκ τῶν ἄκρων, τὰ ὁποῖα αὗται ἔχουσιν ἐπὶ τῆς τομῆς, θὰ πέσωσιν πρὸς μακρύτερον μέρος τοῦ σημείου Α ἢ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ σημείου Ζ, συμφώνως πρὸς τὸ τεσσαρακοστὸν ἔνατον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, ἔστω, ὅτι ἡ ΕΘ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΘ = 2ΑΗ, καὶ ὅτι ἡ ΗΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΕ εἰς τὸ σημεῖον Η. Ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΕΛ : ΗΒ = ΘΗ : ΘΕ. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΖΕ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΛ, ἢ μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα πρὸς αὐτήν. Ὅμως ἴση δὲν θὰ εἶναι πρὸς τὴν ΕΛ, διότι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΖΕ ἦτο ἴση πρὸς τὴν ΕΛ, θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ μία μόνον εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας θὰ ἀπεκόπτετο ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 51)· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΕ δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΛ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ δὲν δύναται νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΛ. Διότι, ἐὰν ἡ ΕΖ ἦτο μικροτέρα τῆς ΕΛ, θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, δι' ἑκάστην τῶν ὁποίων τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος, εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 51)· ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ζ δὲν δύναται ν' ἀχθῇ εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος νὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη. Ὥστε ἡ εὐθεῖα ΖΕ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΕΛ, καὶ ἐπειδὴ δὲν εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν, θὰ εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα αὐτῆς. Ὅθεν εἶναι φανερόν, συμφώνως πρὸς τὸ αὐτὸ πεντηκοστὸν πρῶτον θεώρημα, ὅτι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΖΕ ἦτο μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΕΛ, δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ εὐθεῖά τις, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος νὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη, καὶ ἀφοῦ ἔχωσιν ἀχθῇ οἱαιδήποτε εὐθεῖαι ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομήν, ἐὰν ἀχθῶσιν ἐκ τῶν ἄκρων των, πρὸς τὸν ἄξονα, εὐθεῖαι ἐλάχισται, αὗται θὰ συναντήσωσι τὸν ἄξονα πέραν τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ, τουτέστι μακρύτερον τῆς κορυφῆς Α. Ἑπομένως, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου ἢ μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα αὐτῆς, τῆς εὐθείας ΖΕ οὔσης πάντοτε μεγαλυτέρας τῆς εὐθείας ΕΛ, ὅλαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀχθεῖσαι ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν θὰ συναντήσωσι τὸν ἄξονα εἰς σημεῖον πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν Α ἢ αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν τούτων. Κατόπιν τούτων, λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΑ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομήν, καὶ ὅτι ἡ πλησιέστερον πρὸς ταύτην εὐθεῖα εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΖΒ, ΖΓ, καὶ ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, ἡ εὐθεῖα ΑΖ = ΒΖ. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΚ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Α· ἡ εὐθεῖα αὕτη ἡ ΑΚ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΕ, ἐπειδὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς εὐθείας τὰς τεταγμένως κατηγμένας εἰς τὸν ἄξονα (1, 17)· ὥστε ἡ γωνία ΖΑΚ εἶναι ἀμβλεῖα. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΝ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΖ· αὕτη θὰ πέση εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τομῆς, ἐπειδὴ δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῆ εὐθεῖα μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομῆς (1, 32). Ἂς ἀχθῆ ἀκόμη ἐκ τοῦ σημείου Β, ἡ εὐθεῖα ΒΞ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, ἡ ἐλαχίστη δὲ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Β πρὸς τὸν ἄξονα θὰ εἶναι μακρύτερον τοῦ σημείου Α παρὰ ἡ εὐθεῖα ΒΖ, κατόπιν τοῦ ἀποδειχθέντος τελευταίως. Ἡ ἐλαχίστη αὕτη ἄρα εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ΒΞ γωνίαν ὀρθὴν (θ. 27)· ἡ γωνία ἄρα ΖΒΞ θὰ εἶναι ὀξεῖα. Ἐὰν τώρα γραφῆ τόξον κύκλου μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΖ, θὰ συναντήση τοῦτο τὴν ἐφαπτομένην ΒΞ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΝΑ θὰ εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου ἔξω τοῦ τόξου τούτου, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΖΒΞ εἶναι ὀξεῖα, καὶ ἡ γωνία ΖΑΝ εἶναι ὀρθή. Ἐὰν ἄρα ὁ κύκλος οὗτος εἶναι ἡ καμπύλη ΒΞΟΑ, πρέπει νὰ συναντήση τὴν τομήν. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον συναντήσεως, καὶ ἂς ἐπιζευχθῆ ἡ ΟΖ, καὶ ἔστω ΟΠ ἡ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς πίπτουσα ἀναγκαίως ἔξω τοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Ο πρὸς τὸν ἄξονα εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς Α ἢ ἡ εὐθεῖα ΟΖ, καὶ ἡ ἐλαχίστη αὕτη εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ΟΠ γωνίαν ὀρθὴν (θ. 27), θὰ εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΖΟΠ ὀξεῖα, καὶ ἄρα ἡ εὐθεῖα ΟΠ πρέπει νὰ συναντήση τὸν κύκλον. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα αὕτη πίπτει εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΖ δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΖ.

Ἔστω τώρα, εἰ δυνατόν, ἡ εὐθεῖα ΑΖ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΖΒ, καὶ ἂς γραφῆ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΒ, ὁ ὁποῖος θὰ συναντήση τὴν εὐθεῖαν ΑΖ. Μέρος λοιπὸν τῆς ἐφαπτομένης ΒΞ θὰ εἶναι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου, συμφώνως πρὸς τ' ἀποδειχθέντα ἀνωτέρω (ὅτι δηλ. ἡ γωνία ΖΒΞ εἶναι ὀξεῖα), καὶ ὁ κύκλος θὰ συναντήσῃ κατ' ἀνάγκην τὴν τομήν, διότι συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΑΖ. Ἔστω ὁ κύκλος οὗτος ὁ Βγσ· ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα Ζγ, καὶ ἃς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου γ, ἡ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς γΡ· ἡ ἐφαπτομένη αὕτη θὰ πέσῃ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου, ἐπειδὴ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἀποκοπτομένη μεταξὺ τοῦ σημείου γ καὶ τοῦ ἄξονος, πίπτει εἰς μακρύτερον μέρος τοῦ σημείου Α ἢ ἡ εὐθεῖα γΖ, καὶ ἄρα ἡ γωνία ΖγΡ εἶναι ὀξεῖα. Ἡ εὐθεῖα ἄρα γΡ θὰ συναντήσῃ τὸν κύκλον. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη πρέπει νὰ εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΖ δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΒΖ καὶ δὲν εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν· εἶναι ἄρα μικροτέρα αὐτῆς. Λέγω τώρα, ὅτι αἱ πλησιέστερον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΖ εὐθεῖαι εἶναι μικρότεραι ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μακρύτερον.

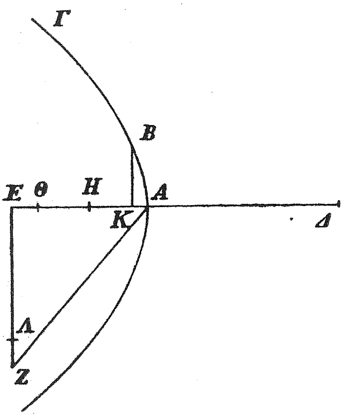
Διότι, ἃς προεκβληθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΞΒ μέχρι τοῦ σημείου Σ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΒΞ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, καὶ ἡ γωνία ΖΒΞ εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ ἐφεξῆς γωνία, τουτέστιν ἡ γωνία ΖΒΣ, θὰ εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ ἐὰν ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Β, κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΖ, ἡ εὐθεῖα ΒΜ, αὕτη θὰ πέσῃ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τομῆς. Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Γ, ἡ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ΓΣ, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, κατὰ πρῶτον, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΖ = εὐθεῖαν ΓΖ. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΓ ἃς γραφῇ κύκλος, ὁ ὁποῖος θὰ πέσῃ κάτωθεν τῆς εὐθείας ΓΣ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΖΓΣ εἶναι ὀξεῖα, καὶ ἐντεῦθεν τῆς εὐθείας ΒΜ, ἐπειδὴ αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν BZ· ὁ κύκλος ἄρα οὗτος θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν. Ἐὰν τώρα ἀχθῇ εὐθεῖα ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τοῦ κύκλου πρὸς τὸ σημεῖον Z, διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ ἀποδεικνύεται ἄτοπον, ὡς ἤδη ἔχει δειχθῇ, ὅτι ἡ ἰσότης τῶν εὐθειῶν AZ, ZB ἦτο ἄτοπος.

Ἐὰν τώρα ληφθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ZB εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ZΓ, ἀποδεικνύεται, διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ, ὅτι ὑπάρχει ἄτοπον, ὡς διὰ τὰς εὐθείας AZ, BZ, ὅταν ὑπετέθη, ὅτι ἡ εὐθεῖα AZ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας BZ. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν AZ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐξ ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι δύνανται ν' ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου Z πρὸς τὴν τομὴν ABΓ, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἡ θέσις τοῦ σημείου Z εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ πρὸς τὴν τομὴν εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ν' ἀποκόπτῃ ἐλαχίστην εὐθεῖαν, καὶ ἡ γωνία ZAE εἶναι ὀρθή, ἡ εὐθεῖα AZ θὰ εἶναι ἡ μικροτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Z πρὸς τὴν τομήν, καὶ ἐκείνη, ἥτις εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν εὐθεῖαν AZ θὰ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον. Θ' ἀποδειχθῇ ἀκόμη εἰς τὸ ἐν συνεχείᾳ ἑξηκοστὸν ἕβδομον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, ὅτι, ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ οὐδεμία εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Z, ἐπὶ τῆς ὁποίας νὰ ἀποκόπτηται ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ἐὰν ἡ γωνία ZAE εἶναι ὀξεῖα, ἡ εὐθεῖα AZ εἶναι ἡ μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Z πρὸς τὴν τομήν, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

65

Ἐὰν ἡ τομὴ εἶναι ὑπερβολή, ὡς ἡ ΑΒΓ, ἄξων αὐτῆς ὁ ΔΕ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἐὰν ληφθῇ κάτωθεν τοῦ ἄξονος σημεῖόν τι Ζ, ὥστε ἡ ἐπιζευγνυομένη εὐθεῖα ΑΖ νὰ σχηματίζῃ μετὰ τοῦ ἄξονος γωνίαν ὀξεῖαν, ὡς ἡ ΖΑΕ, λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΖ εἶναι ἡ μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομήν, καὶ ὅτι ἂν ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἀχθῶσι πρὸς τὴν τομὴν οἱαιδήποτε εὐθεῖαι, ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΖ εἶναι μικροτέρα, ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.



Τοῦτο θὰ εἶναι φανερόν, ἐὰν ἐλαχίστη τις εὐθεῖα, ἀγομένη ἐκ σημείου τινὸς τῆς τομῆς ΑΒΓ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΕ, πίπτῃ πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν Α ἢ ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ τὸ σημεῖον Ζ.

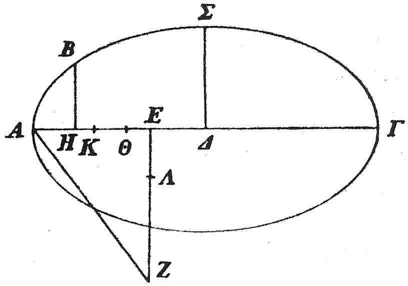
Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ, ἡ εὐθεῖα ΖΕ, κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΕ ἂς εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, ἢ μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἴση ἢ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, καὶ ἐὰν εὐθεῖαι ἀναχωροῦσιν ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων αὐτῶν πρὸς τὸν ἄξονα, θὰ εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς Α ἢ αἱ τελευταῖαι αὗται (θ. 45). Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις ΔΘ : ΘΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ ἂς ληφθῶσι δύο εὐθεῖαι ΔΗ, ΔΚ μέσαι ἀνάλογοι μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΘΔ, ΔΑ. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Κ, ἡ εὐθεῖα ΚΒ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΕ, καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις ἡ ΕΛ : ΚΒ = ὀρθογώνιον ΔΕ x ΘΚ : ὀρθογώνιον ΔΚ x ΘΕ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΕ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΕΛ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω, ὅτι δὲν εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι. Ἔχει δὲ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ζ δύναται ν' ἀχθῇ μόνον μία εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ἀποκόπτει εὐθεῖαν ἐλαχίστην (θ. 52). Ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, ἡ εὐθεῖα ΕΖ δὲν θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΛ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΕ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΕΛ, ἐπειδή, ἐὰν ἦτο μικροτέρα θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου Ζ δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τὰ ἀποκοπτόμενα μέρη μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος θὰ ἦσαν εὐθεῖαι ἐλάχισται. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΕ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΕΛ. Ἀπεδείχθη ὅμως, ὅτι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΖΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΕΛ, δὲν εἶναι δυνατόν, ἐκ τοῦ σημείου Ζ ν' ἀχθῇ εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ν' ἀποκόπτῃ ἐλαχίστην εὐθεῖαν, καὶ ὅτι αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α μεγαλυτέραν ἢ αἱ ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἀγόμεναι εὐθεῖαι (θ. 52). Ἐὰν ἄρα ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἀχθῶσιν οἱαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὴν τομήν, αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι, αἱ ἀναχωροῦσαι ἐκ τῶν ἄκρων των θὰ εἶναι μακρύτερον ἢ ἐκεῖναι αἱ ἐκ τοῦ σημείου Α· διὰ τοὺς αὐτοὺς ἄρα λόγους, καθ' οὓς ἀπεδείχθη τοῦτο διὰ τὴν παραβολήν, εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΖ θὰ εἶναι μικροτέρα ὅλων τῶν ἄλλων εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΖ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

66

Ἐὰν ἡ τομὴ εἶναι ἔλλειψις, ὡς ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, κέντρον δὲ τὸ σημεῖον Δ, ἂς ληφθῇ κάτωθεν τοῦ μεγάλου ἄξονος σημεῖόν τι Ζ, ὥστε ἡ γωνία ΖΑΓ νὰ εἶναι ὀξεῖα, καὶ ἂς ὑψωθῇ ἐκ τοῦ κέντρου Δ, ἡ εὐθεῖα ΔΣ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ τὸ σημεῖον Ζ νὰ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε νὰ μὴ εἶναι δυνατὸν νὰ ἄγεται εἰς τὸ τεταρτημόριον ΑΣ τῆς τομῆς εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος νὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΖ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Ζ εἰς τὸ μέρος ΑΣ τῆς τομῆς, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ πλησιέστερον πρὸς αὐτήν, εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

Ἐνδιαφέρει πάντοτε, ἡ κάθετος, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἐπὶ τὸν ἄξονα, νὰ πίπτῃ μεταξὺ τῶν σημείων Α, Δ· διότι, δὲν δύναται νὰ πίπτῃ μεταξὺ τῶν σημείων Δ, Γ, διότι ἄλλως θὰ εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μέρος τὸ ἀποκοπτόμενον μεταξὺ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς τομῆς, θὰ εἶναι μία τῶν ἐλαχίστων εὐθεῖα (θ. 55). Ὑπετέθη ὅμως, ὅτι τοῦτο δὲν δύναται νὰ γίνῃ· ἡ κάθετος ἄρα δὲν θὰ πέσῃ μεταξὺ τῶν σημείων Δ, Γ. Ἀλλὰ δὲν θὰ πέσῃ αὔτη καὶ ἐπὶ τοῦ κέντρου Δ, διότι, ἐὰν ἔπιπτεν ἐπὶ τοῦ κέντρου Δ, καὶ προεξετείνετο μέχρι τῆς τομῆς, τὸ μέρος τὸ ἀποκοπτόμενον μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος θὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη (θ. 11). Ἔστω, ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, ὡς ἡ κάθετος ΖΕ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΕ ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, ἢ μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα αὐτῆς. Ἐὰν ἦτο μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἦτο ἀδύνατον ἐλάχισται εὐθεῖαι ν' ἀποκόπτωσιν οἱασδήποτε εὐθείας διευθυνομένας ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομήν, ἀλλ' αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι πρὸς τὸν ἄξονα, ἀναχωροῦσαι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες διευθύνονται ὁμοίως, θ' ἀπομακρύνωνται ἔτι περισσότερον ἢ ἐκεῖναι, ἐκ τῆς κορυφῆς Α (θ. 52).



Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, ἃς γίνῃ εὐθεῖα ΔΘ : ΘΕ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος· ἃς ληφθῶσι δύο εὐθεῖαι αἱ ΗΔ, ΔΚ μέσαι ἀνάλογοι μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΔΘ, καὶ ἃς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ εὐθεῖα ΗΒ, τεταγμένως κατηγμένη (δηλ. παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Α), καὶ ἃς γίνῃ εὐθεῖα ΕΛ : ΗΒ = ὀρθογώνιον ΔΕ x ΘΗ = ὀρθογώνιον ΔΗ x ΘΕ. Ἡ εὐθεῖα ΖΕ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΛ, ἢ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα αὐτῆς. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΕΖ ἦτο ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν

ΕΛ, δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΣ παρὰ (μόνον) μία εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ν' ἀποκόπτηται εὐθεῖα ἐλαχίστη (θ. 52). 'Αλλὰ τοῦτο δὲν συμβαίνει (ἐξ ὑποθέσεως). 'Η εὐθεῖα ΕΖ δὲν δύναται ἀκόμη νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΕΛ· διότι τότε θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων θ' ἀπεκόπτοντο εὐθεῖαι ἐλάχισται (θ. 52). 'Η εὐθεῖα ἄρα ΕΖ ὀφείλει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΕΛ, περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν οὐδεμία εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος νὰ εἶναι εὐθεῖα ἐλαχίστη δὲν δύναται ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΣ, καὶ εἰς τὴν ὁποίαν οἱαδήποτε εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκ τοιούτου τινὸς σημείου Ζ πρὸς τὴν τομήν, δηλ. ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, παρεμβαλλομένη μεταξὺ τοῦ ἄκρου τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τοῦ ἄξονος, θ' ἀπεμακρύνετο περισσότερον ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α, ἢ ἡ εὐθεῖα αὕτη ἡ ἀχθεῖσα ἐκ τοῦ σημείου Ζ (θ. 52).

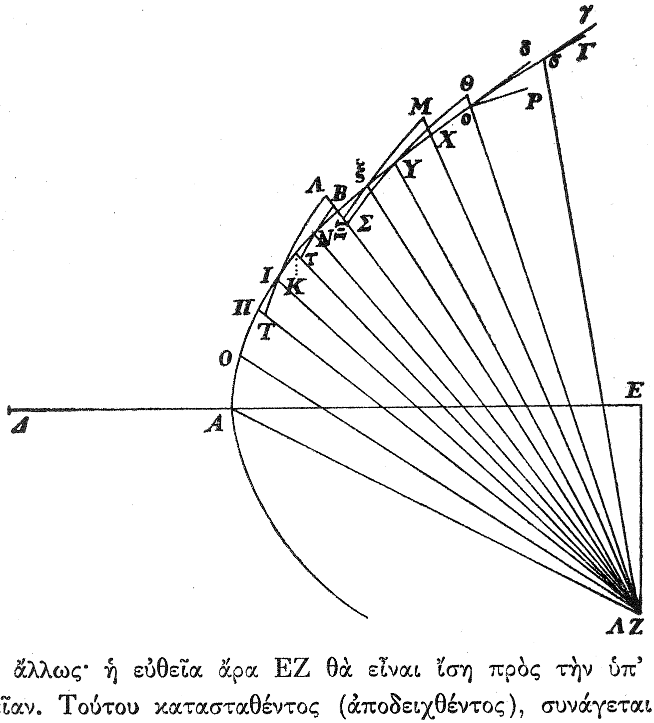
Τώρα, ἐὰν αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι ἀγόμεναι ἔκ τινος σημείου τῆς τομῆς ΑΣ πρὸς τὸν ἄξονα ἦσαν μακρύτερον τῆς κορυφῆς Α, ἢ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ ληφθέντος σημείου Ζ, ἀποδεικνύεται ὡς εἰς τὴν παραβολὴν (θ. 54), ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΖ εἶναι ἐλαχίστη ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΣ, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΖ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον. Διότι ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ἁπάσας τὰς τρεῖς τομάς, καὶ δι' ἑκάστην φοράν, καθ' ἣν εἰς δοθεῖσαν τομήν, ἐλάχισται εὐθεῖαι ἀγόμεναι ἐκ σημείων τῆς τομῆς ταύτης πρὸς τὸν ἄξονα, συναντῶσι τὸν αὐτὸν ἄξονα μακρύτερον τῆς κορυφῆς, ἢ αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ σημεῖα ταῦτα πρὸς τὸ ληφθὲν σημεῖον Ζ.

67

Ἔστω, ὅτι ἡ τομὴ ΑΒΓ εἶναι τώρα παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΕ· ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι, ὡς τὸ Ζ, κείμενον κάτωθεν τοῦ ἄξονος, καὶ ἔστω ὅτι ἡ γωνία ΖΑΕ εἶναι ὀξεῖα, καὶ ὅτι θὰ εἶναι δυνατόν, νὰ ἄγηται ἐκ τοῦ σημείου Ζ μία μόνον εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος θὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα. Λέγω, ὅτι καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ εὐθεῖα ΑΖ εἶναι μικροτέρα ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, καὶ ὅτι ἡ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ, ἡ εὐθεῖα ΖΕ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Λέγω, ὅτι, ἐὰν οἱαδήποτε εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, ἐκτὸς μόνης τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς οἱασδήποτε αὐτῆς εὐθείας πρὸς τὸν ἄξονα, θ' ἀπομακρύνηται περισσότερον ἐκ τῆς κορυφῆς Α, ἢ ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Ζ, οὕτως, ὥστε εἰς τὴν παραβολὴν ἢ τὴν ὑπερβολήν, ἡ εὐθεῖα ΑΕ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Διότι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα αὕτη δὲν ἦτο μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, θὰ ἦτο ἀδύνατον ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας θ' ἀπεκόπτετο ἐλαχίστη εὐθεῖα, ὡς ἐξάγεται ἐκ τοῦ τεσσαρακοστοῦ ἐνάτου καὶ τοῦ πεντηκοστοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ βιβλίου τούτου. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΕ μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου.

Ἐὰν τώρα πρόκειται μόνον περὶ παραβολῆς, ἀφαιροῦμεν ἐκ τῆς εὐθείας ΑΕ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ σημείου Ε, εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, καὶ εὑρίσκομεν, ὡς ἤδη ἐξετέθη (θ. 64), τὴν εὐθεῖαν ΕΛ πρὸς τὴν ὁποίαν ἡ εὐθεῖα ΕΖ θὰ συγκριθῇ. Ἡ εὐθεῖα ΕΖ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τελευταίαν ταύτην (τὴν ΕΛ)· διότι δὲν δύναται νὰ εἶναι μικροτέρα αὐτῆς, ἐπειδὴ θὰ ἦτο δυνατόν, ἀντιθέτως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, ν' ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων ὁ ἄξων θ' ἀπέκοπτε ἐλαχίστας εὐθείας (θ. 51). Πρὸς τούτοις, ἡ εὐθεῖα ΖΕ δὲν θὰ εἶναι περισσότερον μεγαλυτέρα τῆς ὑπ' ὄψει εὐθείας, ἐπειδή, ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτάς, δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ οὐδεμία εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος θὰ ἦτο μία τῶν ἐλαχίστων εὐθειῶν (θ. 51). Ἀλλὰ τὸ πρᾶγμα



ἔχει ἄλλως· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΕΖ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπ' ὄψει εὐθεῖαν. Τούτου κατασταθέντος (ἀποδειχθέντος), συνάγεται σαφῶς ἐκ τοῦ πεντηκοστοῦ πρώτου θεωρήματος, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἄγεται μόνον μία εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος θὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ὅτι ὅλαι αἱ ἄλλαι ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀχθεισῶν ἐκ τοῦ σημείου Ζ θὰ εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς Α, ἢ αἱ ἀχθεῖσαι αὗται εὐθεῖαι.

Τὸ αὐτὸ ἀποδεικνύεται, ἐὰν ἡ τομὴ εἶναι ὑπερβολή, τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον Δ.

Ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἰς τμήματα, ὥστε ταῦτα νὰ εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς ἡ πλαγία διάμετρος πρὸς τὴν παράμετρον καὶ τὰ λοιπὰ ἂς κατασκευασθῶσιν, ὡς εἰς τὸ ἑξηκοστὸν πέμπτον θεώρημα πρὸς εὕρεσιν τῆς εὐθείας ΕΛ, ἡ ὁποία ὀφείλει νὰ παρέχῃ τὸν ὅρον τῆς συγκρίσεως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΕ (δηλ. λῆψις δύο μέσων ἀναλόγων μεταξύ των πρὸς προσδιορισμὸν τμημάτων τῆς ΔΕ καὶ προσδιορισμὸς τῆς εὐθείας ΕΛ ὡς εἰς τὸ θ. 65). Ἐὰν λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΖΕ ἦτο ἴση πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν εὐθεῖαν ΕΛ, εὑρίσκεται, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν αὐτῶν λόγων ὡς καὶ εἰς τὴν παραβολήν, ὅτι τὸ σημεῖον Ζ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε νὰ μὴ δύναται ν' ἀχθῇ καμμία εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας θ' ἀπεκόπτετο ἐλαχίστη εὐθεῖα· καὶ εἶναι φανερόν, συμφώνως πρὸς τὸ πεντηκοστὸν δεύτερον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, ὅτι ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἀχθῶσιν οἱαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὴν τομήν, αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων αὐτῶν θὰ εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς Α, ἢ αἱ ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι. Πάντα τὰ λοιπὰ ἀκολουθοῦσι τὰ αὐτά, ὡς εἰς τὴν παραβολήν.

Ἔστω τώρα ΖΒ ἡ μόνη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ἀποκόπτει εὐθεῖαν ἐλαχίστην, καὶ ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὴν τομήν, μεταξὺ τῶν σημείων Α, Β δύο ἄλλαι εὐθεῖαι, ὡς αἱ ΖΟ, ΖΠ. Ὁμοίως δεικνύεται, ὡς εἰς τὸ ἑξηκοστὸν τέταρτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΖ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομήν, καὶ ὅτι, ἐὰν αἱ τυχοῦσαι εὐθεῖαι ΖΟ, ΖΠ καταλήγουσιν εἰς τὴν τομὴν μεταξὺ τῶν σημείων Α, Β, ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΖ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΠ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΒ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι μικροτέρα, ἔστω πρῶτον, ὅτι εἶναι ἴση, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΖΚ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τούτων. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΚ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΖΠ, συμφώνως πρὸς ὅ,τι ἔχομεν ἀποδείξει. Ἂς ληφθῇ τώρα, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΚ, εὐθεῖά τις, ὡς ἡ Ζτ, μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΖΒ, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς ΖΚ καὶ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν Ζτ, ὅστις, ὡς καὶ ὁ κύκλος Ντ, συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΖΚ εἰς τὸ σημεῖον τ, καὶ τὴν τομὴν εἰς τὸ σημεῖον Ν, μεταξὺ τῶν σημείων Κ καὶ Β, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΖΝ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΚΖ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν ΑΖ ἢ ἡ εὐθεῖα ΖΝ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΚ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΝ· ὅπερ ἄτοπον. Εἶναι ἄρα ἄτοπον νὰ ὑποτεθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΚ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΒ· ὥστε δὲν εἶναι ἴσαι αἱ εὐθεῖαι ΖΠ, ΖΒ.

Ἔστω τώρα, εἰ δυνατόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΠ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΒ· ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΠ, εὐθεῖα ὡς ἡ ΖΤ, μεγαλυτέρα τῆς ΖΒ, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς ΖΠ, καὶ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΤ, συναντῶν τὴν εὐθεῖαν ΖΠ, καὶ ἑπομένως καὶ τὴν τομὴν μεταξὺ τῶν σημείων Π καὶ Β. Ἔστω, ὅτι ἡ συνάντησις αὕτη γίνεται ἐπὶ τοῦ τόξου ΤΙΛ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΖΙ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΠ μικροτέρα τῆς ΖΙ, διότι αὕτη εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν ΑΖ ἢ ἡ ΖΙ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΖΙ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΤ· ὥστε ἡ ΖΠ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΤ· ὅπερ ἄτοπον. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΠ δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΒ, καὶ δὲν εἶναι καὶ ἴση πρὸς αὐτήν, ὡς ἔχομεν ἀποδείξει· ἐπομένως εἶναι μικροτέρα. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομήν, μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, εἶναι μικρότεραι τῆς εὐθείας ΖΒ.

Ἂς ἀχθῶσι τώρα αἱ εὐθεῖαι Ζο, Ζσ πρὸς τὸ λοιπὸν μέρος ΒΓ τῆς τομῆς, πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς εὐθείας ΖΒ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΒ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας Ζο, καὶ ἡ εὐθεῖα Ζο εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας Ζσ.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι οδ, σγ ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς· αἱ γωνίαι Ζοδ, Ζσγ θὰ εἶναι λοιπὸν ἀμβλεῖαι, ἐπειδὴ αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων ο, σ πρὸς τὸν ἄξονα, εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς Α, ἢ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο τῶν σημείων τούτων. Ἔστω οΡ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Ζο εἰς τὸ σημεῖον ο· αὕτη θὰ πέσῃ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τομῆς· εἶναι λοιπὸν φανερόν, καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς ἔχομεν ἀποδείξει εἰς τὸ ἑξηκοστὸν τέταρτον θεώρημα, ὅτι ἡ εὐθεῖα Ζο εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας Ζσ, καὶ ὅτι ἐπομένως, αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ σημείου Ζ, πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΒΖ, πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν Α, εἶναι ἐπίσης μικρότεραι ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μακρύτερον. Λέγω τώρα, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΒ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ὅλων τῶν τελευταίων τούτων εὐθειῶν.

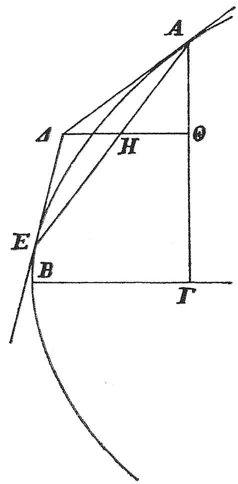
Διότι, ἐπειδὴ ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΒ εὐθεῖαν ἐλαχίστην, ἡ γωνία ἡ περιλαμβανομένη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Β καὶ τῆς εὐθείας ΖΒ, θὰ εἶναι ὀρθή.

Ἔστω πρῶτον, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ὅτι ἡ ΖΒ=Ζο, καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς τὸν χῶρον των εὐθεῖά τις ἡ ΖΧ. Ἡ ΖΧ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς Ζο, τουτέστι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΖΒ, ἐπειδὴ αὕτη εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν ΑΖ. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΖΞ, μικροτέρα τῆς ΖΒ, ἀλλὰ μεγαλυτέρα τῆς ΖΧ, καὶ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΞ, ὁ ὁποῖος θὰ συναντήσῃ ἑπομένως τὴν τομὴν μεταξὺ τῶν σημείων Β, Χ. Ἔστω ὁ κύκλος οὗτος ὁ ΜξΞ, συναντῶν τὴν τομὴν εἰς τὸ σημεῖον ξ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα Ζξ. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν Ζξ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΧ, ἐπειδὴ αὕτη εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε ἡ ΖΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ζξ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΧ. Εἶναι ἄρα ἄτοπον, ὅτι ἡ ΖΞ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΧ· ἡ Ζο ἄρα δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ.

Ἔστω, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ὅτι αὕτη εἶναι μικροτέρα. Ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΖΣ μεγαλυτέρα τῆς Ζο, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς ΖΒ, καὶ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΣ, συναντῶν τὴν τομὴν μεταξὺ τῶν σημείων Β, ο, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Υ· ἔστω ὁ κύκλος οὗτος ὁ ΣΥΘ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΥΖ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΥΖ μικροτέρα τῆς Ζο, ἐπειδὴ αὕτη εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν ΑΖ. Ἀλλὰ ἡ ΥΖ=ΖΘ· εἶναι λοιπὸν ἡ ΖΘ μικροτέρα τῆς Ζο. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἡ πρώτη τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δευτέρας· ὅπερ ἄτοπον· ἡ Ζο ἄρα δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΒ. Ἐδείχθη ὅμως, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν εἶναι ἴσαι· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΒ εἶναι μικροτέρα τῆς Ζο. Εἶναι λοιπὸν ἡ ΒΖ ἡ ἐλαχίστη ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὸ μέρος ΒΓ τῆς τομῆς. Ἐκ τούτου καὶ τῶν προηγουμένων συνάγεται, ὅτι ἡ ΑΖ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες εἶναι δυνατὸν ν᾽ ἀχθῶσιν πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ ⟨ἐκ τοῦ Ζ⟩, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εὑρίσκεται μακρύτερον.

68

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται τομῆς κώνου, τὸ τμῆμα τῆς εὐθείας τὸ ἀποκοπτόμενον ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς πλησιεστέρας πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς, τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων καὶ τοῦ σημείου ἐπαφῆς, θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος τοῦ ἀποκοπτομένου ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης, τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς.

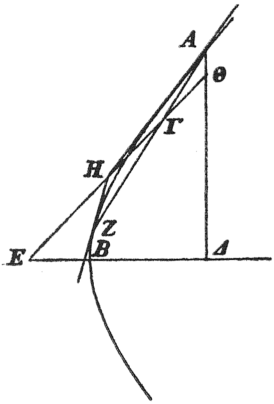


Ἔστω πρῶτον, ὅτι ἡ τομὴ τοῦ κώνου εἶναι ἡ παραβολὴ ΑΒ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΓ, καὶ ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΔ, ΔΕ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς. Λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΑ.

Ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΕ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Δ, ἡ εὐθεῖα ΔΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΑΗ = ΕΗ (2, 30). Ἃς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α ἡ εὐθεῖα ΑΓ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα· ἡ γωνία ΑΘΔ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἄρα ἡ γωνία ΑΗΔ θὰ εἶναι ἀμβλεῖα. Εἶναι δὲ ἡ ΔΗ κοινὴ πλευρὰ τῶν δύο τριγώνων ΑΔΗ, ΕΔΗ, καὶ αἱ δύο πλευραὶ ΑΗ, ΗΔ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΕΗ, ΗΔ, καὶ ἡ γωνία ΕΗΔ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΗΔ· ἡ βάσις ἄρα ΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς βάσεως ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

69

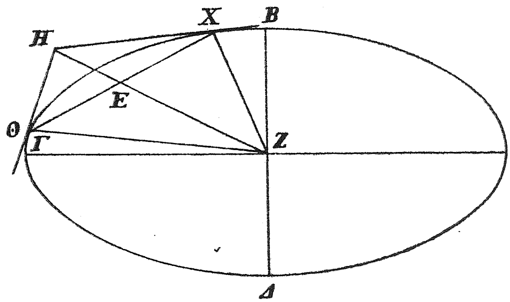
Ἔστω τώρα, ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ὑπερβολή, ὡς ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΕ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Ε, καὶ δύο ἐφαπτόμεναι, αἱ ΖΗ, ΗΑ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΗ εἶναι μικροτέρα τῆς ΗΑ.



Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΗΕ καὶ ἂς προεκβληθῇ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓΖ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ⟨ἐκβληθεῖσαν⟩ ΗΕ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΓ = ΓΖ (2, 30). Ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΑΔ καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ ΕΓ μέχρι τοῦ σημείου Θ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΔΕ εἶναι ὀρθή, ἡ γωνία ΑΘΕ, μεγαλυτέρα ταύτης, θὰ εἶναι ἀμβλεῖα· ἡ γωνία ἄρα ΑΓΗ θὰ εἶναι ἐπίσης ἀμβλεῖα, καὶ διὰ τοῦτο, ἡ γωνία ΗΓΖ, ἐφεξῆς ταύτης, θὰ εἶναι μικροτέρα αὐτῆς, ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ὀξεῖα. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΑΓ = ΓΖ, καὶ ἡ ΗΓ εἶναι κοινή, τῶν τριγώνων ΑΓΗ, ΗΓΖ· ἡ βάσις ἄρα ΖΗ εἶναι μικροτέρα τῆς βάσεως ΗΑ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

70

Ἔστω, ὅτι ἡ τομὴ ΑΒΓΔ εἶναι ἔλλειψις, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ καὶ μικρὸς ἄξων ἡ ΒΔ, καὶ ἂς ἀχθῶσι δύο ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς, αἱ ΧΗ, ΗΘ, μεταξὺ τῶν σημείων Β, Γ, τουτέστιν ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ τεταρτημόριον τῆς το-



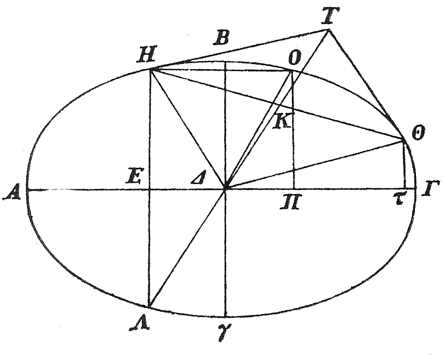
μῆς. Λέγω, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἡ πλησιεστέρα πρὸς τὸν ἄξονα εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

Διότι, ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΘΧ, ΗΕΖ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΧΕ = ΕΘ (2, 30). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΖΧ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸν μικρὸν ἡμιάξονα ΖΒ, ἢ ἡ εὐθεῖα ΖΘ, καὶ ἡ ΖΘ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸν μέγαν ἡμιάξονα, ἢ ἡ εὐθεῖα ΖΧ, ἡ εὐθεῖα ΖΘ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΧ (θ. 11). Αἱ πλευραὶ ἄρα ΖΕ, ΕΘ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς ΖΕ, ΕΧ· ἡ γωνία ἄρα ΘΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΧΕΖ, καὶ διὰ τοῦτο, ἡ γωνία ΧΕΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΗΕΘ. Ἀλλὰ αἱ πλευραὶ ΧΕ, ΕΗ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς ΘΕ, ΕΗ· ἡ βάσις ἄρα ΧΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΘΗ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

71

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, μικρὸς ἄξων ἡ Βγ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Δ. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΗΕ, Θτ κάθετοι ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα, οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΗΕ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Θτ, καὶ ἔστωσαν αἱ ΗΤ, ΤΘ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς, συναντώμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου (2, 27). Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΤ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΘΤ.

Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΗΚΘ, ΔΚΤ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΗΕ μέχρι τοῦ σημείου Λ, καὶ ἡ ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα ΛΔ μέχρι τοῦ σημείου Ο· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΛΔ = ΔΟ (1, 30). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΛΕ = ΕΗ, καὶ ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΛΗ, ἡ εὐθεῖα ΛΔ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ.

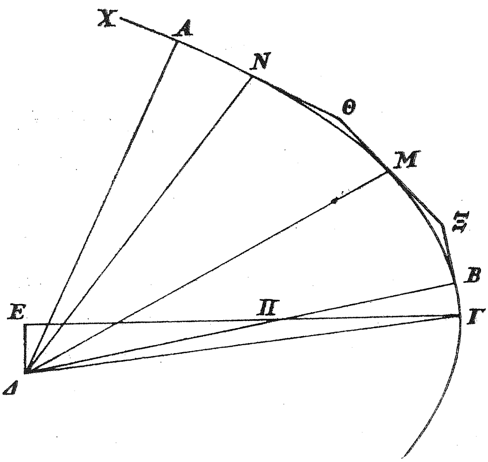


Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΛΔ = ΔΟ. εἶναι ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΗΔ, ΔΟ ἴσαι μεταξύ των, καὶ ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ΗΟ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Ετ. Ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΟΠ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΗΕ. Ἀλλὰ ἡ ΗΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Θτ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΟΠ μεγαλυτέρα τῆς Θτ. Εἶναι δὲ ἡ ΔΘ πλησιέστερον πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα ΔΓ, ἢ ἡ εὐθεῖα ΔΟ· εἶναι ἄρα ἡ ΔΘ μεγαλυτέρα τῆς ΔΟ (θ. 11), τουτέστι, μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΔΗ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΘΚ = ΚΗ (1, 30). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΚ εἶναι κοινή, ἡ γωνία ΔΚΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΗΚΔ, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ γωνία ΤΚΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΤΚΘ. Αἱ δύο πλευραὶ ἄρα ΗΚ, ΚΤ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΤΚ, ΚΘ· ἡ βάσις ἄρα ΗΤ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΤΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

72

Ἐὰν ὑπὸ τὸν ἄξονα παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκ τοῦ ὁποίου νὰ εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι τοιαῦται, ὥστε τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος ἑκατέρας, μεταξὺ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς τομῆς νὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τομῆς θὰ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ ληφθέντος σημείου πρὸς τὸ μέρος τῆς τομῆς τὸ μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς ἄλλης εὐθείας, καὶ ἐκ τῶν ἄλλων εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην πλευρὰν αὐτῆς τῆς μεγίστης θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον, ἡ ἄλλη δὲ εὐθεῖα (ἐκ τῶν δύο, ἡ μὴ μεγίστη) θὰ εἶναι μικροτέρα ὅλων τῶν ἄλλων εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ ληφθέντος σημείου πρὸς τὸ ὑπόλοιπον μέρος τῆς τομῆς ταύτης, τουτέστι πρὸς τὸ συμπλήρωμα αὐτῆς, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ἐκείνη τῶν εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων πρὸς τὸ ὑπόλοιπον μέρος τῆς τομῆς, ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν τελευταίαν ταύτην εὐθεῖαν θὰ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

Ἔστω τομὴ ἡ ΑΒΓ, ἄξων αὐτῆς ἡ ΓΕ, τὸ ὑπὸ τὸν ἄξονα ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ, καὶ δύο εὐθεῖαι ΔΑ, ΔΒ, ἀγόμεναι πρὸς τὴν τομήν, ἐπὶ τῶν ὁποίων ὁ ἄξων ἀποκόπτει εὐθείας ἐλαχίστας. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΒ εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὸ μέρος ΑΒΓ τῆς τομῆς, καὶ ὅτι αἱ πλησιέστερον εὐθεῖαι, καὶ πρὸς τὸ ἓν καὶ πρὸς



τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΒΔ εἶναι μεγαλύτεραι ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μακρύτερον, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΑ εἶναι μικροτέρα πάσης εὐθείας δυναμένης ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον μέρος τῆς τομῆς τὸ ΑΧ, καὶ ὅτι ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΔΑ εὐθεῖα εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Δ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΓΕ, καὶ ἂς ἀναζητήσωμεν, ὡς ἐπράξαμεν εἰς τὸ ἑξηκοστὸν τέταρτον καὶ ἑξηκοστὸν πέμπτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, τὴν εὐθεῖαν ΕΛ, ἡ ὁποία θὰ παράσχῃ τὸν ὅρον συγκρίσεως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΕ (ἡ ΕΛ ἐλλείπει εἰς τὸ ἀραβικὸν σχῆμα· ἐκ τῶν σχημάτων ὅμως τῶν θεωρημάτων 64 καὶ 65, συνάγεται ὅτι τὸ σημεῖον Λ εἶναι μεταξὺ Ε καὶ Δ), καὶ ἥτις ὀφείλει νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΕ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕ, διότι τότε θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Δ εὐθεῖά τις ἐπὶ τῆς ὁποίας θ' ἀπεκόπτετο ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ προσέτι δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ, ἐπειδὴ ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτάς, δὲν θὰ ἐλαμβάνετο, παρὰ μόνον μία εὐθεῖα ἐλαχίστη (θ. 51 καὶ 52). Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΕ μεγαλυτέρα (σημ. : τὸ λατινικὸν κείμενον καὶ ὁ P. V. Eecke ἔχουν μικροτέρα) τῆς ἀναζητουμένης εὐθείας ΕΛ, περίπτωσις καθ' ἣν θὰ εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τ' ἀποκοπτόμενα μέρη θὰ ἦσαν ἐλάχισται εὐθεῖαι, καὶ αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν ἐνδιαμέσων, μεταξὺ τῶν ΔΑ, ΑΒ εὐθειῶν, θὰ ἦσαν πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν Γ, ἢ αἱ ἐνδιάμεσοι αὐταὶ εὐθεῖαι, καὶ αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι, ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν ἄλλων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι δύνανται ν' ἀχθῶσι, θὰ εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς. Γίνεται λοιπὸν φανερόν, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ ἑξηκοστὸν τέταρτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΒ εἶναι μεγαλυτέρα πάσης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὸ μέρος ΒΓ τῆς τομῆς, καὶ αἱ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΔΒ εὐθεῖαι, πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Γ, εἶναι μεγαλύτεραι ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μακρύτερον· εἶναι ἄρα τότε ἡ εὐθεῖα ΔΒ μεγαλυτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης πρὸς τὸ μέρος ΑΒ τῆς τομῆς, καὶ ἡ πλησιέστερον ἐφεξῆς εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης τῆς ἐφεξῆς, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον. Ἡ ἀπόδειξις τούτων ἔχει ὡς ἑξῆς. Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΜ, ΔΝ, καὶ ἔστωσαν ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς εἰς τὰ σημεῖα Β, Μ, αἱ ΒΞ, ΞΜΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΠ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, καὶ ἡ ΒΞ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, ἡ γωνία ΞΒΠ θὰ εἶναι ὀρθὴ (θ. 27 καὶ 28, διὰ τὴν παραβολὴν καὶ ὑπερβολὴν ἀντιστοίχως), καὶ ἡ γωνία ΞΜΔ εἶναι ἀμβλεῖα, ἐπειδὴ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Μ πρὸς τὸν ἄξονα ΓΕ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν Γ, ἢ ἡ εὐθεῖα ΜΔ (θ. 51 καὶ 52).

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΞΒΔ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ γωνία ΞΜΔ εἶναι ἀμβλεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, $ΞΒ^2 + ΒΔ^2$, θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων $ΞΜ^2 + ΜΔ^2$. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΒΞ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΞΜ (θ. 68 καὶ 69)· εἶναι ἄρα ἡ ΒΔ μεγαλυτέρα τῆς ΔΜ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ΜΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΝ, διότι ἡ γωνία ΘΜΔ εἶναι ὀξεῖα, καὶ ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΝΘ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, ἡ γωνία ΘΝΔ θὰ εἶναι ἀμβλεῖα. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΝΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΑ. Εἶναι ἄρα ἡ ΒΔ μεγαλυτέρα τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὸ μέρος ΑΓ τῆς τομῆς, καὶ ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν τελευταίαν ταύτην εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον. Ἀποδεικνύεται ἀκόμη, ὅτι ἡ ΔΑ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν λοιπὴν τομὴν ΑΧ, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς εἰς τὸ ἑξηκοστὸν τέταρτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου. Ὁμοίως εἶναι φανερόν, ὅτι μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὴν τομὴν ΑΧ, ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

73

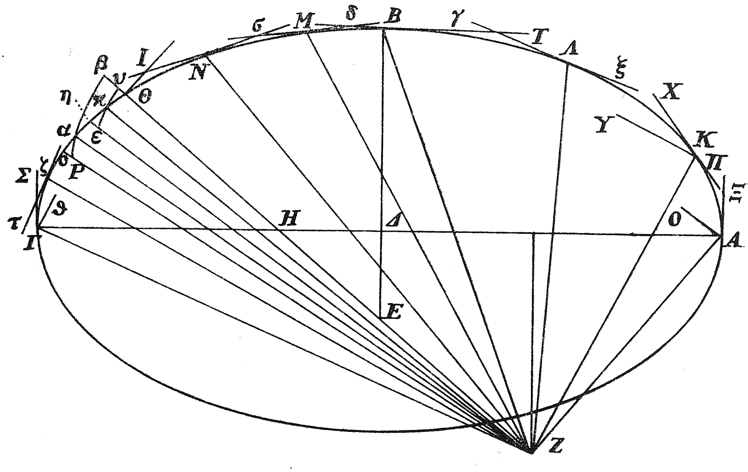
Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν ληφθῇ σημεῖόν τι κάτωθεν τοῦ μεγάλου ἄξονος μὴ κείμενον εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ μικροῦ ἄξονος, καὶ ἐὰν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὴν τομήν, ὑπάρχῃ μόνον μία ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστην εὐθεῖαν, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν ἄλλων εὐθειῶν, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ πλησιεστέρα θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον, καὶ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ ληφθέντος σημείου πρὸς τὴν ἡμιέλλειψιν πρὸς τὴν ὁποίαν ἔχει ἀχθῇ ἡ μεγίστη εὐθεῖα, θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὸ δοθὲν σημεῖον μετὰ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς τῆς πλησιεστέρας πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ τῆς ὁποίας (μέγας) ἄξων εἶναι ἡ ΑΓ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Δ. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Δ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ ΒΔΕ, καὶ ἂς ληφθῇ κάτωθεν τοῦ ἄξονος σημεῖόν τι Ζ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἄγεται πρὸς τὴν τομὴν μία μόνον εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος (τὸ μεταξὺ τοῦ μεγάλου ἄξονος καὶ τῆς τομῆς, τῆς κάτωθεν τοῦ μεγάλου ἄξονος) εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα. Ἡ εὐθεῖα αὕτη, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἀποκόπτεται ἐλαχίστη εὐθεῖα, πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἐκτὸς αὐτῆς νὰ μὴ εἶναι δυνατὸν ν᾽ ἀχθῇ ἄλλη ἐκ τοῦ ληφθέντος σημείου πρὸς τὴν τομήν. Ὅμως εἶναι πάντοτε δυνατόν, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ πεντηκοστὸν πέμπτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, ν᾽ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος νὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἥτις συναντᾷ τὸν ἄλλον ἡμιάξονα, δηλ. τὸ ἥμισυ τοῦ ἄξονος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δὲν πίπτει ἡ ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἀγομένη κάθετος.

Ἔστω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἀποκόπτεται ἐλαχίστη εὐθεῖα, συναντᾷ τὸν ἀπομένοντα ἡμιάξονα ΓΔ, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἡ ΖΗΘ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΑ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, καὶ ὅτι ἡ πλησιέστερον καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τῆς ΖΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΖ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐξ ὅλων.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ τομὴ ΑΒΓ εἶναι ἔλλειψις, καὶ ἔχει ληφθῇ κάτωθεν τοῦ μεγάλου ἄξονος σημεῖόν τι, ἐκ τοῦ ὁποίου ἄγεται πρὸς τὴν τομὴν μόνον μία εὐθεῖα, ἐκ τῆς ὁποίας ἀποκόπτεται ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἔχει δειχθῇ, ὅτι αἱ ἄλλαι ἐλάχισται εὐθεῖαι, αἱ ἀγόμεναι, ἐκ τυχόντων σημείων κειμένων ἐπὶ τῆς τομῆς, πρὸς τὸν ἄξονα, εἶναι μακρύτερον τῶν κορυφῶν Α καὶ Γ, ἢ αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ σημεῖα ταῦτα πρὸς τὸ σημεῖον Ζ (θ. 52). Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομήν, αἱ εὐθεῖαι ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ, καὶ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΞ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Α. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ γωνία ΖΑΞ ἀμβλεῖα. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΟ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΖ εἰς τὸ σημεῖον Α· αὕτη θὰ πέσῃ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τομῆς (1, 32). Ἂς ἀχθῇ ἐπίσης ἐκ τοῦ σημείου Κ ἡ εὐθεῖα ΠΚΧ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Κ πρὸς τὸν ἄξονα, εἶναι μακρύτερον ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἢ ἡ εὐθεῖα ΚΖ, ἡ γωνία ΠΚΖ θὰ εἶναι ὀξεῖα (θ. 57). Ἀλλὰ ἡ γωνία ΟΑΖ εἶναι ὀρθή· ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου Ζ, ἀποδεικνύεται, ὡς εἰς τὸ ἑξηκοστὸν τέταρτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΖ δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΖΚ, καὶ δὲν εἶναι καὶ ἴση πρὸς αὐτήν·

εἶναι ἄρα ἡ ΑΖ μικροτέρα τῆς ΖΚ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΠΚΧ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, ἡ γωνία ΧΚΖ θὰ εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ ἡ εὐθεῖα ΚΥ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΖ, θὰ πέσῃ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τομῆς, ἐπειδὴ δὲν δύναται ν' ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα πίπτουσα μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης (1, 32). Ἄς ἀχθῇ τώρα διὰ τοῦ σημείου Λ, ἡ εὐθεῖα ξΛΤ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ



σημείου Λ μακρύτερον ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α, ἢ ἡ εὐθεῖα ΛΖ· θὰ εἶναι ἄρα, κατόπιν τοῦ ἀποδειχθέντος εἰς τὸ ἑξηκοστὸν τέταρτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, ἡ εὐθεῖα ΖΚ μικροτέρα τῆς ΖΛ. Ἐὰν δὲ ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΖΒ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Β ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα γΒδ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, ἡ γωνία γΒΖ θὰ εἶναι ὀξεῖα, ἐπειδὴ ἡ γωνία γΒΔ εἶναι ὀρθή· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΛΖ μικροτέρα τῆς εὐθείας ΖΒ.

Λέγω ἐπίσης, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΜ.

῞Ας ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα δΜσ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ τομὴ ΑΒΓ εἶναι ἔλλειψις, καὶ ἡ κάθετος ΒΔΕ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Δ τῆς τομῆς, καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι Βδ, δΜ εἶναι ἐφαπτόμεναι, ἡ εὐθεῖα Βδ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δΜ (θ. 70). Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, $δΒ^2+ΒΖ^2$, μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων, $δΜ^2+ΜΖ^2$, ἐπειδὴ ἡ γωνία δΒΖ εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ ἡ γωνία δΜΖ εἶναι ὀξεῖα· θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΖΒ μικροτέρα τῆς ΖΜ (θ. 72). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, τουτέστιν ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη σΝΙ, ὅτι ἡ ΖΜ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΝ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΘΖ εἶναι μεγαλύτεραι ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μακρύτερον.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ ΘΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΝ.

῞Ας ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Θ, ἡ εὐθεῖα ΘΙ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ γωνία ΙΘΖ ὀρθὴ (θ. 28), ἡ δὲ γωνία ΙΝΖ εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΝΙ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐφαπτομένης ΙΘ (θ. 70)· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΘΖ μεγαλυτέρα τῆς ΖΝ, καὶ ἄρα μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὸ μέρος ΑΘ τῆς τομῆς, ἡ δὲ εὐθεῖα ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΖΘ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον. Εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα ΓΖ μικροτέρα τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ἄγονται πρὸς τὸ μέρος ΘΓ τῆς τομῆς, ὡς αἱ εὐθεῖαι Ζζ, Ζο, Ζη.

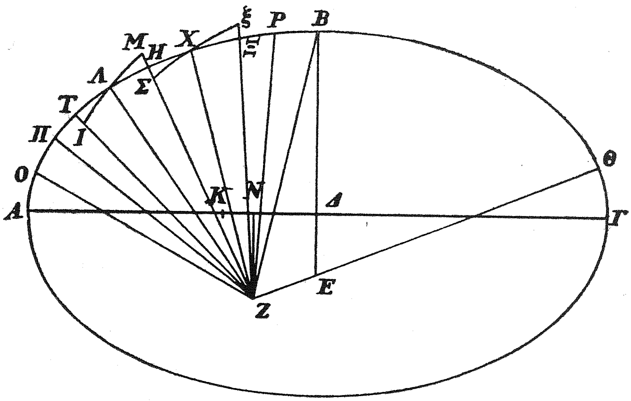
῎Εστω ἡ εὐθεῖα ΓΣ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΖ ἔστω κάθετος ἡ Γθ, ἡ ὁποία θὰ πέσῃ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τομῆς (1, 32), καὶ ἡ εὐθεῖα ζτ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον ζ. Ἡ ἐλαχίστη λοιπὸν εὐθεῖα, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου ζ πρὸς τὸν ἄξονα, θὰ εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς Γ, ἢ ἡ εὐθεῖα Ζζ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ γωνία τζΖ ὀξεῖα, καὶ ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΓ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς Ζζ, συμφώνως πρὸς τὸ δειχθὲν εἰς τὸ ἑξηκοστὸν τέταρτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὸ μέρος ΘΓ τῆς τομῆς, ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΖΓ θὰ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον. Ἡ εὐθεῖα ἄρα Ζζ εἶναι μικροτέρα τῆς Ζο. Λέγω ἀκόμη, ὅτι ἡ εὐθεῖα Ζο εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΘ. Αὕτη θὰ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση ἢ μεγαλυτέρα αὐτῆς. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεγαλυτέρα. Ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΖΡ μεγαλυτέρα τῆς ΖΘ, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς Ζο, καὶ ἂς γραφῇ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν εὐθεῖαν ΖΡ, ὁ κύκλος Ραβ, ὁ ὁποῖος θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν μεταξὺ τῶν σημείων Θ καὶ ο, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον α, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα Ζα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ Ζα εἶναι μακρύτερον τῆς εὐθείας ΖΓ, ἢ ἡ εὐθεῖα Ζο, ἡ Ζα θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Ζο. Ἀλλὰ ἡ Ζα = ΖΡ (κατὰ ὑπόθεσιν)· εἶναι ἄρα ἡ ΖΡ μεγαλυτέρα τῆς Ζο· ὅπερ ἄτοπον, διότι ἔχει δειχθῆ, ὅτι εἶναι μικροτέρα αὐτῆς. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ Ζο μεγαλυτέρα τῆς ΖΘ.

Ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΘ, καὶ ἂς ἀχθῇ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τούτων, εὐθεῖά τις ἐνδιάμεσος, ὡς ἡ Ζη. Ἡ εὐθεῖα Ζη θὰ εἶναι λοιπὸν μεγαλυτέρα τῆς Ζο, καὶ διὰ τοῦτο, μεγαλυτέρα τῆς ΖΘ. Ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ἡ Ζε, μεγαλυτέρα τῆς ΖΘ, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς Ζη, καὶ ἂς γραφῇ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἀκτῖνα τὴν εὐθεῖαν Ζε, ὁ κύκλος εκυ, ὅστις θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν μεταξὺ τῶν σημείων Θ καὶ ο. Ἔστω, ὅτι τὴν συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον κ, καὶ ἡ ἐπιζευγνυομένη εὐθεῖα Ζκ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Ζη, ἐπειδὴ αὕτη εἶναι μακρύτερον τῆς ΖΓ. Ἀλλὰ ἡ Ζκ = Ζε (ἐκ κατασκευῆς)· ἡ εὐθεῖα ἄρα Ζε εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Ζη. Ἀλλὰ ὑπετέθη, ὅτι αὕτη εἶναι μικροτέρα· ὅπερ ἄτοπον. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν Ζο εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΖΘ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΘ εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ πλησιέστερον εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον. Εἶναι ἄρα ἡ ΖΓ ἡ μικροτέρα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὸ μέρος ΓΘ τῆς τομῆς, ἡ δὲ ΖΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΑ· ἡ ΖΑ ἄρα εἶναι μικροτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς ὁλόκληρον τὴν τομὴν ΑΒΓ, καὶ ἡ ΖΘ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν τούτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

74

Ἐὰν ὑπὸ τὸν μέγαν ἄξονα ἐλλείψεως δοθῇ σημεῖόν τι, ἐκ τοῦ ὁποίου νὰ ἄγωνται πρὸς τὸ ἀπέναντι μέρος τῆς τομῆς μόνον δύο εὐθεῖαι, ἐπὶ τῶν ὁποίων ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστας εὐθείας, ἡ μεγαλυτέρα εὐθεῖα, ἡ ὁποία δύναται ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὸ μέρος αὐτὸ τῆς τομῆς θὰ εἶναι ἐκείνη ἐκ τῶν ληφθεισῶν δύο εὐθειῶν, ἡ ὁποία συναντᾷ (τέμνει) τὸν μικρὸν ἄξονα, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία εἶναι πλησιέστερον πρὸς αὐτήν, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον, ἡ δὲ μικροτέρα τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ εἶναι ἐκείνη, ἡ ἀγομένη πρὸς τὴν πλησιεστέραν κορυφὴν τῆς τομῆς.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, καὶ Ζ τὸ δοθὲν σημεῖον κάτωθεν τοῦ μεγάλου ἄξονος. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ κέντρου Δ τῆς τομῆς, ἡ εὐθεῖα ΒΔΕ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἔστω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἄγονται μόνον δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τὰ ἀποκοπτόμενα μέρη μεταξὺ τῆς τομῆς ΑΒΓ καὶ τοῦ ἄξονος εἶναι εὐθεῖαι ἐλάχισται. Ἔστωσαν αἱ δύο εὐθεῖαι αὗται αἱ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ σημείου Ζ, αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ὅτι οὐδεμία ἄλλη ἄγεται ἐπὶ τῆς ὁποίας ν' ἀποκόπτηται



ἐλαχίστη εὐθεῖα. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΘ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὸν μικρὸν ἄξονα, εἶναι μεγαλυτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, καὶ ὅτι ἡ πλησιεστέρα εὐθεῖα, καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τῆς ΖΘ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον, ἡ δὲ εὐθεῖα ΖΑ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἡ κάθετος ΖΝ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΖΝ δὲν δύναται νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς· διότι, ἐὰν αὕτη ἔπιπτεν ἐπὶ τοῦ κέντρου ἢ θὰ ἦτο ἀδύνατον ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἄλλη εὐθεῖα ἢ ἡ ΖΝ προεκτεινομένη ἐπὶ τῆς τομῆς, ἐπὶ τῆς ὁποίας θ' ἀπεκόπτετο ἐλαχίστη εὐθεῖα, ἢ θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀχθῶσι δύο ἄλλαι εὐθεῖαι ἴσαι, ἐφ' ἑκάστης τῶν ὁποίων θ' ἀπεκόπτετο ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 53 καὶ 54)· ὅπερ εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν· ἡ κάθετος λοιπὸν ΖΝ θὰ πέσῃ μεταξὺ τῶν σημείων Α, Δ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΝ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου, ἐπειδή, ἐὰν δὲν ἦτο μεγαλυτέρα, θὰ ἦτο ἀδύνατον ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ, μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος θὰ ἦτο ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 50). Ἡ εὐθεῖα ΑΝ θὰ εἶναι, ὡς εἴπομεν, μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου. Ἄς γίνῃ εὐθεῖα ΔΚ : ΚΝ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος, καὶ ἄς εὑρεθῶσι δύο μέσαι ἀνάλογοι μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΔΚ, καὶ ἄς ὑψωθῇ κάθετος, ὡς ἔγινε τοῦτο εἰς τὸ ἑξηκοστὸν τέταρτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, καὶ ἄς γίνῃ ἡ λοιπὴ κατασκευὴ μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ἡ εὐθεῖα ἡ παρέχουσα τὸν ὅρον τῆς συγκρίσεως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΝ (θ. 64). Ἡ εὐθεῖα ΖΝ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν οὕτω εὑρισκομένην· διότι, ἐὰν αὕτη ἦτο μεγαλυτέρα αὐτῆς, δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὸ μέρος ΑΒ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ὁποίας θ' ἀπεκόπτετο ἐλαχίστη εὐθεῖα. Ἐπὶ πλέον δὲν θὰ ἦτο αὕτη μικροτέρα ταύτης· διότι, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀχθῶσι πρὸς τὴν τομὴν ΑΒ δύο εὐθεῖαι ἐφ' ἑκάστης τῶν ὁποίων θ' ἀπεκόπτετο ἐλαχίστη εὐθεῖα (θ. 52), καὶ θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀχθῇ τρίτη εὐθεῖα ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὸ μέρος ΒΓ τῆς τομῆς (θ. 55). Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΝ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἐὰν τώρα δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒ ἢ μόνον μία εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ν' ἀποκόπτηται ἐλαχίστη εὐθεῖα, αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν ἄλλων εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων πρὸς τὴν τομὴν ΑΒ, θὰ εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς Α, ἢ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐπίσης ἐκ τοῦ σημείου Ζ. Ἄς ἀχθῶσι λοιπὸν ἐκ τοῦ σημείου Ζ αἱ εὐθεῖαι ΖΑ, ΖΟ, ΖΠ, ὁπότε εἶναι φανερόν, ὡς τοῦτο ἔγινε κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἑβδομηκοστοῦ δευτέρου καὶ ἑβδομηκοστοῦ τρίτου θεωρήματος τοῦ βιβλίου τούτου, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΑ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΖΟ, καὶ ἡ ΖΟ μικροτέρα τῆς ΖΠ. Λέγω ἐπίσης, ὅτι ἡ ΖΠ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΗ. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι μικροτέρα, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἴση. Ἔστω πρῶτον, ὅτι εἶναι ἴση, καὶ ἂς ἀχθῇ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τούτων, ἄλλη τις εὐθεῖα ἡ ΖΤ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΠ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΖΠ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ εὐθεῖα ΖΤ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ. Ἄς ληφθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΤ, ἄλλη εὐθεῖα μικροτέρα τῆς ΖΤ, ἀλλὰ μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ, ὡς ἡ ΖΙ, καὶ ἂς γραφῇ, μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΙ, ὁ κύκλος ΙΛΜ, ὅστις θὰ συναντήσῃ κατ' ἀνάγκην τὴν τομὴν ΤΗ. Ἔστω, ὅτι τὴν συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Λ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΖΛ, ἡ ὁποία οὖσα μακρύτερον τῆς εὐθείας ΑΖ, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΖΤ. Ὅθεν ἡ εὐθεῖα ΖΛ = ΖΙ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΖΙ μεγαλυτέρα τῆς ΖΤ. Ἀλλ' αὕτη εἶναι μικροτέρα αὐτῆς (τῆς ΖΤ)· ὅπερ ἄτοπον. Διὰ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΗ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΠ, καὶ ἄρα θὰ εἶναι μεγαλυτέρα αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα πάσης δυναμένης ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὸ μέρος ΑΗ τῆς τομῆς, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ πλησιεστέρα πρὸς τὴν ΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον, ἡ δὲ ΖΑ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τούτων.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὡς διὰ τὰς εὐθείας τὰς ἀγομένας μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Η, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΒ εἶναι μεγαλυτέρα πάσης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ζ μεταξὺ τῶν σημείων Η καὶ Β, καί, ὅτι ἡ πλησιεστέρα εὐθεῖα πρὸς τὴν ΖΒ, εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον. Λέγω ἐπίσης, ὅτι ἡ ΖΗ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων μεταξὺ τῶν σημείων Η, Β. Διότι, ἂς ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα, ὡς ἡ ΖΡ, καὶ ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἡ εὐθεῖα αὕτη νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ, ὁπότε θὰ εἶναι ἴση ἢ μικροτέρα. Ἔστω πρῶτον, ὅτι εἶναι ἴση, καὶ ἂς ἀχθῇ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΖΗ, ΖΡ, ἐνδιάμεσος εὐθεῖα ἡ ΖΞ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΖΡ, καὶ διὰ τοῦτο μικροτέρα τῆς ΖΗ. Ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΖΣ, μεγαλυτέρα τῆς ΖΞ, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς ΖΗ, καὶ ἂς γραφῇ, μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΣ, ὁ κύκλος ΣΧξ, συναντῶν τὴν τομὴν μεταξὺ τῶν σημείων Σ καὶ Η, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Χ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ΖΧ μικροτέρα τῆς ΖΞ, ἐπειδὴ αὕτη εἶναι μακρύτερον τῆς ΖΒ. Εἶναι ἄρα ἡ ΖΧ ἴση πρὸς τὴν Ζξ· ἡ εὐθεῖα ἄρα Ζξ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΞ. Ἀλλ' ὑπετέθη, ὅτι αὕτη εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι λοιπὸν ἴση ἡ εὐθεῖα ΖΡ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΗ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΡ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς τελευταίας αὐτῆς εὐθείας (τῆς ΖΗ). Εἶναι ἄρα ἡ ΖΒ ἡ μεγαλυτέρα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὸ μέρος ΑΒ τῆς τομῆς, καὶ ἡ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν εὐθεῖα εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

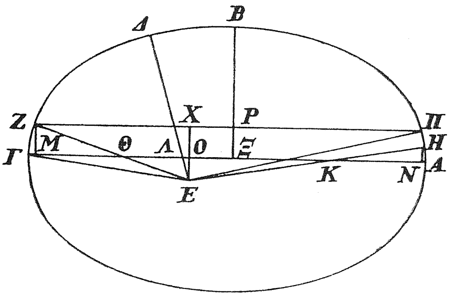
Ἐπειδὴ δὲ ἡ τομὴ ΑΒΓ εἶναι ἔλλειψις, τῆς ὁποίας ὁ μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, μικρὸς δὲ ἄξων ἡ ΒΔΕ, καὶ τὸ σημεῖον Ζ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΑΔΕ, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀχθῇ πρὸς τὸ μέρος ΒΓ τῆς τομῆς ἄλλη τις εὐθεῖα, ὡς ἡ ΖΘ, ἀποδεικνύεται, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΘ εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὸ μέρος ΒΓ τῆς τομῆς, καὶ ὅτι ἡ πλησιεστέρα πρὸς αὐτὴν εὐθεῖα εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον. Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΒ εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων πρὸς τὸ μέρος ΑΒ τῆς τομῆς, καὶ ὅτι ἡ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΘ ἡ μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς ὅλην τὴν τομὴν ΑΒΓ, καὶ ἐκεῖναι αἱ κείμεναι πλησιέστερον, καὶ πρὸς τὸ ἓν μέρος καὶ πρὸς τὸ ἄλλο αὐτῆς, εἶναι μεγαλύτεραι τῶν κειμένων μακρύτερον, ἡ δὲ εὐθεῖα ΖΑ εἶναι ἡ μικροτέρα ὅλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

75

Ἐὰν κάτωθεν τοῦ μεγάλου ἄξονος ἐλλείψεως δοθῇ σημεῖόν τι, ἐξ οὗ νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἄγωνται πρὸς τὴν τομὴν τρεῖς εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστας εὐθείας, καὶ δύο ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν τούτων ἔχωσιν ἀχθῆ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μικροῦ ἄξονος, πρὸς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ σημεῖον, καὶ ἐὰν ἡ τρίτη εὐθεῖα ἔχῃ ἀχθῇ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος, ἡ τρίτη αὕτη εὐθεῖα, ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ ἄλλο μέρος, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀχθείσης μεταξὺ τῆς μέσης τῶν τριῶν προηγουμένων εὐθειῶν καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς τῆς πλησιεστέρας πρὸς τὸ δοθὲν σημεῖον, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ πλησιεστέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν αὐτὴν εὐθεῖαν, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον, μεταξὺ δὲ τῶν ἄλλων εὐθειῶν τῶν εὑρισκομένων μεταξὺ τῆς μέσης τῶν τριῶν εὐθειῶν καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, τῆς πλησιεστέρας πρὸς τὸ δοθὲν σημεῖον, μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀγομένη πρὸς τὴν κορυφὴν τὴν πλησιεστέραν πρὸς τὸ δοθὲν σημεῖον, καὶ ἡ πλησιέστερον καὶ πρὸς τὸ ἓν καὶ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος αὐτῆς θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, καὶ μεταξὺ τῶν δύο τούτων μεγίστων εὐθειῶν, ἡ μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ ἀπέναντι μέρος (τὸ ὑποτεινόμενον ὑπὸ τοῦ μικροῦ ἄξονος), ἐκείνου ὅπου εὑρίσκεται τὸ δοθὲν σημεῖον.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Ξ, καὶ ἔστω ΒΞ ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν τομήν, κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ὑπὸ τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ δοθὲν σημεῖον Ε. Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου τούτου τρεῖς εὐθεῖαι, ὡς αἱ ΕΗ, ΕΖ, ΕΔ, ἐπὶ τῶν ὁποίων ὁ ἄξων ἀποκόπτει ἐλαχίστας εὐθείας, καὶ ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο, ὡς αἱ ΕΖ, ΕΔ, εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπου εὑρίσκεται τὸ σημεῖον Ε (πρὸς τὸ αὐτὸ ἥμισυ τῆς ἐλλείψεως, τὸ χωριζόμενον ὑπὸ τοῦ μικροῦ ἄξονος), καὶ τῶν ὁποίων εὐθειῶν ἡ τρίτη, ἡ ΕΗ , εἶναι πρὸς τὸ ἀπέναντι μέρος. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΗ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς ὁλόκληρον τὴν τομὴν ΑΒΓ, καὶ ὅτι μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων πρὸς τὸ μέρος τῆς τομῆς τὸ κείμενον μεταξὺ τῶν σημείων Δ καὶ Α, ἡ πλησιέστερον καὶ πρὸς τὸ ἓν καὶ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς εὐθείας ΕΗ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΔΛ, ΖΘ εἶναι ἐλάχισται εὐθεῖαι, ἀποδεικνύεται, ὡς εἰς τὴν παραβολὴν (θ. 72), ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἐκείνων, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὸ μέρος ΓΔ τῆς τομῆς, καὶ ὅτι ἡ πλησιεστέρα εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον. Ὁμοίως δέ, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΔΛ καὶ ΗΚ εἶναι ἐλάχισται εὐθεῖαι, ἀποδεικνύεται, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ὅτι ἡ ΕΗ εἶναι μεγαλυτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὸ μέρος (τῆς τομῆς) ΑΔ.



Λέγω ἀκόμη, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ.

Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Ζ, Η, Ε αἱ κάθετοι ⟨ἐπὶ τὸν μεγάλον ἄξονα⟩, αἱ ΖΜ, ΗΝ, ΕΟ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΜΞ : ΜΘ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος (θ. 15), καὶ θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΝΞ : ΝΚ = πλαγία διάμετρος : παράμετρος· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΞΜ : ΜΘ = ΞΝ : ΝΚ. Ὁ λόγος ἄρα ΟΜ : ΜΘ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΞΜ : ΜΘ· ὁ λόγος λοιπὸν ΟΜ:

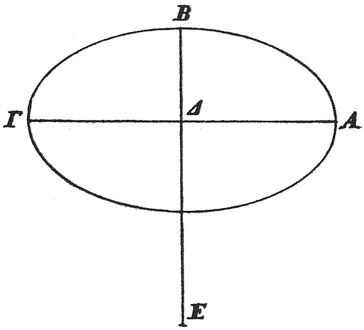
ΜΘ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΞΝ : ΝΚ, καὶ κατὰ μείζονα λόγον μικρότερος τοῦ λόγου ΟΝ : ΝΚ, καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 17), ὁ λόγος ΟΘ : ΘΜ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΟΚ : ΚΝ. Ἀλλ' εἶναι ΟΘ : ΘΜ = ΕΟ : ΖΜ, καὶ ΟΚ : ΚΝ = ΕΟ : ΗΝ· ὁ λόγος ἄρα ΕΟ : ΖΜ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς αὐτῆς εὐθείας ⟨ΖΜ⟩ : ΗΝ. Εἶναι ἄρα φανερόν, ὅτι ἡ ΖΜ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΗΝ, καὶ ἄρα ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Ζ, παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα ΑΓ, θὰ εἶναι μακρύτερον τοῦ σημείου Α, ἢ τὸ σημεῖον Η.

Ἔστω, ὅτι ἡ παράλληλος αὕτη εἶναι ἡ ΖΡΠ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ κάθετος ΕΟ μέχρι τοῦ σημείου Χ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΖΡ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΡΠ, ἡ εὐθεῖα ΠΧ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΧΖ. Ἀλλὰ ἡ ΕΧ, κοινὴ εἰς ἕκαστον τῶν τριγώνων ΕΧΖ, ΕΧΠ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΖΠ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΕΠ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΗ μεγαλυτέρα τῆς ΕΠ· εἶναι ἄρα αὕτη μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΕΗ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τῶν εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ, καὶ αἱ πλησιέστεραι ἢ αἱ μακρύτεραι εὐθεῖαι, ἀπὸ ταύτης τῆς εὐθείας, θὰ ἐκφράζωνται καθ' ὃν τρόπον ἐλέχθη εἰς τὸ θεώρημα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

76

Ἐὰν ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα τῆς ἐλλείψεως διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου δὲν δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὰ ἀπέναντι τεταρτημόρια τῆς ἐλλείψεως οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ν' ἀποκόπτῃ ἐλαχίστην εὐθεῖαν, ἡ μεγαλυτέρα εὐθεῖα ἡ ὁποία δύναται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου πρὸς τὴν τομὴν θὰ εἶναι ἡ κάθετος αὕτη προεκτεινομένη, καὶ ἡ πλησιεστέρα πρὸς αὐτὴν εὐθεῖα θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.

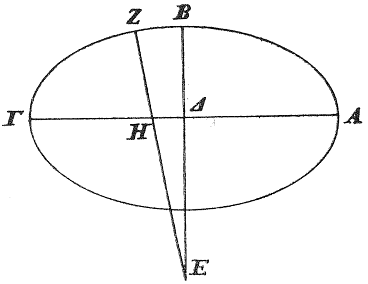
Ἔστω ἡ ἔλλειψις ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Δ, δοθὲν δὲ τὸ σημεῖον Ε· ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Ε, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ἔστω ἡ ΕΔ, ἡ ὁποία προεκτείνεται μέχρι τοῦ σημείου Β, καὶ ἔστω, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν ἐκ τοῦ σημείου Ε νὰ ἀχθῇ πρὸς τὴν τομὴν ΒΓ, ἄλλη εὐθεῖα, ἢ ἡ ΒΔ, ἐπὶ τῆς ὁποίας τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος θὰ εἶναι ἐλαχίστη εὐθεῖα. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΒ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομήν.



Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομὴν ΒΓ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ν' ἀποκόπτηται ἐλαχίστη εὐθεῖα, αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ε, θὰ εἶναι μακρύτερον τῆς κορυφῆς Γ, ἢ αἱ ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι (θ. 53). Ἐὰν δὲ ἀχθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι, ἀποδεικνύεται, καθ' ὃν τρόπον ἐδείχθη εἰς τὸ ἑβδομηκοστὸν δεύτερον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΒ εἶναι μεγαλυτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομήν, καὶ ὅτι ἡ πλησιεστέρα εὐθεῖα εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

77

Ἐὰν ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα μιᾶς ἐλλείψεως διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, καὶ ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ πρὸς τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο τεταρτημόριον τῆς τομῆς εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ν' ἀποκόπτῃ εὐθεῖαν ἐλαχίστην, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσιν ἐκ δοθέντος σημείου εἰς τὸ αὐτὸ τεταρτημόριον, καὶ ἡ πλησιεστέρα πρὸς τὴν μεγίστην αὐτὴν εὐθεῖαν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον.



Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, καὶ κέντρον τὸ σημεῖον Δ, ὑπὸ τὸν ἄξονα δὲ τὸ σημεῖον Ε, ἐκ τοῦ ὁποίου ἄγεται ἡ κάθετος ΕΔ, καὶ ἔστω, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ε, εἰς τὸ τεταρτημόριον ΓΒ, ἄλλη τις εὐθεῖα, ὡς ἡ ΕΗΖ, ἐπὶ τῆς ὁποίας ν' ἀποκόπτηται εὐθεῖα ἐλαχίστη. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Ε εἰς τὸ τεταρτημόριον ΓΒ, καὶ ὅτι ἡ πλησιεστέρα εὐθεῖα, καὶ πρὸς τὸ ἓν καὶ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ ΒΔ, ΖΗ εἶναι δύο ἐλάχισται εὐθεῖαι, αἵτινες προεκτεινόμεναι συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Ε, αἱ ἐλάχισται εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐξ οἱωνδήποτε σημείων τῆς τομῆς, μεταξὺ τῶν σημείων Γ καὶ Ζ, θὰ συναντήσωσι τὸν ἄξονα μακρύτερον τῆς κορυφῆς Γ, ἢ αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ οἱαδήποτε αὐτὰ σημεῖα πρὸς τὸ σημεῖον Ε (θ. 46), αἱ ἐλάχισται δὲ εὐθεῖαι, αἱ ἀγόμεναι ἐκ σημείων τῆς τομῆς, μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Ζ, θὰ εἶναι πλησιέστεραι πρὸς τὴν κορυφὴν Γ, ἢ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ σημείου Ε, πρὸς αὐτὰ τὰ ἴδια σημεῖα τῆς τομῆς (θ. 46). Τούτου δειχθέντος, ἀποδεικνύεται, τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐφαπτομένων, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ ἑβδομηκοστὸν δεύτερον θεώρημα, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν τομὴν ΒΓ, καὶ ὅτι ἡ πλησιεστέρα πρὸς αὐτὴν εὐθεῖα εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶναι μακρύτερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

ΚΩΝΙΚΩΝ
βιβλίον 6ον

᾿Απολλώνιος ᾿Αττάλῳ χαίρειν

Σοῦ ἀποστέλλω τὸ ἕκτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν. Τοῦτο περιλαμβάνει προτάσεις σχετικὰς πρὸς τὰς κωνικὰς τομάς, καὶ πρὸς τὰ τμήματα τῶν τομῶν τούτων τὰ ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ὅμοια καὶ ἀνόμοια, τὰ ὁποῖα δὲν ἔτυχον διαπραγματεύσεως ὑπὸ τῶν προηγηθέντων ἡμῶν. Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο θὰ εὕρῃς μάλιστα, πῶς εἰς ἕνα δεδομένον ὀρθογώνιον κῶνον πρέπει ν' ἀποκόπτηται τομὴ ἴση πρὸς δοθεῖσαν τομήν, καὶ πῶς πρέπει νὰ κατασκευάζηται κῶνος, ὅστις, ὅμοιος πρὸς δοθέντα κῶνον, νὰ παρέχῃ δοθεῖσαν τομὴν κώνου. Λέγω προσέτι, ὅτι πραγματεύομαι τὰ θέματα αὐτὰ κατὰ τρόπον περισσότερον ἀνεπτυγμένον καὶ περισσότερον σαφῆ ἐκείνου, καθ' ὃν ἔγραψαν οἱ πρὸ ἐμοῦ ἐπὶ τῶν θεμάτων τούτων. Ἔρρωσο.

Ὁ ρ ι σ μ ο ὶ

1. Κωνικαὶ τομαὶ λέγονται ἴσαι, ὅταν ἡ μία ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ συμπίπτωσι παντοῦ καὶ νὰ μὴ τέμνωνται μεταξύ των, ἄλλως αἱ τομαὶ λέγονται ἄνισοι.

2. Κωνικαὶ τομαὶ καλοῦνται ὅμοιαι, ἐκεῖναι εἰς τὰς ὁποίας εὐθεῖαι εἶναι τεταγμένως κατηγμέναι ἐπὶ τὸν ἄξονα ἑκάστης τῶν τομῶν τούτων, καὶ ἕκαστος ἄξων εἶναι διῃρημένος εἰς τὸ

αὐτὸ πλῆθος μερῶν, ἢ ὅταν εὑρίσκωνται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον μεταξύ των, αἱ τεταγμένως δὲ κατηγμέναι εὐθεῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἀνάλογοι πρὸς τὰ μέρη τοῦ ἄξονος, τὰ ὁποῖα αὗται ἀποκόπτουσι πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς· ἄλλως αἱ τομαὶ καλοῦνται ἀνόμοιαι.

3. Καλοῦμεν βάσιν ἑνὸς τμήματος τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ὑποτείνει ἓν τόξον περιφερείας κύκλου, ἢ ἓν τμῆμα κωνικῆς τομῆς.

4. Καλοῦμεν διάμετρον ἑνὸς τμήματος τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συναντῶσα παραλλήλους εὐθείας πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τμήματος διαιρεῖ αὐτὰς εἰς δύο ἴσα μέρη.

5. Κορυφὴν ἑνὸς τμήματος καλοῦμεν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται ἡ διάμετρος.

6. Ἴσα τμήματα καλοῦμεν ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχοντα ἴσας βάσεις ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἄλληλα παντοῦ καὶ δὲν τέμνονται μεταξύ των. Ἄλλως ταῦτα λέγονται ἄνισα.

7. Καλοῦμεν ὅμοια τμήματα, ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις σχηματίζουσι μετὰ τῶν διαμέτρων γωνίας ἴσας, ὡς καὶ ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς παραλλήλων ἔχει ἀχθῆ ἀντιστοίχως πρὸς τὰς βάσεις, καὶ ὅταν ἑκάστη τῶν διαμέτρων ἔχει διαιρεθῆ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τούτων εἰς μέρη ἀντιστοίχως ἀνάλογα, οἱ λόγοι τῶν παραλλήλων τούτων καὶ τῶν βάσεων πρὸς τὰ μέρη τῶν διαμέτρων, τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀποκοπτομένων, εἶναι ἀντιστοίχως οἱ αὐτοί.

8. Λέγομεν, ὅτι κωνικὴ τομὴ κεῖται ἐπὶ κώνου, ἢ κῶνος περιβάλλεται ὑπὸ κωνικῆς τομῆς, ὅταν ἡ τομὴ αὕτη περιλαμβάνεται ὁλόκληρος εἰς τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ἀποκοπτομένην

μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἢ καλλίτερον, ὅταν προεκταθείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς κάτωθεν τοῦ κώνου, ἡ τομὴ αὕτη περιλαμβάνεται ὁλόκληρος εἰς τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τὸ καλύπτον τὴν βάσιν, ἢ ἀκόμη καλλίτερον, ὅταν ἡ τομὴ αὕτη περιλαμβάνεται ἐν μέρει μὲν εἰς τὴν μίαν, ἐν μέρει δὲ εἰς τὴν ἄλλην ἐπιφάνειαν.

9. Λέγομεν, ὅτι ὀρθογώνιοι κῶνοι εἶναι ὅμοιοι, ὅταν οἱ λόγοι τῶν ἀξόνων των πρὸς τὰς διαμέτρους τῶν βάσεών των εἶναι οἱ αὐτοί.

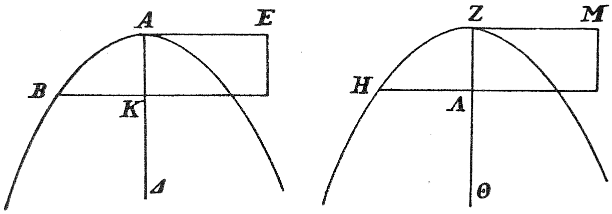
10. Θὰ ὀνομάζωμεν σχῆμα κωνικῆς τομῆς, κατασκευασθὲν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἄξονος ἢ ὑπὸ τῆς διαμέτρου ταύτης καὶ τῆς παραμέτρου τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς αὐτήν.

1

Ὅταν αἱ παράμετροι δύο παραβολῶν εἶναι ἴσαι, αἱ τομαὶ αὗται εἶναι ἴσαι, καὶ ὅταν αἱ τομαὶ αὗται εἶναι ἴσαι αἱ παράμετροι αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

Ἔστωσαν δύο παραβολαί, τῶν ὁποίων ἄξονες εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΖΘ, καὶ αἱ παράμετροι αὐτῶν αἱ ΑΕ, ΖΜ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Λέγω, ὅτι αἱ τομαὶ εἶναι ἴσαι.

Διότι, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ ὁ ἄξων ΑΔ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΖΘ, ἡ μία τομὴ θὰ συμπέσῃ ἐπὶ τῆς ἄλλης, καὶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς αὐτὴν παντοῦ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω, ὅτι δὲν εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι μέρος τῆς τομῆς ΑΒ δὲν εἶναι ἴσον πρὸς μέρος τῆς τομῆς ΖΗ· ἂς ληφθῇ εἰς τὸ μέρος τὸ μὴ ἴσον τῆς τομῆς ΖΗ, σημεῖόν τι τὸ Β, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐξ αὐτοῦ ἡ εὐθεῖα ΒΚ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΚΕ. Ἄς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΖΛ = ΑΚ, ἡ ΗΛ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΛΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ πλευραὶ ΚΑ, ΑΕ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς ΛΖ, ΖΜ ἀντιστοίχως, τὸ ὀρθογώνιον ΚΕ = ὀρθογώνιον ΛΜ. Ἀλλὰ KB^2 = ὀρθογώνιον ΚΕ (1, 11), καὶ $ΛH^2$ = ὀρθογώνιον ΛΜ· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΚΒ, ΛΗ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἐὰν ἄρα ἐφαρμοσθῇ ὁ εἷς ἄξων ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΚ νὰ συμπέσῃ ἐπὶ τῆς ΛΖ, ἡ ΒΚ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΛΗ, καὶ τὸ σημεῖον



Β ἐπὶ τοῦ σημείου Η. Ὑπετέθη ὅμως, ὅτι τὸ σημεῖον Β δὲν θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς τομῆς ΖΗ· ὅπερ ἄτοπον. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ μία τομὴ δὲν δύναται νὰ μὴ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἄλλην.

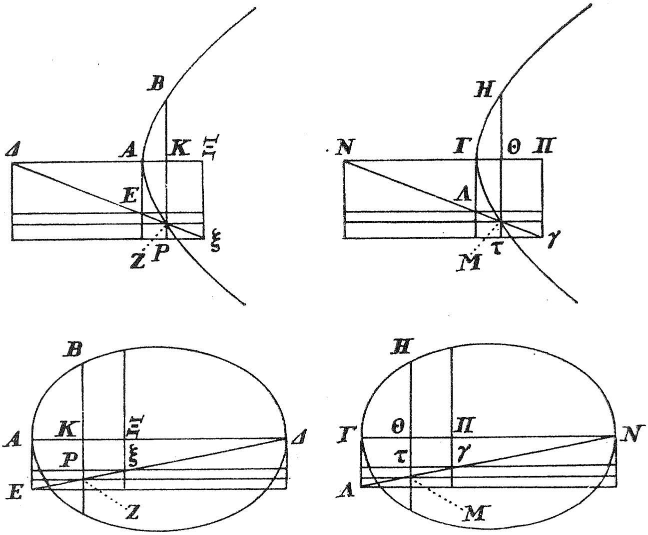
Ἐὰν τώρα ἡ μία τομὴ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἄλλην, ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΚ = ΖΛ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν εἰς τὰ σημεῖα Κ, Λ αἱ κάθετοι ΒΚ, ΗΛ, καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ΚΕ, ΛΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ τομὴ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΖΗ, ὁ ἄξων ΑΚ θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσος πρὸς τὸν ἄξονα ΖΛ· διότι ἄλλως ἡ παραβολὴ ΖΗ θὰ εἶχε δύο ἄξονας· ὅπερ δὲν συμβαίνει· τὸ σημεῖον ἄρα Κ θὰ συμπέσῃ πρὸς τὸ σημεῖον Λ, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΖΛ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Β πίπτει ἐπὶ τοῦ σημείου Η, ἡ εὐθεῖα ΒΚ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΛΗ, καὶ ἑπομένως τὰ ὀρθογώνια ΚΕ, ΛΜ θὰ εἶναι ἴσα (1, 11). Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΑΚ ὑπετέθη ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΛ· ἡ πλευρὰ ἄρα ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΖΜ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2

Ὅταν τὰ σχήματα τὰ κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν πλαγίων ἀξόνων ὑπερβολῶν ἢ ἐλλείψεων εἶναι ἰσοδύναμα καὶ ὅμοια μεταξύ των, αἱ τομαὶ αὗται θὰ εἶναι ἴσαι, καὶ ὅταν αἱ τομαὶ αὗται εἶναι ἴσαι, τὰ σχήματα τὰ κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν πλαγίων ἀξόνων των, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα, ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα. (Σχῆμα ἐπὶ τοῦ πλαγίου ἄξονος = ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ὁ πλάγιος ἄξων καὶ ἡ ἄλλη ἡ παράμετρος).

Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΗ δύο ὑπερβολαὶ ἢ δύο ἐλλείψεις, τῶν ὁποίων ἄξονες εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΓΘ, καὶ δύο σχήματα ΔΕ, ΝΛ, ἰσοδύναμα καὶ ὅμοια κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν πλαγίων ἀξόνων. Λέγω, ὅτι αἱ τομαὶ ΑΒ, ΓΗ εἶναι ἴσαι.

Ἂς ἐφαρμοσθῇ ὁ ἄξων ΑΚ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΓΘ, ὁπότε ἡ μία τομὴ θὰ συμπέσῃ ἐπὶ τῆς ἄλλης. Διότι, ἐὰν δὲν συμπέσῃ μέρος τῆς τομῆς ΑΒ θὰ εἶναι ἐκτὸς τῆς τομῆς ΓΗ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ μέρους τούτου σημεῖόν τι Β, ἐκ τοῦ ὁποίου ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΚ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΔΖ. Ἂς ληφθῇ ἀκόμη ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΓΘ εὐθεῖά τις ἴση πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΗΘΜ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΓΘ, εἰς τὸ σημεῖον Θ, ἂς συμπληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΝΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΑΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΛΓ, ΓΘ, τὰ ὀρθογώνια ΕΚ, ΛΘ θὰ εἶναι ἴσα. Εἶναι ἄρα τὰ ὀρθογώνια ΛΜ, ΕΖ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα, διότι εἶναι ὅμοια πρὸς τὰ ὅμοια ὀρθογώνια ΔΕ, ΝΛ. Ἀλλὰ αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΓΘ εἶναι ἴσαι μεταξύ των· τὰ ὀρθογώνια ἄρα ΕΖ, ΛΜ εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ καὶ τὰ ὀρθογώνια ΚΕ, ΘΛ εἶναι ἴσα· θὰ εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΑΖ = ὀρθογώνιον



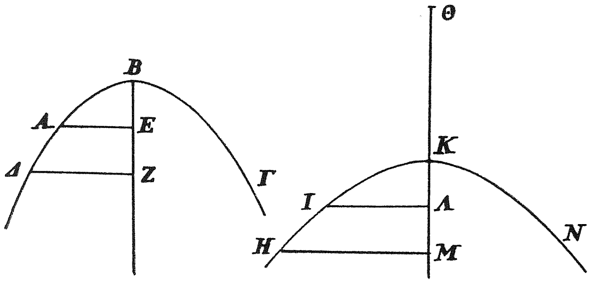
ΓΜ. Τὰ τετράγωνα ἄρα τῶν τεταγμένως κατηγμένων εὐθειῶν ΒΚ, ΗΘ θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τελευταῖα ταῦτα ὀρθογώνια (1, 12 καὶ 13)· ἐὰν λοιπὸν ὁ εἷς ἄξων ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἡ εὐθεῖα ΒΚ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΘΗ, καὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ σημείου Η· εἶναι ἄρα ἄτοπον νὰ ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Β θὰ πέσῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς ΓΗ, καὶ ἄρα ἡ τομὴ ΑΒ ὁλόκληρος θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν τομὴν ΓΗ.

Ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ εἶναι ἴσαι, ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΚ = ΓΘ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΚΒ, ΘΗ, καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ΔΕ, ΔΖ, ΝΛ, ΝΜ. Ἐὰν ἡ τομὴ ΑΒ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς τομῆς ΓΗ, ὁ ἄξων ΑΚ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΓΘ. Διότι, ἐὰν δὲν πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου, θὰ ἔχωμεν δύο ἄξονας εἰς τὴν ὑπερβολὴν καὶ τρεῖς εἰς τὴν ἔλλειψιν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΚ πίπτει ἐπὶ τῆς ΓΘ, ἥτις εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν, τὸ σημεῖον Κ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Θ· καὶ ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΚΒ, ΘΗ συμπίπτουσι, τὸ σημεῖον Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Η· ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΚΒ, ΘΗ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τὰ ὀρθογώνια ἄρα ΑΖ, ΓΜ εἶναι μεταξύ των ἴσα. (1, 12 καὶ 13). Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΑΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΘ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΚΖ = ΘΜ. Ὁμοίως, ἐὰν ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΞ = ΓΠ, ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα Ξξ = εὐθεῖαν Πγ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΡΖ = ΜΤ, καὶ εὐθεῖα Ρξ = Τγ. Τὰ ὀρθογώνια ἄρα Ζξ, Μγ θὰ εἶναι ἰσοδύναμα καὶ ὅμοια (Εὐκλ. 6, 24), καὶ τὰ ὀρθογώνια ΔΖ, ΝΜ θὰ εἶναι ἐπίσης ὅμοια. Ἀλλὰ αἱ εὐθεῖαι ΚΖ, ΘΜ εἶναι ἴσαι· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΔΚ, ΘΝ εἶναι ἐπίσης ἴσαι. Αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΔ, ΓΝ εἶναι ἴσαι, διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΓΘ εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ τὰ ὀρθογώνια ΔΕ, ΝΛ εἶναι ὅμοια· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΕ, ΓΛ εἶναι ἴσαι. Εἶναι ἄρα τὰ ὀρθογώνια ΔΕ, ΝΛ, τὰ ὁποῖα εἶναι σχήματα κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν ἀξόνων ἴσων τομῶν, ὅμοια καὶ ἰσοδύναμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὁμοίως, ἐὰν αἱ τομαὶ εἶναι παραβολαί· ἐὰν εὐθεῖαι, τεταγμένως κατηγμέναι συναντῶνται, εἰς ἑκάστην τομήν, οἱωνδήποτε διαμέτρων ὑπὸ ἴσας γωνίας, καὶ αἱ παράμετροι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διαμέτρους αὐτὰς εἶναι ἴσαι, αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ἴσαι. Καὶ ἐὰν αἱ τομαὶ εἶναι ὑπερβολαὶ ἢ ἐλλείψεις· ἐὰν τεταγμένως κατηγμέναι εὐθεῖαι συναντῶσι τὰς διαμέτρους ὑπὸ ἴσας γωνίας, καὶ ἐὰν τὰ κατεσκευασμένα σχήματα ἐπὶ τῶν διαμέτρων τούτων εἶναι ἰσοδύναμα καὶ ὅμοια μεταξύ των, αἱ τομαὶ αὗται θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσαι. Τοῦτο ἀποδεικνύεται, ὡς ἐλέχθη καὶ ὅταν ἐπρόκειτο περὶ τῶν ἀξόνων.

3

Εἶναι φανερόν, ὅτι μία ἔλλειψις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἄλλας τομάς, διότι αὕτη μὲν εἶναι κλειστή, ἐκεῖναι δὲ ἀπεριόριστοι. Λέγω ἀκόμη, ὅτι οὐδεμία παραβολὴ εἶναι ἴση πρὸς μίαν ὑπερβολήν.

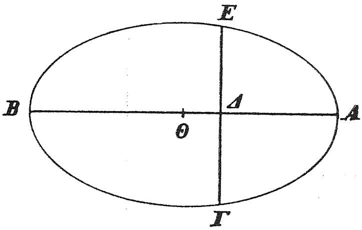


Ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΗΙΚΝ, καὶ ἔστω, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ὅτι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΒΖ, ΚΜ οἱ ἄξονες τῶν τομῶν· ἔστω ἡ ΚΘ πλαγία διάμετρος τῆς ὑπερβολῆς καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΕ = ΚΛ καὶ ΒΖ = ΚΜ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΔΖ καὶ ΙΛ, ΗΜ κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας.

Ἐὰν λοιπὸν αἱ τομαὶ εἶναι ἴσαι, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, καὶ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Α, Δ θὰ πέσωσιν ἐπὶ τῶν σημείων Λ, Μ, Ι, Η. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα $ZB : BE = \Delta Z^2 : EA^2$ (1, 20)· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα $MK : K\Lambda = MH^2 : \Lambda I^2$. Ὅπερ ἀδύνατον, διότι κατὰ τὸ εἰκοστὸν πρῶτον θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου εἶναι $MH^2 : I\Lambda^2 =$ ὀρθογώνιον $\Theta M \times MK$: ὀρθογώνιον $\Theta\Lambda \times \Lambda K$. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ παραβολὴ ἴση πρὸς τὴν ὑπερβολήν.

4

Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν ἀχθῇ διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖά τις καταλήγουσα καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τῆς τομῆς, αὕτη θὰ διαιρῇ τὴν τομὴν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς θὰ εἶναι διῃρημένον εἰς δύο ἴσα μέρη.

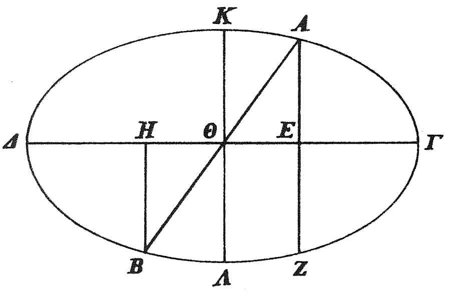


Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, κέντρον αὐτῆς τὸ Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, ἥτις ἔστω ὁ εἷς τῶν ἀξόνων τῆς τομῆς. Λέγω, ὅτι ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΓΒ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΕΒ, ὥστε ὁλόκληρον τὸ χωρίον ΑΓΒ νὰ πέσῃ καὶ νὰ ἐφαρμοσθῇ πανταχοῦ ἐπὶ τοῦ χωρίου ΑΕΒ.

Διότι, ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι ἡ καμπύλη ΑΓΒ δὲν ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΑΕΒ καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι Γ ἐπὶ τοῦ μὴ ἐφαρμόζοντος μέρους καὶ ἡ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ΓΔ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΒ ἂς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου Ε τῆς τομῆς. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ θὰ πέσῃ λοιπὸν ἐπὶ τῆς ΔΕ, ἐπειδὴ αἱ πρὸς τὸ Δ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ τὸ σημεῖον Γ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Ε. Εἶναι ἄρα ἄτοπον νὰ ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Γ δὲν θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς τομῆς ΑΕΒ. Ἡ καμπύλη ἄρα ΑΓΒ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΕΒ, καὶ θὰ ἐφαρμόσῃ παντοῦ ἐπ' αὐτῆς, καὶ ἡ ἐπιφάνεια ΑΓΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ΑΕΒ, καὶ ἄρα ἡ καμπύλη εἶναι ἴση πρὸς τὴν καμπύλην, καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

Ἔστω τώρα, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ δὲν εἶναι εἷς τῶν ἀξόνων, ὡς εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΚΛ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ⟨ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα⟩ αἱ ΑΕ, ΒΗ. Ἐὰν λοιπὸν ἐφαρμοσθῇ ἡ καμπύλη ΓΑΔ ἐπὶ τῆς καμπύλης ΓΖΔ, ὡς τοῦτο ἔγινεν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὸ σημεῖον Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Α καὶ ἡ ἐπιφάνεια ΑΓΕ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ΓΖΕ. Ὁμοίως δέ, ἡ ἐπιφάνεια ΚΓΛ θὰ

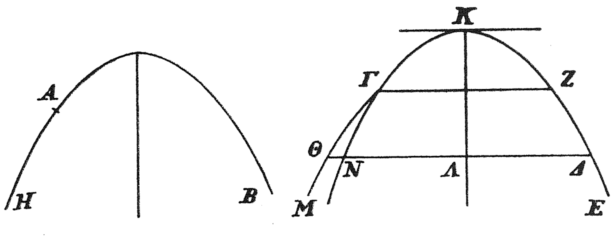


πέσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ΚΔΛ, ἡ εὐθεῖα ΕΘ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΘΗ, καὶ ἡ ΕΖ ἐπὶ τῆς ΒΗ, ἐπειδὴ εἶναι εὐθεῖα ΕΘ = ΘΗ καὶ ΕΖ = ΒΗ. Ἡ ἐπιφάνεια ἄρα ΓΕΖ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ΔΗΒ, καὶ ἑπομένως, ἡ ἐπιφάνεια ΑΓΕ θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ἐπιφανείας ΒΔΗ πρὸς τὴν ὁποίαν εἶναι ἴση, καὶ εἶναι ἐπίσης ἴση ἡ καμπύλη ΑΓ πρὸς τὴν καμπύλην ΔΒ. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΕΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΗΘ· εἶναι ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ΑΓΘ ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ΒΔΘ, καὶ ἡ καμπύλη ΑΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν καμπύλην ΒΛ. Ἡ καμπύλη ἄρα ΑΚΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν καμπύλην ΓΛΒ, ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια ΑΚΔΒ εἶναι ἴση πρὸς ὁλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν ΑΓΒ, καὶ ὁλόκληρος ἡ καμπύλη ΑΚΔΒ εἶναι ἴση πρὸς ὁλόκληρον τὴν καμπύλην ΑΓΛΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6

Ἐὰν μέρος κωνικῆς τομῆς ἐφαρμόζῃ ἐπὶ μέρους ἄλλης κωνικῆς τομῆς, ὁλόκληρος ἡ μία κωνικὴ τομὴ θὰ εἶναι ἴση πρὸς ὁλόκληρον τὴν ἄλλην κωνικὴν τομήν.

Ἔστω ΑΒ τὸ τμῆμα τῆς τομῆς ΗΑΒ, τὸ ὁποῖον ἐφαρμο-



σθὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΓΔ τῆς τομῆς ΓΔΕ. Λέγω, ὅτι ἡ τομὴ ΗΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΓΔΕ.

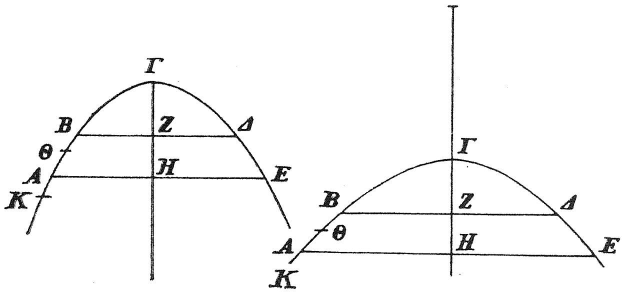
Διότι, ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι τὸ μέρος ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέρος ΓΔ, καὶ τὸ ὑπόλοιπον μέρος ΑΗ, τῆς μιᾶς τομῆς, δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον μέρος ΓΝ τῆς ἄλλης τομῆς, καὶ ὅτι αἱ τομαὶ γίνονται, ὡς αἱ ΔΓΜ, ΔΓΝ. Ἄς ληφθῇ σημεῖόν τι Θ ἐπὶ τοῦ μέρους ΓΜ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΘ, ἂς ἀχθῇ εἰς τὴν τομὴν ΓΔΕ, ἡ διάμετρος ΚΛ, ἡ ὁποία διαιρεῖ τὴν ΔΘ εἰς δύο ἴσα μέρη. Εἶναι λοιπὸν ἡ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ΓΔΕ εἰς τὸ σημεῖον Κ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΘ. Ἀλλὰ ἡ διάμετρος ΚΛ διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη ὅλας τὰς εὐθείας τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΘ· ἐὰν ἄρα ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΘ, ἡ εὐθεῖα ΚΛ θὰ διαιρῇ τὴν παράλληλον αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη· ὥστε ἡ ΓΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς ΔΓΜ εἰς τὸ σημεῖον Κ. Ἀλλὰ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι ἐπίσης ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ΔΓΝ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΚΛ εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς ΔΓΝ, ἡ ὁποία θὰ διαιρῇ τὴν εὐθεῖαν ΔΝ εἰς δύο ἴσα μέρη, εἰς τὸ σημεῖον Λ (2, 7). Ἀλλὰ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα διαιρεῖ τὴν ΔΘ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Λ· ὅπερ ἄτοπον. Ἡ τομὴ ἄρα ὁλόκληρος, ἡ ΒΑΗ, ἐφαρμοζομένη ἐπὶ ὁλοκλήρου τῆς τομῆς ΔΓΝ, ἐφαρμόζει παντοῦ καὶ εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7

Ἐὰν εἰς παραβολὴν ἢ ὑπερβολὴν προεκταθῶσιν αἱ τεταγμένως κατηγμέναι εὐθεῖαι μέχρι τοῦ ἄλλου μέρους τῆς τομῆς, θ' ἀποκόψωσιν καὶ πρὸς τὸ ἓν μέρος καὶ πρὸς τὸ ἄλλο τοῦ ἄξονος τμήματα, τὰ ὁποῖα ἐφαρμοζόμενα ⟨ἐπ' ἄλληλα⟩ θὰ εἶναι ἴσα, ἀλλὰ τὰ ὁποῖα δὲν συμπίπτουσι κατ' οὐδένα τρόπον μὲ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχουσι τεθῇ.

Ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΗ.

Ἂς ληφθῇ τὸ τμῆμα ΑΒ τῆς τομῆς καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐπὶ τὸν ἄξονα ΓΗ εὐθεῖαι, τεταγμένως κατηγμέναι, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι, ὡς αἱ ΒΖΔ, ΑΗΕ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς, ἀποκόπτουσι τὰ τμήματα ΒΓΔ, ΑΓΕ ἐπὶ τῆς τομῆς ταύτης. Λέγω, ὅτι ἡ καμπύλη ΒΓ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν καμπύλην ΓΔ, ἡ καμπύλη ΒΑ πρὸς τὴν καμπύλην ΔΕ, καὶ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ΑΓΗ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ΗΓΕ, καὶ τὸ τμῆμα ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΕΔΓ.



Ταῦτα ἀποδεικνύονται ὡς εἰς τὰ προηγούμενα (θ. 3), ἐπειδὴ τὰ τετράγωνα ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων, ὡς τεταγμένως κατηγμέναι, τοῦ τμήματος ΑΒΓ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΓΗ, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ὡς τεταγμένως κατηγμέναι τοῦ τμήματος ΓΔΕ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα ΓΗ. Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῶσι διαδοχικῶς εὐθεῖαι, τεταγμένως κατηγμέναι, ἡ εὐθεῖα ΒΖ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΔ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΗ ἴση πρὸς τὴν ΕΗ. Αἱ γωνίαι ἄρα εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η εἶναι ὀρθαί· τὸ τμῆμα ἄρα ΓΒ ἐφαρμοζόμενον ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΔ θὰ συμπέσῃ μετ' αὐτοῦ, καὶ τὸ τμῆμα ΑΒ θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ τμήματος ΔΕ, καὶ τὰ ἐμβαδὰ θὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ἐμβαδά.

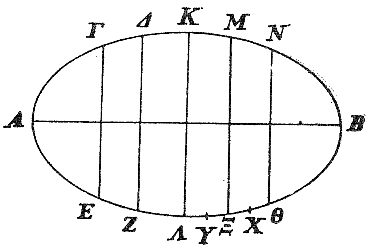
Ἔστω τώρα ἓν ἄλλο τμῆμα τὸ ΘΚ, μὴ ἀποκοπτόμενον ὑπὸ τῶν δύο καθέτων. Λέγω, ὅτι, ἐὰν τὸ τμῆμα ΔΕ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΘΚ δὲν θὰ συμπέσῃ μετ' αὐτοῦ.

Διότι, ἐὰν συνέπιπτε, καὶ ἐὰν ἦτο δυνατὸν τὰ τμήματα ταῦτα νὰ ἦσαν ἴσα, ἂς ἐπιθέσωμεν τὸ τμῆμα ΔΕ, καὶ ἔστω, ὅτι συμπίπτει μὲ τὸ τμῆμα ΚΘ. Ἡ καμπύλη λοιπὸν ΓΔ θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ μέρος τῆς τομῆς τὸ συνεχὲς πρὸς τὸ τμῆμα ΚΘ (θ. 6). Τὸ σημεῖον ἄρα Γ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΔΕ, εἰς μέρος ἄλλο, ἢ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΚΘΓ, ἐπειδὴ τὸ τμῆμα ΚΘΓ δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΓΔΕ· ὁ ἄξων ἄρα ΗΓ θὰ ἔχῃ διαφόρους θέσεις, καὶ ἡ παραβολὴ ἢ ἡ ὑπερβολὴ θὰ ἔχωσι περισσοτέρους ἄξονας· ὅπερ ἄτοπον (2, 48). Τὸ τμῆμα ἄρα ΔΕ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΘΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8

Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν κάθετοι ἄγονται ⟨ἐκ τῆς τομῆς⟩ ἐπὶ τὸν ἄξονα μέχρι τοῦ ἄλλου μέρους τῆς τομῆς, τ' ἀποκοπτόμενα τμήματα καὶ ἀπὸ τὸ ἓν καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἄξονος, ἐφαρμοζόμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι ἴσα, καὶ ἐὰν τὰ τμήματα ταῦτα ἐφαρμοσθῶσιν ἐπὶ τῶν τμημάτων τῶν ἀποκοπέντων ὑπὸ τῶν καθέτων, εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, θὰ συμπέσωσι μετ' αὐτῶν, καὶ δὲν θὰ εἶναι ἴσα πρὸς οὐδὲν ἄλλο τμῆμα τῆς τομῆς.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ ΑΒΓΔ, τῆς ὁποίας ἄξονες εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΚΛ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, δύο κάθετοι, ὡς αἱ ΓΕ, ΔΖ, αἵτινες συναντῶσι τὴν τομὴν καὶ εἰς τὸ ἓν μέρος καὶ εἰς τὸ ἄλλο. Ἂς ἀχθῶσιν ἀκόμη εἰς τὴν τομὴν δύο ἄλλαι κάθετοι, ὡς αἱ ΜΞ, ΝΘ, κείμεναι εἰς τὰς ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς αἱ προηγούμεναι. Ἐὰν λοιπὸν τὸ τμῆμα ΓΔ τεθῇ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΕΖ, ταῦτα θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ἀπεδείχθη εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον θεώρημα, καὶ ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι τὸ τμῆμα ΜΝ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΞΘ. Ἡ ἐπιφάνεια ἄρα ΚΑΛ ἐφαρμοζομένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ΚΒΛ, θὰ συμπέσῃ μετ' αὐτῆς (θ. 4), ἡ δὲ εὐθεῖα ΓΕ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΝΘ, ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις ἑκατέρας τῶν εὐθειῶν τούτων ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι ἡ αὐτή, καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΖ θὰ πέσῃ ἐπίσης ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΞ· τὸ τμῆμα ἄρα ΓΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΜΝ, καὶ ἄρα τὸ τμῆμα ΓΔ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΞΘ, ἐπειδὴ τὰ τμήματα ΜΝ, ΞΘ εἶναι ἴσα. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ αὐτὸ θὰ συμβῇ καὶ διὰ τὸ τμῆμα ΕΖ.



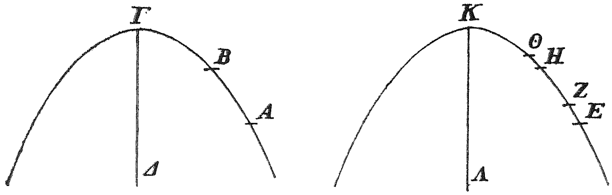
Ἂς ληφθῇ τώρα ἐπὶ τῆς τομῆς τμῆμα ἄλλο, ἐκτὸς τῶν τεσσάρων προηγουμένων, ὡς τὸ ΥΧ. Λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦτο δὲν θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τμῆμά τι, τῶν προειρημένων. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι συμπίπτει μὲ τὸ τμῆμα ΜΝ. Τότε, κατὰ τ' ἀποδειχθέντα εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα, ἡ ἔλλειψις θὰ εἶχε περισσοτέρους τῶν δύο, ἄξονας. Ὅπερ ἄτοπον (2, 48). Τὸ τμῆμα ἄρα ΜΝ δὲν θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΥΧ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9

Εἰς ἴσας τομάς, ἐὰν ἐφαρμοσθῶσι τμήματα ἀπέχοντα ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν κορυφῶν, θὰ συμπέσωσι μεταξύ των, καὶ τὰ μὴ κείμενα εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν κορυφῶν δὲν θὰ εἶναι ἴσα.

Ἔστωσαν τῶν δύο ἴσων τομῶν ἄξονες οἱ ΓΔ, ΚΛ, καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ τμήματος ΑΒ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ τμήματος ΕΗ ἀπὸ τοῦ σημείου Κ. Λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΕΗ.

Διότι, ἐὰν τεθῇ ἡ τομὴ ΓΑ ἐπὶ τῆς τομῆς ΚΕ, τὸ σημεῖον Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Η, ἐπειδὴ αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τούτων ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἑκατέρας τομῆς εἶναι ἴσαι. Τὸ σημεῖον Α θὰ πέσῃ ἐπίσης ἐπὶ τοῦ σημείου Ε· ὥστε καὶ τὸ τμῆμα ΑΒ

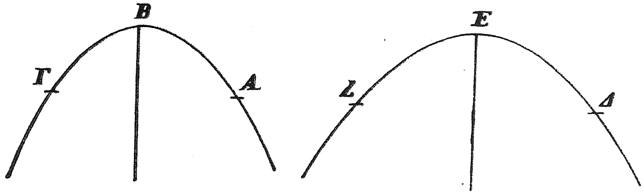


θὰ πέσῃ ἐπίσης ἐπὶ τοῦ τμήματος ΕΗ. Λέγω τώρα, ὅτι, ἐὰν τὸ τμῆμα ΑΒ ἐπιτεθῇ εἰς ἄλλο τυχὸν τμῆμα, δὲν θὰ εἶναι ἴσον πρὸς αὐτό. Διότι, ἔστω, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦτο θὰ πέσῃ εἰ δυνατόν, ἐπὶ τοῦ τμήματος ΖΘ. Ἐδείχθη ὅμως, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΕΗ· τὸ τμῆμα ἄρα ΖΘ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΕΗ. Ἀλλὰ τὰ τμήματα ΖΘ, ΕΗ δὲν ἀπεκόπησαν ὑπὸ τῶν δύο καθέτων , οὔτε κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου· εἶναι ἄρα, κατὰ τὰ δειχθέντα εἰς τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα, ἄτοπον, ὅτι εἶναι δυνατὸν ταῦτα νὰ εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

Ἐὰν αἱ τομαὶ εἶναι ἄνισοι, οὐδὲν μέρος μιᾶς τομῆς εἶναι ἴσον πρὸς μέρος ἄλλης.

Ἔστωσαν δύο τομαὶ ἄνισοι, αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. Λέγω, ὅτι οὐ-



δὲν μέρος τῆς μιᾶς τομῆς συμπίπτει πρὸς μέρος τῆς ἄλλης.

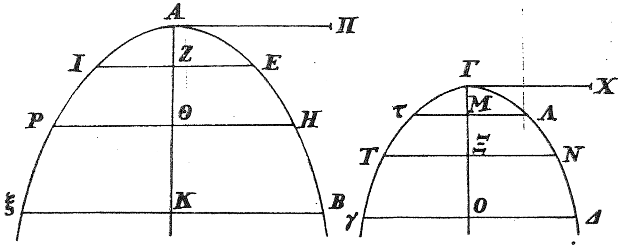
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω, ὅτι τὸ μέρος ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέρος ΔΕ, ὁπότε ὁλόκληρος ἡ τομὴ ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴση πρὸς ὁλόκληρον τὴν τομὴν ΔΕΖ (θ. 6)· ὥστε ἡ τομὴ ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΔΕΖ. Ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν· οὐδὲν ἄρα μέρος τῆς τομῆς ΑΒΓ θὰ συμπέσῃ πρὸς μέρος τῆς τομῆς ΔΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11

Ὅλαι αἱ παραβολαὶ εἶναι ὅμοιαι μεταξύ των.

Ἔστωσαν δύο παραβολαί, αἱ ΑΒ, ΓΔ, τῶν ὁποίων ἄξονες εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΓΟ. Λέγω, ὅτι αἱ παραβολαὶ εἶναι ὅμοιαι μεταξύ των.

Ἔστωσαν αἱ παράμετροι τῶν παραβολῶν τούτων, αἱ ΑΠ, ΓΧ, καὶ ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΑΚ : ΑΠ = ΓΟ : ΓΧ, καὶ ἂς διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΚ διὰ τῶν τυχόντων σημείων Ζ, Θ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΟ ἂς διαιρεθῇ εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους διὰ τῶν σημείων Μ, Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΖΕ, ΘΗ, ΚΒ, καὶ ΜΛ, ΝΞ, ΔΟ κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας ΑΚ, ΓΟ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι εὐθεῖα ΠΑ : ΑΚ = ΓΧ : ΓΟ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΚΒ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΠΑ, ΑΚ (1, 11), καὶ ἡ ΔΟ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΓΧ, ΓΟ, θὰ εἶναι ἄρα εὐθεῖα ΚΒ : ΚΑ = ΔΟ : ΟΓ. Καὶ ἐπειδὴ Βξ = 2ΒΚ, καὶ Δγ = 2ΔΟ, ἡ



εὐθεῖα Βξ : ΑΚ = Δγ : ΓΟ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΠΑ : ΑΚ = ΓΧ : ΓΟ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΚ : ΑΘ = ΓΟ : ΓΞ, ἐκ ταυτότητος, ἡ εὐθεῖα ΠΑ : ΑΘ = ΓΧ : ΓΞ. Εἶναι ἄρα, ὡς ἐδείχθη, ἡ εὐθεῖα ΡΗ : ΑΘ = ΝΤ : ΓΞ, καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΕΙ : ΕΖ = τΛ : ΓΜ. Οἱ λόγοι ἄρα τῶν καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα, τῶν Βξ, ΗΡ, ΕΙ [πρὸς τὰς εὐθείας, ΑΚ, ΑΘ, ΑΖ τὰς ὁποίας ἀποκόπτουσι] εἶναι ἀντιστοίχως [οἱ αὐτοὶ πρὸς τοὺς λόγους τῶν καθέτων Δγ, ΝΤ, Λτ πρὸς τὰς ὑπ' αὐτῶν ἀποκοπτομένας εὐθείας ΖΟ, ΞΓ, ΓΜ]. Τὰ ἀποκοπτόμενα ἄρα τμήματα τοῦ ἑνὸς τῶν ἀξόνων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀποκοπτόμενα τμήματα τοῦ ἄλλου ἄξονος· ἡ τομὴ ἄρα ΑΒ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τομὴν ΓΔ (όρ. 2)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

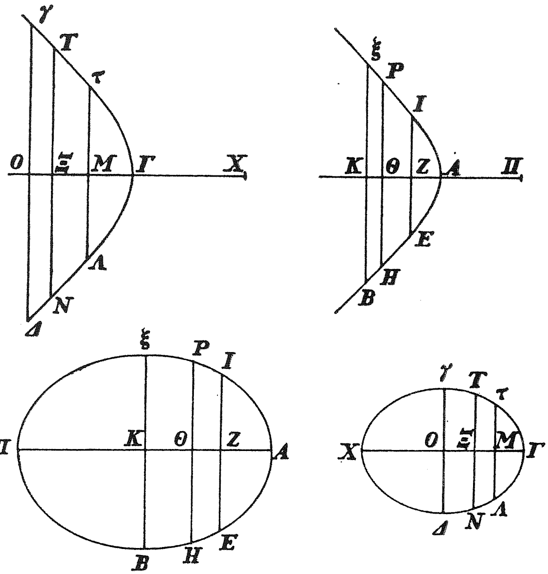
12

Ἐὰν τὰ σχήματα τὰ κατασκευαζόμενα ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῶν ὑπερβολῶν ἢ τῶν ἐλλείψεων εἶναι ὅμοια, αἱ τομαὶ αὗται εἶναι ὅμοιαι, καὶ ἐὰν αἱ τομαὶ εἶναι ὅμοιαι τὰ ἐπὶ τῶν ἀξόνων κατασκευαζόμενα σχήματα εἶναι ὅμοια. (Ἐπὶ τῶν ἀξόνων κατασκευαζόμενα σχήματα εἶναι ὀρθογώνια ἔχοντα βάσιν μίαν διάμετρον καὶ ὕψος τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον).

Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ δύο ὑπερβολαὶ ἢ ἐλλείψεις, τῶν ὁποίων τὰ ἐπὶ τῶν ἀξόνων κατασκευαζόμενα σχήματα εἶναι ὅμοια, καὶ ἄξονες αὐτῶν οἱ ΑΚ, ΓΟ, πλάγιαι δὲ διάμετροι αὐτῶν αἱ ΑΠ, ΓΧ, καὶ ἂς ληφθῶσι τμήματα τῶν ἀξόνων ΑΚ, ΓΟ, ὥστε ΑΚ : ΑΠ = ΓΟ : ΓΧ. Ἂς διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΚ κατὰ τὰ σημεῖα Ζ, Θ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΟ εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων Ζ, Θ, Κ, Μ, Ξ, Ο αἱ εὐθεῖαι ΒΚ, ΘΗ, ΖΕ, ΟΔ, ΞΝ, ΜΛ, κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ σχήματα τῶν τομῶν εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι $ΒΚ^2 : ΠΚ \times ΚΑ = ΔΟ^2 : ΧΟ \times ΟΓ$ (1, 21). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον $ΠΚ \times ΚΑ : ΚΑ^2 = ΧΟ \times ΟΓ : ΟΓ^2$, ἐπειδὴ εἶναι ΠΚ : ΚΑ = ΧΟ : ΟΓ· εἶναι ἄρα ΒΚ : ΚΑ = ΔΟ : ΟΓ, καὶ Βξ : ΚΑ = Δγ : ΓΟ. Εἶναι δὲ ΚΑ : ΑΘ = ΟΓ : ΓΞ· εἶναι ἄρα ΠΑ : ΑΘ = ΧΓ : ΓΞ. Γίνεται δέ, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως, ΗΡ : ΑΘ = ΝΤ : ΓΞ, καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ΕΙ : ΑΖ = τΛ : ΓΜ. Αἱ κάθετοι ἄρα Βξ, ΗΡ, ΕΙ εἶναι πρὸς τὰ τμήματα ΑΚ, ΑΘ, ΑΖ τοῦ ἄξονος εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τῶν καθέτων Δγ, ΝΤ, τΛ πρὸς τὰ τμήματα ΟΓ, ΓΞ, ΓΜ τοῦ ἄξονος. Ἀλλὰ τὰ τμήματα τ' ἀποκοπτόμενα ὑπὸ τῶν καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα

ΑΚ τῆς τομῆς ΑΒ εἶναι πρὸς τὰ τμήματα τ᾽ ἀποκοπτόμενα ὑπὸ τῶν καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα ΓΟ τῆς τομῆς ΓΔ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον· ἡ τομὴ ἄρα ΑΒ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τομὴν ΓΔ (ὁρισ. 2).

Ἐὰν δὲ ἡ τομὴ ΑΒ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τομὴν ΔΓ, λέγω, ὅτι [τὰ σχήματα] τῶν δύο τούτων τομῶν εἶναι ὅμοια μεταξύ των.



Διότι, ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῆς τομῆς ΑΒ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΚ κάθετοι, ὡς αἱ Βξ, ΗΡ, ΕΙ, καὶ ἐκ τῆς τομῆς ΓΔ κάθετοι, ὡς αἱ Δγ, ΝΤ, Λτ, οὕτως, ὥστε αἱ κάθετοι αὗται νὰ εἶναι εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους πρὸς τὰ τμήματα τ᾽ ἀποκοπτόμενα ἐπὶ ἑκάστου ἄξονος, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀποκοπτόμεναι ἐπὶ ἑνὸς τῶν ἀξόνων νὰ εἶναι εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους πρὸς τὰς εὐθείας τὰς ἀποκοπτομένας ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἄξονος, τουτέστι νὰ εἶναι ΚΑ : ΑΘ = ΟΓ :

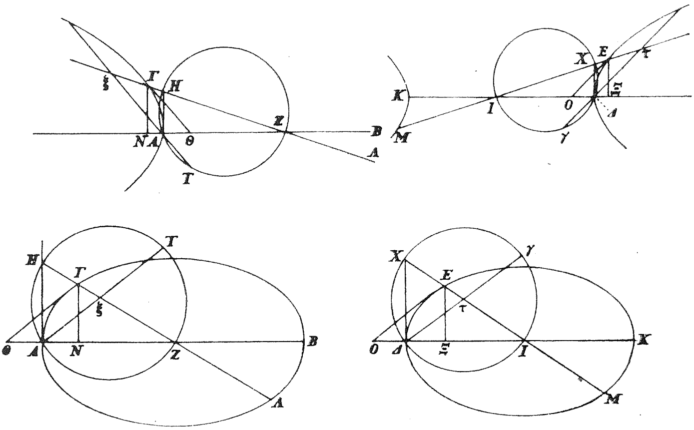
ΓΞ, καὶ $ΑΘ : ΘΗ = ΓΞ : ΞΝ$. Θὰ εἶναι λοιπὸν $ΒΚ : ΘΗ = ΔΟ : ΝΞ$· ὥστε τὸ $ΒΚ^2 = ΘΗ^2 = ΔΟ^2 : ΝΞ^2$. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΠΚ \times ΚΑ : ΠΘ \times ΘΑ = ΧΟ \times ΟΓ : ΧΞ \times ΞΓ$ (1, 21). Ἀλλὰ $ΚΑ : ΑΘ = ΟΓ : ΓΞ$· θὰ εἶναι λοιπὸν $ΚΠ : ΠΘ = ΟΧ : ΧΞ$, καὶ διὰ τοῦτο, $ΠΘ : ΘΚ = ΧΞ : ΞΟ$. Εἶναι ἄρα $ΠΘ : ΘΑ = ΧΞ : ΞΓ$, καὶ $ΠΘ \times ΘΑ : ΘΑ^2 = ΧΞ \times ΞΓ : ΞΓ^2$. Ἀλλὰ $ΠΘ \times ΘΑ : ΘΗ^2 = ΧΞ \times ΞΓ : ΞΝ^2$, τὸ δὲ $ΠΘ \times ΘΑ : ΘΗ^2$ = διάμετρος ΑΠ : παράμετρος αὐτῆς, καὶ $ΧΞ \times ΞΓ : ΞΝ^2$ = διάμετρος ΧΓ : παράμετρος αὐτῆς· τὰ σχήματα ἄρα τῆς μιᾶς καὶ τῆς ἄλλης τομῆς, τὰ κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΠΑ, ΓΧ εἶναι ὅμοια.

13

Ἐὰν τὰ σχήματα τῶν ὑπερβολῶν ἢ τῶν ἐλλείψεων τὰ κατεσκευασμένα ἐπὶ διαμέτρων ἄλλων, ἢ ἐπὶ τῶν ἀξόνων, εἶναι ὅμοια, καὶ ἐὰν αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ὡς τεταγμένως κατηγμέναι ἐπὶ τῶν διαμέτρων τούτων σχηματίζουσι μετ' αὐτῶν γωνίας ἴσας, αἱ τομαὶ αὗται θὰ εἶναι ὅμοιαι μεταξύ των (σχήματα... = τὰ ἔχοντα βάσιν τὴν θεωρουμένην διάμετρον καὶ ὕψος τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον).

Ἔστωσαν Ζ, Ι τὰ κέντρα τῶν δύο ὑπερβολῶν ἢ τῶν δύο ἐλλείψεων, καὶ ΓΛ, ΕΜ τυχοῦσαι διάμετροι, καὶ αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν διαμέτρων τούτων καὶ τῶν ἐπ' αὐτῶν τεταγμένως κατηγμένων εὐθειῶν νὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, καὶ τὰ σχήματα τὰ κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν διαμέτρων ΓΛ, ΕΜ νὰ εἶναι ὅμοια. Λέγω, ὅτι αἱ τομαὶ αὗται εἶναι ὅμοιαι.

Διότι, ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Γ, Ε, αἱ εὐθεῖαι ΓΘ, ΕΟ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν, αἵτινες θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας τὰς τεταγμένως κατηγμένας ἐπὶ τῶν διαμέτρων (ΓΛ, ΕΜ) οὕτως, ὥστε αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Γ, Ε μὲ τὰς διαμέτρους ΓΛ, ΕΜ νὰ εἶναι ἴσαι, καὶ οἱ ἄξονες τῶν τομῶν, οἱ ΑΒ, ΔΚ ἂς συναντῶσι τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα Θ, Ο· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ γωνία ΘΓΖ = γωνίαν ΟΕΙ, ἐπειδὴ αἱ ἐφαπτόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας τὰς



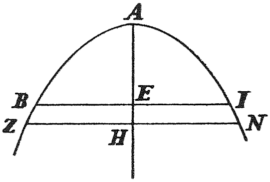
τεταγμένως κατηγμένας. Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Α, Δ κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας, τουτέστιν αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΔΧ, συναντῶσαι τὰς διαμέτρους ΓΛ, ΕΜ εἰς τὰ σημεῖα Η, Χ.

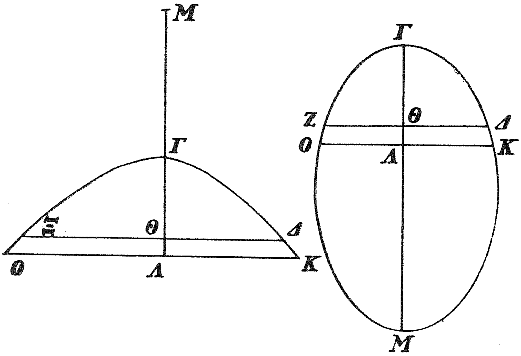
Ἂς περιγραφῶσιν κύκλοι περὶ τὰ τρίγωνα ΖΑΗ, ΙΔΧ, καὶ ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν κορυφῶν Α, Δ αἱ εὐθεῖαι ΑξΓ, Δτγ παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας ΓΘ, ΕΟ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ σχήματα τὰ κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΓΛ, ΕΜ εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΔΧ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν, καὶ αἱ εὐθεῖαι Αξ, Δτ εἶναι τεταγμένως κατηγμέναι ἐπὶ τῶν διαμέτρων ΓΛ, ΕΜ, τὸ ὀρθογώνιον $Zξ \times ξH : Aξ^2$ = ὀρθογώνιον $Iτ \times τX : Δτ^2$ (1, 37)· διότι οἱ δύο οὗτοι λόγοι εἶναι οἱ αὐτοί, τουτέστιν εἶναι ἐκεῖνοι τῶν πλαγίων διαμέτρων πρὸς τὰς παραμέτρους τὰς ἀντιστοίχους πρὸς τὰς διαμέτρους αὐτάς. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον $Zξ \times ξH$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $Tξ \times ξA$, καὶ τὸ ὀρθογώνιον $Iτ \times τX$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $Δτ \times τγ$· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $Tξ \times ξA : ξA^2$ = ὀρθογώνιον $Δτ \times τγ : Δτ^2$· οὕτως, ὥστε $Tξ : ξA = τγ : Δτ$. Αἱ δύο γωνίαι ἄρα αἱ κείμεναι παρὰ τὰ σημεῖα ξ, τ εἶναι ἴσαι, ἀλλὰ ὄχι ὀρθαί, ἐπειδὴ αἱ διάμετροι ΓΛ, ΕΜ δὲν εἶναι οἱ ἄξονες τῶν τομῶν, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΗΖ, ΧΙ εἶναι αἱ διάμετροι τῶν κύκλων· εἶναι ἄρα ἡ περὶ τὸ σημεῖον Ζ γωνία ἴση πρὸς τὴν περὶ τὸ σημεῖον Ι. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΖΓΘ, ΙΕΟ εἶναι ἴσαι· τὰ τρίγωνα ἄρα ΖΓΘ, ΙΕΟ εἶναι ὅμοια. Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Γ, Ε, αἱ εὐθεῖαι ΓΝ, ΕΞ κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας, ὁπότε τὸ ὀρθογώνιον $ZN \times NΘ : ΓN^2 = IΞ \times ΞO : EΞ^2$· ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον $ZN \times NΘ : ΓN^2$ = πλάγιος ἄξων ΑΒ : παράμετρος αὐτοῦ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον $IΞ \times ΞO : EΞ^2$ = πλάγιος ἄξων ΔΚ : παράμετρος αὐτοῦ (1, 37)· εἶναι ἄρα καὶ αἱ ἴδιαι αἱ τομαὶ ὅμοιαι (θ. 12). Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἐλλείψεων οἱ ἄξονες ΑΒ, ΚΔ πρέπει νὰ εἶναι καὶ οἱ δύο οἱ μεγάλοι ἢ οἱ δύο οἱ μικροί, διότι ὁ λόγος τοῦ ἄξονος ΒΑ πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ πρέπει νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἄξονος ΚΔ πρὸς τὴν παράμετρον τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ΚΔ· ὅπερ θὰ συμβαίνῃ ὅταν καὶ οἱ δύο ἄξονες θὰ εἶναι μεγάλοι ἢ μικροί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14

Ἡ παραβολὴ οὐδέποτε εἶναι ὁμοία πρὸς ὑπερβολὴν ἢ ἔλλειψιν.

Ἔστωσαν δύο τομαί, ἡ παραβολὴ ΑΒ ἔχουσα ἄξονα τὸν ΑΗ, καὶ μία ὑπερβολὴ ἢ μία ἔλλειψις, ὡς ἡ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι, εἰ δυνατόν, ἔστωσαν ὅμοιαι, καὶ ΓΛ ὁ ἄξων τῆς τομῆς ΓΔ, καὶ ΜΓ ὁ πλάγιος ἄξων τοῦ σχήματος ἢ ἡ πλαγία διάμετρος. Ἂς ἀχθῶσιν εἰς ἑκάστην τῶν τομῶν κάθετοι, ὡς αἱ ΒΙ, ΖΝ, ΔΞ, ΚΟ, καὶ ἂς εἶναι οἱ λόγοι τῶν καθέτων πρὸς τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας ἀποκόπτουσιν ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος, ἀντιστοίχως οἱ αὐτοὶ πρὸς τοὺς λόγους τῶν καθέτων πρὸς τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας ἀποκόπτουσιν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἄξονος, ἕκαστος δὲ ἄξων εἶναι διῃρημένος εἰς τμήματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον μεταξύ των, τουτέστι ὡς ἡ εὐθεῖα ΖΗ : ΗΑ = ΚΛ : ΛΓ, καὶ ΗΑ : ΑΕ = ΛΓ : ΓΘ, καὶ ΑΕ : ΕΒ = ΓΘ : ΘΔ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΖΗ : ΕΒ = ΚΛ : ΔΘ, ὥστε τὸ $ZH^2 : EB^2 = K\Lambda^2 : \Delta\Theta^2$. Ἀλλὰ $ZH^2 : BE^2 = HA : AE$ (1, 20), ἡ δὲ ΗΑ : ΑΕ = ΛΓ : ΓΘ. Εἶναι λοιπὸν τὸ $K\Lambda^2$:



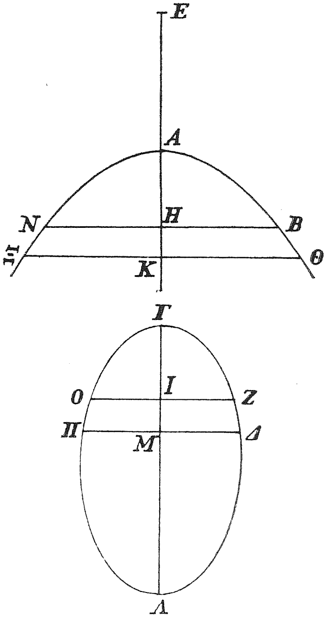


ΔΘ² = ΛΓ : ΓΘ. Εἶναι ἄρα τὸ ΚΛ² : ΔΘ² =ὀρθογώνιον ΜΛ x ΛΓ : ΜΘ x ΘΓ (1, 21)· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΜΛ = ΜΘ· ὅπερ ἄτοπον· ἡ παραβολὴ ἄρα δὲν εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην, τῶν ὑπολοίπων τομῶν.

15

Ὑπερβολὴ οὐδέποτε εἶναι ὁμοία πρὸς ἔλλειψιν.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ καὶ ἔλλειψις ἡ ΓΔ μὲ ἄξονας τοὺς ΑΚ, ΓΜ, καὶ ἐὰν αἱ τομαὶ αὗται εἶναι ὅμοιαι, ἂς ἀχθῶσιν εἰς ἑκάστην τούτων κάθετοι, αἱ ΒΝ, ΘΞ, ΖΟ, ΔΠ, οὕτως, ὥστε οἱ λόγοι αὐτῶν πρὸς τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας ἀποκόπτουσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ ἑκάστου τῶν ἀξόνων νὰ εἶναι οἱ αὐτοί, καὶ αἱ ἀποκοπτόμεναι εὐθεῖαι νὰ εἶναι πρὸς τὰς ἀποκοπτομένας εὐθείας εἰς τὸν αὐτὸν λόγον. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ὅτι τὸ ΘΚ² : ΒΗ² = ΔΜ² : ΖΙ². Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΕΚ x ΚΑ : ὀρθογώνιον ΕΗ x ΗΑ = ΘΚ² : ΒΗ², καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΓΜ x ΜΛ : ὀρθογώνιον ΓΖ x ΙΛ = ΔΜ² : ΙΖ²· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΕΚ x ΚΑ : ὀρθογώνιον ΕΗ x ΗΑ

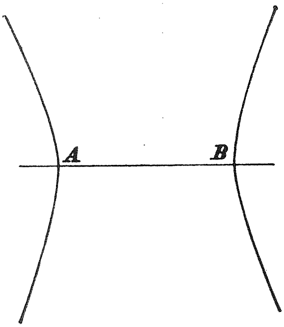


= ὀρθογώνιον ΓΜ x ΜΛ : ὀρθογώνιον ΓΙ x ΙΛ. Ἀλλὰ ὑπετέθη ΚΑ : ΑΗ = ΜΓ : ΓΙ· εἶναι ἄρα ΚΕ : ΕΗ = ΜΛ : ΛΙ· ὅπερ ἄτοπον. Ἡ τομὴ ἄρα ΑΒ δὲν εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τομὴν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16

Αἱ ἀντικείμεναι ὑπερβολαὶ (δύο κλάδοι ὑπερβολῆς) εἶναι ὅμοιαι καὶ ἴσαι.

Ἔστωσα Α, Β δύο τομαὶ ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων ἄξων εἶναι ὁ ΑΒ. Λέγω, ὅτι αὗται εἶναι ὅμοιαι καὶ ἴσαι.



Διότι, ἐπειδὴ αἱ παράμετροι τῶν τομῶν Α, Β εἶναι ἴσαι (1, 14), καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι πλαγία πλευρὰ (διάμετρος) κοινὴ τῶν σχημάτων (δηλ. τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐχόντων βάσιν τὸν πλάγιον ἄξονα καὶ ὕψος τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον) καὶ τῆς μιᾶς καὶ τῆς ἄλλης τομῆς, τὰ σχήματα τὰ κατεσκευασμένα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ΑΒ θὰ εἶναι ὅμοια μεταξύ των καὶ ἴσα, καὶ διὰ τοῦτο ἡ τομὴ Α εἶναι ὁμοία καὶ ἴση πρὸς τὴν τομὴν Β (θ. 12)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17

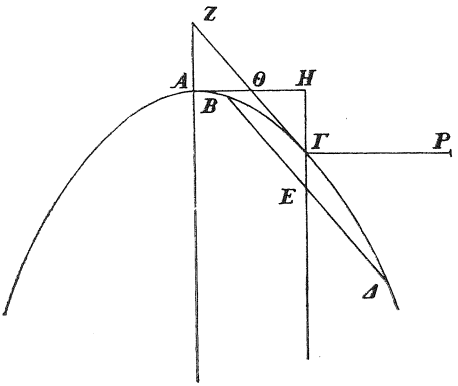
Ἐὰν εἰς ὁμοίας τομὰς κώνου ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι, αἵτινες, συναντῶσαι τοὺς ἄξονας, σχηματίζουσι μετ' αὐτῶν γωνίας ἴσας, καὶ ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς ἀχθῶσι διάμετροι τῶν τομῶν, ἐφ' ἑκάστης τῶν ὁποίων ληφθῶσι σημεῖα τοιαῦτα, ὥστε αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀποκοπτόμεναι μεταξὺ τῶν σημείων τούτων καὶ τῶν κορυφῶν τῶν διαμέτρων νὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἐφαπτομένας, καὶ ἐὰν διὰ τῶν οὕτω ληφθέντων σημείων ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας, αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι αὗται ἀποκόπτουσιν ἐφ' ἑκάστης τῶν τομῶν τμήματα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα· ἐὰν δὲ τὰ τμήματα εἶναι ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα, οἱ λόγοι τῶν διαμέτρων πρὸς τὰς ἐφαπτομένας θὰ εἶναι οἱ αὐτοὶ εἰς ἑκάστην τῶν τομῶν, καὶ αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν διαμέτρων καὶ τῶν ἐφαπτομένων θὰ εἶναι ἴσαι.

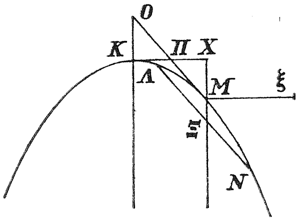
Ἔστω κατὰ πρῶτον αἱ ὅμοιαι τομαὶ εἶναι δύο παραβολαί, ὡς αἱ ΑΒΓ, ΚΛΜ, τῶν ὁποίων ἄξονες εἶναι οἱ ΑΖ, ΚΟ, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν, αἱ ΓΖ, ΜΟ σχηματίζουσαι μετὰ τῶν ἀξόνων γωνίας ἴσας, τὰς ΑΖΓ, ΚΟΜ.

Ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων Γ, Μ αἱ διάμετροι τῶν τομῶν, αἱ ΓΕ, ΜΞ, καὶ ἂς γίνῃ, εὐθεῖα ΕΓ : ΓΖ = ΞΜ : ΜΟ, καὶ ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων Ε, Ξ αἱ εὐθεῖαι ΔΒ, ΝΛ παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας ⟨ἐφαπτομένας⟩ ΓΖ, ΜΟ. Λέγω, ὅτι τὰ τμήματα ΒΓΔ, ΛΜΝ εἶναι ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Α, Κ αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΚΧ κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας, καὶ ἂς προεκταθῶσιν αἱ διάμετροι ΕΓ, ΜΞ μέχρις ὅτου συναντήσωσι, τὰς τελευταίας ταύτας εὐθείας, εἰς τὰ σημεῖα Η, Χ. Ἂς γίνῃ ἀκόμη εὐθεῖά τις ΡΓ : 2ΓΖ = ΘΓ : ΓΗ, καὶ εὐθεῖά τις ξΜ : 2ΜΟ = ΠΜ : ΜΧ. Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΡΓ, Μξ θὰ εἶναι αἱ παράμετροι, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διαμέτρους ΓΕ, ΜΞ (1, 49), καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΔΕ^2 =

ΡΓ x ΓΕ, καὶ ΝΞ² = ΞΜ x Μξ. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΚΟΜ, ΑΖΓ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (ἐξ ὑποθέσεως)· αἱ γωνίαι λοιπὸν ΧΜΟ, ΗΓΖ εἶναι ἐπίσης ἴσαι, διότι αἱ εὐθεῖαι ΧΞ, ΗΕ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας ΟΚ, ΖΑ (1, 46). Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ γωνίαι ΧΜΟ, ΗΓΖ εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ γωνίαι αἱ κείμεναι περὶ τὰ





σημεῖα Η καὶ Χ εἶναι ὀρθαί, καὶ ἑπομένως ἴσαι, θὰ εἶναι ἄρα τὰ τρίγωνα ΘΗΓ, ΠΧΜ ὅμοια. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΘΓ : ΓΗ = ΠΜ : ΜΧ, καὶ ἄρα ΡΓ : ΓΖ = ξΜ : ΜΟ. Ἀλλ' ἔχει γίνει ΓΖ : ΓΕ = ΜΟ : ΜΞ· θὰ εἶναι λοιπὸν ΡΓ : ΓΕ = ξΜ : ΜΞ. Σκεπτόμενοι λοιπόν, ὡς κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἑνδεκάτου θεωρήματος τοῦ βιβλίου τούτου, ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἐὰν ἀχθῶσιν εἰς τὴν διάμετρον ΓΕ, εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΔ, καὶ εἰς τὴν διάμετρον ΜΞ, εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΛΝ, αἱ εὐθεῖαι αὗται, παράλληλοι οὖσαι πρὸς τὰς βάσεις ΒΔ, ΛΝ, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα αὗται ἀποκόπτουσιν ἐφ' ἑκατέρας τῶν διαμέτρων, (ἀναχωροῦντα) ἀπὸ τῶν κορυφῶν Γ, Μ. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν τεταγμένως κατηγμένων εὐθειῶν, παραλλήλων πρὸς τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην βάσιν, καὶ τῶν διαμέτρων τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου τμήματος, εἶναι ἴσαι καὶ ἀπὸ τὸ ἓν μέρος καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αἱ κείμεναι περὶ τὰ σημεῖα Γ καὶ Μ εἶναι ἴσαι· εἶναι ἄρα τὸ τμῆμα ΒΓΔ ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΛΜΝ (ὁρισ. 7) καὶ ὁμοίως κείμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν δὲ τὸ τμῆμα ΔΓΒ τῆς μιᾶς τομῆς εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΝΜΛ τῆς ἄλλης τομῆς καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΕ, ΜΞ εἶναι διάμετροι, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΔΒ, ΛΝ εἶναι βάσεις τῶν τμημάτων τούτων, κορυφαὶ δὲ αὐτῶν εἶναι τὰ σημεῖα Γ, Μ, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ εὐθεῖαι ΓΖ, ΜΟ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν, λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΖΓ, ΚΟΜ εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΓ : ΓΖ = ΞΜ : ΜΟ .

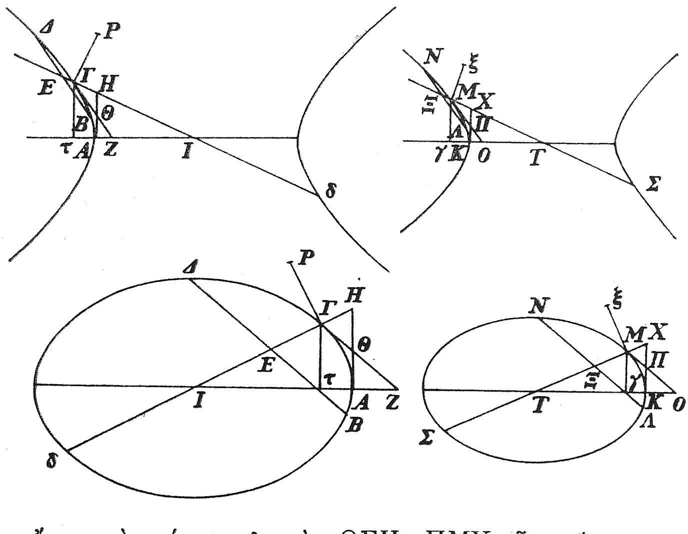
Ἄς διατηρήσωμεν τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι προσδιωρίσθησαν ἀνωτέρω. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ τμήματα εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς βάσεως ΒΔ καὶ τῆς διαμέτρου ΓΕ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΛΝ καὶ ΜΞ (ὁρισ. 7). Ἀλλὰ αἱ εὐθεῖαι ΖΓ, ΟΜ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας ΒΔ, ΛΝ· αἱ γωνίαι λοιπόν, αἱ περὶ τὰ σημεῖα Γ, Ε καὶ Μ, Ξ εἶναι ἴσαι. Αἱ ἀμβλεῖαι ἄρα γωνίαι ΖΓΕ, ΟΜΞ εἶναι μεταξύ των ἴσαι, καὶ διὰ τὰς παραλλήλους, ἡ περὶ τὸ Ζ γωνία εἶναι ἴση τῆς περὶ τὸ Ο. Ἐπειδὴ δὲ ΔΒ : ΕΓ = ΝΛ : ΞΜ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τμημάτων, θὰ εἶναι ΔΕ : ΕΓ = ΝΞ : ΞΜ. Ἀλλά, κατὰ τὴν ἰδιότητα τῶν παραβολῶν, εἶναι ΡΓ : ΔΕ = ΔΕ : ΕΓ, καὶ ξΜ : ΝΞ = ΞΝ : ΞΜ· θὰ εἶναι λοιπὸν ΡΓ : ΕΓ = ξΜ : ΜΞ. Ἀλλὰ ΡΓ : 2ΓΖ = ΘΓ : ΓΗ (1, 49), καὶ ξΜ :

2ΜΟ = ΠΜ : ΜΧ, ἡ δὲ ΘΓ : ΓΗ = ΠΜ : ΜΧ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΓΘΗ, ΠΜΧ· εἶναι λοιπὸν ΡΓ : ΓΖ = ξΜ : ΜΟ, καὶ διὰ τὸν λόγον τῆς ταυτότητος, ΕΓ : ΓΖ = ΜΞ : ΜΟ. Αἱ γωνίαι λοιπὸν ΑΖΓ, ΚΟΜ εἶναι ἴσαι ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀποδειχθέντων.

18

Ἔστωσαν τώρα αἱ τομαὶ ὑπερβολαὶ ἢ ἐλλείψεις καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα, καὶ ἂς προεκταθῶσιν αἱ διάμετροι ΓΕ, ΜΞ μέχρι τῶν κέντρων Ι, Τ τῶν τομῶν, καὶ ἡ ἀποκοπτομένη εὐθεῖα ΓΕ : ἐφαπτομένην ΓΖ = εὐθεῖα ΞΜ : ΜΟ. Λέγω, ὅτι τὰ τμήματα ΔΓΒ, ΛΜΝ εἶναι ὅμοια.

Ἂς γίνῃ εὐθεῖα ΡΓ : 2 ἐφαπτομένη ΓΖ = ΓΘ : ΓΗ, καὶ εὐθεῖα ξΜ : 2 ἐφαπτομένη ΜΟ = ΠΜ : ΜΧ. Θὰ εἶναι λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ΓΡ, ΞΜ αἱ παράμετροι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διαμέτρους ΓΕ, ΜΞ (1, 50). Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Α, Κ, Γ, Μ αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΚΧ, Γτ, Μγ, κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ τομαὶ εἶναι ὅμοιαι, τὰ σχήματα τὰ κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν ἀξόνων θὰ εἶναι ἐπίσης ὅμοια (θ. 12), καὶ ἐὰν τὰ ἐπὶ τῶν ἀξόνων κατεσκευασμένα σχήματα εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι ὀρθογώνιον Ιτ x τΖ : Γτ^2 = ὀρθογώνιον Τγ x γΟ : γΜ^2 (1, 37). Ἀλλὰ αἱ γωνίαι αἱ κείμεναι περὶ τὰ σημεῖα Ζ, Ο εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως, καὶ αἱ γωνίαι αἱ κείμεναι περὶ τὰ σημεῖα τ καὶ γ εἶναι ἐπίσης ἴσαι, διότι εἶναι ὀρθαί· τὸ τρίγωνον ἄρα ΓτΖ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΜγΟ. Εἶναι δὲ φανερὸν (λήμματα Πάππου 3 καὶ 5), ὅτι ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον Ιτ x τΖ : Γτ^2 = ὀρθογώνιον Τγ x γΟ : γΜ^2, τὰ τρίγωνα ΓτΙ, ΜΤγ θὰ εἶναι ὅμοια, καὶ ἄρα αἱ γωνίαι αἱ κείμεναι ἐπὶ τῶν κέντρων Ι, Τ θὰ εἶναι ἴσαι. Αἱ γωνίαι λοιπὸν ΖΓΙ, ΤΜΟ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ περὶ τὰ σημεῖα Ε, Ξ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς αὐτάς, διὰ τὰς τεταγμένως κατηγμένας εὐθείας, παραλλήλους πρὸς τὰς ἐφαπτομένας. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ περὶ τὰ σημεῖα Ι, Τ γωνίαι εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι καὶ αἱ περὶ τὰ σημεῖα Η, Χ γωνίαι ἴσαι. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΖΓΙ, ΤΜΟ



εἶναι ἴσαι· τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΘΓΗ, ΠΜΧ εἶναι ὅμοια, καὶ ἡ ΘΓ : ΓΗ = ΠΜ : ΜΧ. Ἀλλ' ἔχει γίνει ΡΓ : 2ΓΖ [= ΘΓ : ΓΗ, καὶ ξΜ : 2ΜΟ] = ΠΜ : ΜΧ· θὰ εἶναι ἄρα ΓΡ : ΓΖ = Μξ : ΜΟ. Εἶναι δὲ ΓΖ : ΓΙ = ΟΜ : ΜΤ· εἶναι ἄρα ΓΡ : ΓΙ = Μξ : ΜΤ· ὥστε ΓΡ : Γδ = Μξ : ΜΣ. Τὰ σχήματα λοιπὸν ΓΡ x Γδ καὶ Μξ x ΜΣ εἶναι ὅμοια. Ἐπειδὴ δὲ ΓΡ : ΓΖ = Μξ : ΜΟ, καὶ ΓΖ : ΓΕ = ΜΟ : ΜΞ, θὰ εἶναι ΡΓ : ΓΕ = Μξ : ΜΞ. Διὰ τοῦτο, καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΓΡ x Γδ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον Μξ x ΜΣ, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΓΕ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, καὶ διὰ τοῦ σημείου τομῆς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ τοῦ τμήματος, ἡ δὲ διάμετρος ΜΞ διαιρεθῇ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, εἰς τὸν ὁποῖον ἔχει διαιρεθῇ ἡ ΓΕ, καὶ διὰ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΛΝ τοῦ τμήματος, αἱ παράλληλοι, αἵτινες συναντῶσι τὴν διάμετρον ΜΞ θὰ εἶναι πρὸς τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας ἀποκόπτουσιν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ταύτης, ἀναχωροῦσαι ἀπὸ τῆς κορυφῆς Μ [εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ, πρὸς τὰ μέρη, τὰ ὁποῖα ἀποκόπτουσιν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΓΕ, ἀναχωροῦσαι ἀπὸ τῆς κορυφῆς Γ] (θ. 12). Ἡ γωνία λοιπόν, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς βάσεως ΒΔ καὶ τῆς εὐθείας ΓΕ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῆς βάσεως ΛΝ καὶ τῆς εὐθείας ΜΞ, διότι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τὰς κειμένας περὶ τὰ σημεῖα Γ, Μ, τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν διαμέτρων· τὰ τμήματα λοιπὸν ΔΓΒ, ΝΜΛ εἶναι ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

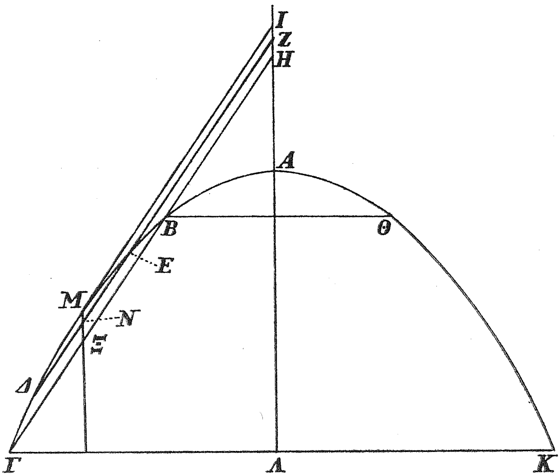
Ἐὰν δὲ τὰ τμήματα εἶναι ὅμοια, λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι ΓΖΑ, ΜΟΚ θὰ εἶναι ἴσαι, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΕ : ΓΖ = ΞΜ : ΜΟ.

Ἔστω, ὅτι τὰ δύο τμήματα εἶναι ὅμοια, καὶ ἂς ἀχθῶσιν εἰς τὰ τμήματα αὐτὰ παραλλήλως πρὸς τὰς εὐθείας ΔΒ, ΝΛ, εὐθεῖαί τινες, αἵτινες συναντῶσι τὰς εὐθείας ΓΕ, ΜΞ ὑπὸ ἴσας γωνίας. Οἱ ἀντίστοιχοι λόγοι τῶν εὐθειῶν τούτων, ὡς καὶ τῶν βάσεων ΔΒ, ΛΝ, πρὸς τὰς ἐπὶ τῶν διαμέτρων ἀποκοπτομένας εὐθείας θὰ εἶναι λοιπὸν οἱ αὐτοί, καὶ αἱ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΓΕ ἀποκοπτόμεναι εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΜΞ ἀποκοπτομένας εὐθείας (ὁρισ. 7). Τὰ τετράγωνα δὲ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ τμήματος ΔΓΒ, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΒ, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΕ, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἐφαρμοζόμενα ἐπὶ τῆς παραμέτρου ΓΡ, ὑπερβάλλουσιν ἢ ἐλλείπουσι κατὰ σχήματα ὀρθογώνια ὅμοια πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΡ x Γδ (1, 50).

Ὁμοίως, τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων εἰς τὸ τμῆμα ΝΜΛ, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΛΝ, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΞ, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἐφαρμοζόμενα ἐπὶ τῆς εὐθείας ξΜ (παραμέτρου) ὑπερβάλλουσιν ἢ ἐλλείπουσι κατὰ σχήματα ὀρθογώνια ὅμοια πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ξΜ x ΜΣ. Διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα ΓΡ : Γδ = Μξ : ΜΣ (θ. 12). Αἱ δὲ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι τεταγμένως κατηγμέναι συναντῶσιν τὰς διαμέτρους ὑπὸ τὰς αὐτὰς γωνίας (1, 13)· τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν Ιτ x τΖ : Γτ^2 = ὀρθογώνιον Τγ x γΟ : Μγ^2 (1, 37). Αἱ γωνίαι ἄρα αἱ περὶ τὰ σημεῖα τ, γ εἶναι ὀρθαί, καὶ αἱ γωνίαι ΖΓΙ , ΟΜΤ εἶναι ἴσαι· τὰ τρίγωνα ἄρα ΙΓΖ, ΤΜΟ εἶναι ὅμοια (λήμματα Πάππου 3 καὶ 5). Τοῦτο ἰσχύει γενικῶς διὰ τὴν ὑπερβολήν, ἐνῷ διὰ τὴν ἔλλειψιν πρέπει οἱ ἄξονες ΑΙ, ΚΤ νὰ εἶναι καὶ οἱ δύο ἴσοι. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ΡΓ : Γδ = ξΜ : ΜΣ, [καὶ τὸ ὀρθογώνιον δΕ x ΕΓ : ΔΕ^2 = δΓ : ΓΡ] (1, 21), καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΜΞ x ΞΣ : ΝΞ^2 = ΕΜ : ΜΞ, [θὰ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον δΕ x ΕΓ : ΔΕ^2 = ὀρθογώνιον ΜΞ x ΞΣ : ΝΞ^2]. Ἀλλὰ τὸ ΔΕ^2 : ΕΓ^2 = ΝΞ^2 : ΜΞ^2 · τὸ ὀρθογώνιον ἄρα δΕ x ΕΓ : ΕΓ^2 = ὀρθογώνιον ΜΞ x ΞΣ : ΞΜ^2, τουτέστι, θὰ εἶναι δΕ : ΕΓ = ΣΞ : ΞΜ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΙΓ : ΓΖ = ΤΜ : ΜΟ, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΙΓΖ, ΤΜΟ εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ εὐθεῖαι δΓ, ΣΜ εἶναι διπλάσιαι τῶν εὐθειῶν ΙΓ, ΤΜ· εἶναι λοιπὸν δΓ : ΓΖ = ΣΜ : ΜΟ, καὶ ἄρα ΓΕ : ΓΖ = ΜΞ : ΜΟ. Αἱ γωνίαι λοιπὸν αἱ κείμεναι περὶ τὰ σημεῖα Ζ, Ο εἶναι ἴσαι.

19

Ἐὰν εἰς παραβολὴν ἢ ἔλλειψιν ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὰ τμήματα τ' ἀποκοπτόμενα καὶ ἀπὸ τὸ ἓν μέρος καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο τοῦ ἄξονος ὑπὸ δύο οἱωνδήποτε καθέτων θὰ εἶναι ὅμοια καὶ ἴσα, ἄλλο δέ τι τμῆμα τῆς αὐτῆς τομῆς δὲν θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὰ πρῶτα (τμήματα).



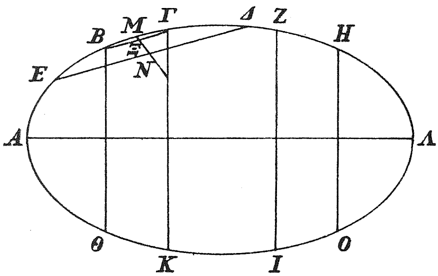
Ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ ἡ ΓΑΚ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ὁ ΑΛ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν εἰς τὴν τομὴν αὐτὴν δύο κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, ὡς αἱ ΒΘ, ΓΚ, αἵτινες ἀποκόπτουσιν ἐπὶ τῆς τομῆς τὰ τμήματα ΒΓ, ΘΚ, ἔστωσαν δὲ διάφορα τὰ ὑπὸ τῶν καθέτων ἀποκοπτόμενα τμήματα ΔΕ, ΘΚ. Λέγω, ὅτι τὰ τμήματα ΒΓ, ΘΚ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι ἴσα (θ. 7), καὶ ὅτι τιθέμενον τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουσιν (εἶναι ἴσα), ἐνῷ τὰ τμήματα ΔΕ, ΘΚ δὲν εἶναι ὅμοια.

Διότι, ἔστω, ὅτι τὰ τμήματα ΔΕ, ΘΚ, εἶναι, εἰ δυνατόν, ὅμοια. Ἀλλὰ τὸ τμῆμα ΘΚ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΒΓ (θ. 7)· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ τμῆμα ΔΕ ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΒΓ, καὶ ἄρα αἱ βάσεις ΒΓ, ΔΕ προεκτεινόμεναι θὰ συναντήσωσι τὸν ἄξονα ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ΑΗΒ, ΑΖΕ (θ. 17 διὰ παραβ. καὶ 18 διὰ ὑπερβ.). Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΓΒ, ΔΕ θὰ εἶναι παράλληλοι. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΜΞ, διαιροῦσα τὰς εὐθείας ΓΒ, ΔΕ εἰς δύο μέρη ἴσα κατὰ τὰ σημεῖα Ξ, Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Μ ἡ εὐθεῖα ΜΙ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΕΖ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΜΞ μία διάμετρος τῆς τομῆς (2, 28), καὶ ἡ εὐθεῖα ΜΙ, παράλληλος πρὸς τὰς εὐθείας τὰς τεταγμένως [κατηγμένας, θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς. Ἐὰν λοιπὸν τὰ τμήματα ΓΒ, ΔΕ εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΜΙ : ΜΞ = ΜΙ : ΜΝ (θ. 17 καὶ 18)· ὅπερ ἄτοπον. Τὸ τμῆμα ἄρα ΔΜΕ δὲν δύναται νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΘΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, τ' ἀποκοπτόμενα τμήματα, ὑπὸ δύο καθέτων, καὶ ἀπὸ τὸ ἓν μέρος τοῦ ἄξονος καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο (ἄνω καὶ κάτω) θὰ εἶναι ὅμοια καὶ ἴσα μεταξύ των, καὶ ὁμοίως θὰ εἶναι ὅμοια καὶ ἴσα τὰ τμήματα τ' ἀποκοπτόμενα ὑπὸ τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ κέντρου εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ αὐτό, καὶ τὰ τέσσαρα ταῦτα τμήματα θὰ εἶναι ὁμοίως κείμενα, καὶ οὐδὲν ἄλλο τμῆμα τῆς τομῆς αὐτῆς θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὰ πρῶτα τμήματα.

Ἔστω ΑΛ ὁ ἄξων ἐλλείψεως καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΘ, ΓΚ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ κέντρου, αἱ ΖΙ, ΗΟ, εὑρισκόμεναι εἰς τὰς αὐτὰς ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου. Λέγω, ὅτι τὰ τμήματα ΒΓ, ΘΚ, ΖΗ, ΙΟ εἶναι ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα, καὶ ὅτι οὐδὲν ἄλλο τμῆμα τῆς τομῆς εἶναι ὅμοιον πρὸς τὰ πρῶτα. (Ἕκαστον τμῆμα νοεῖται ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς καμπύλης, τῶν δύο καθέτων καὶ τοῦ μέρους τοῦ ἄξονος).



Εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ τμήματα ΒΓ, ΘΚ, ΖΗ, ΙΟ εἶναι ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα, ἐπειδὴ ταῦτα εἶναι ἴσα, καὶ τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουσιν (συμπίπτουσι μεταξύ των) (θ. 8). Ἀποδεικνύεται δὲ ὡς ἑξῆς, ὅτι οὐδὲν ἄλλο τμῆμα τῆς τομῆς εἶναι ὅμοιον πρὸς τὰ προηγούμενα τμήματα.

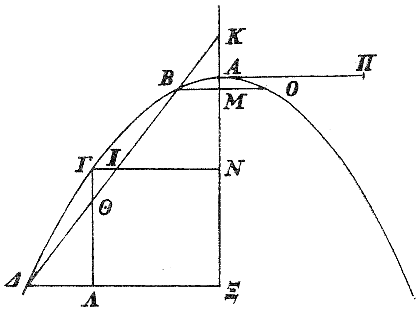
Ἔστω, ὅτι τὸ τμῆμα ΔΕ εἶναι, εἰ δυνατόν, ὅμοιον πρὸς τὰ προηγούμενα τμήματα καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΒΓ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὸν ἄξονα, θὰ τὸν συναντήσωσιν ὑπὸ γωνίας ὀρθὰς (κατὰ τὴν ὑπόθεσιν) (θ. 18). Αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΓΒ θὰ εἶναι λοιπὸν παράλληλοι καὶ ἂν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΜΞΝ, διαιροῦσα τὰς παραλλήλους ταύτας εἰς δύο ἴσα μέρη, κατὰ τὰ σημεῖα Ν, Ξ, καὶ ἡ εὐθεῖα αὕτη, ἡ ΜΞΝ θὰ εἶναι διάμετρος τῶν τμημάτων (2, 28). Ἐὰν λοιπὸν τὰ τμήματα ΔΕ, ΓΒ εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΒ : ΞΜ = ΔΕ : ΜΝ (ὁρισ. 7). Ὅπερ ἀδύνατον· διότι αἱ ἐπιζευγνυόμεναι εὐθεῖαι ΜΒ, ΜΓ προεκτεινόμεναι θὰ διήρχοντο διὰ τῶν σημείων Ε, Δ. Τὸ τμῆμα ἄρα ΔΕ δὲν δύναται νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

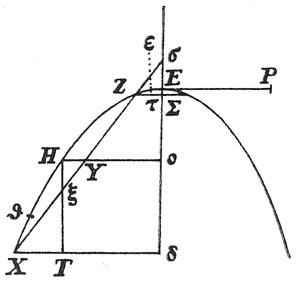
21

Ἐὰν ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας δύο παραβολῶν, ὥστε τ᾽ ἀποκοπτόμενα μέρη τῶν ἀξόνων, ἀπὸ τῶν κορυφῶν, νὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι αἱ παράμετροι τῶν δύο τομῶν, τ᾽ ἀποκοπτόμενα τμήματα ὑπὸ τῶν καθέτων, εἰς τὴν μίαν τομήν, θὰ εἶναι ὅμοια πρὸς τὰ τμήματα τῆς ἄλλης τομῆς καὶ ὁμοίως κείμενα, καὶ οὐδὲν ἄλλο τμῆμα τῶν τομῶν τούτων εἶναι ὅμοιον πρὸς τὰ προηγούμενα τμήματα.

Ἔστωσαν δύο παραβολαί, αἱ ΑΒ, ΕΖ, τῶν ὁποίων ἄξονες εἶναι οἱ ΑΞ, Εδ, καὶ παράμετροι αἱ ΑΠ, ΕΡ. Ἂς ἀχθῶσιν εἰς τὴν μίαν τομὴν αἱ κάθετοι ΒΜ, ΔΞ, καὶ εἰς τὴν ἄλλην αἱ Ζτ, Χδ, καὶ νὰ εἶναι Ετ : ΕΡ = ΑΜ : ΑΠ, καὶ Εδ : ΕΡ = ΞΑ : ΑΠ. Λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα ΒΑΟ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΖΕΣ, καὶ τὸ τμῆμα ΔΑ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΧΕ, καὶ τὸ τμῆμα ΒΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΖΧ.

Ἔχει δὲ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα ΒΑΟ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΖΕΣ (θ. 11), καὶ θὰ δειχθῇ τώρα κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον, ὅτι τὰ τμήματα ΒΔ, ΖΧ εἶναι ὅμοια. Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΔ, ΖΧ, καὶ ἂς προεκβληθῶσι μέχρι τῶν σημείων Κ, σ, καὶ ἂς διαιρεθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΔ, ΖΧ εἰς δύο ἴσα μέρη κατὰ τὰ σημεῖα Θ, ξ, ἐκ τῶν ὁποίων ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας αἱ εὐθεῖαι ΓΘΛ, ΗξΤ, καὶ ἐκ τῶν σημείων





Γ, Η ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΓΝ, Ηο κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΠ εἶναι πρὸς ἑκατέραν τῶν εὐθειῶν ΑΜ, ΑΞ, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ΕΡ πρὸς ἑκατέραν τῶν Ετ, Εδ, εἶναι φανερόν, ὅτι ΑΞ : ΑΜ = Εδ : Ετ, θὰ εἶναι ἄρα ΔΞ² : ΒΜ² = Χδ² : Ζτ² (1, 20). Εἶναι ἄρα ΔΞ : ΒΜ = Χδ : Ζτ, καὶ διὰ τοῦτο ΞΚ : ΚΜ = δσ : στ· καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 19), θὰ εἶναι ΚΞ : ΞΜ = δσ : δτ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΑΞ : ΑΜ = δΕ : Ετ, θὰ εἶναι δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων ΑΞ : ΞΜ = δΕ : δτ. Ἀλλ' ἐδείχθη ἤδη, ὅτι ΚΞ : ΞΜ = σδ : δτ· θὰ εἶναι λοιπὸν ΚΞ : ΞΑ = σδ : δΕ. Ἀλλὰ ΞΑ : ΞΔ = Εδ : δΧ (θ. 11), καὶ αἱ γωνίαι αἱ κείμεναι περὶ τὰ σημεῖα Ξ, δ εἶναι ὀρθαί· ὥστε τὰ τρίγωνα ΚΞΔ, σδΧ εἶναι ὅμοια, καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι αἱ κείμεναι περὶ τὰ σημεῖα Κ, σ εἶναι ἴσαι. Εἶναι ἄρα ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἡ ΔΚ : ΚΒ = Χσ : σΧ, καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 19) εἶναι ΚΔ : ΔΒ = Χσ : ΧΖ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΒΔ διηρέθη εἰς δύο ἴσα μέρη κατὰ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΧΖ ἐπίσης εἰς δύο ἴσα μέρη κατὰ τὸ σημεῖον ξ· εἶναι λοιπὸν ΚΔ : ΔΘ = Χσ : Χξ, καὶ ΔΞ : ΞΛ = Χδ : δΤ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΞΛ = ΓΝ, καὶ ἡ εὐθεῖα δΤ = Ηο· θὰ εἶναι λοιπὸν ΔΞ : ΓΝ = Χδ : Ηο, καὶ ΞΑ : ΑΝ = δΕ : Εο (1, 20). Ἀλλὰ ἐδείχθη, ὅτι ΚΞ : ΞΑ = σδ : δΕ· θὰ εἶναι ἄρα ΚΞ : ΞΝ = σδ : δο, καὶ ΚΔ : ΔΙ = σΧ : ΧΥ. Ἀλλὰ ΚΘ : ΘΔ = σξ : ξΧ· εἶναι λοιπὸν ΚΘ : ΘΙ = σξ : ξΥ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ τῶν τριγώνων ΙΘΓ, ΤξΗ, θὰ εἶναι ΙΘ : ΘΓ = Υξ : ξΗ· θὰ εἶναι ἄρα ΚΘ : ΘΓ = σξ : ξΗ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΘΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν τομὴν κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ καταλήγει εἰς τὸν ἄξονα, διότι αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΘΚ καὶ περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο παραλλήλων· ὁμοίως δὲ ἡ σξ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ σημείου Η μέχρι τοῦ ἄξονος· ἡ ἐφαπτομένη ἄρα ἡ ἀγομένη διὰ τοῦ σημείου Η : Ηξ = ἐφαπτομένη ἀγομένη διὰ τοῦ σημείου Γ : ΓΘ. Κατὰ ταῦτα λοιπόν, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων μετὰ τῶν ἀξόνων, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦσιν εἰς αὐτὰς εἶναι ἴσαι, εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ τμήματα, ἐκ τῶν κορυφῶν τῶν ὁποίων ἤχθησαν αἱ ἐφαπτόμεναι, θὰ εἶναι ὅμοια (θ. 17)· ὥστε καὶ τὸ τμῆμα ΔΓΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΧΗΖ.

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ἄλλο τμῆμα, ὡς τὸ θε, μὴ ἀποκοπτόμενον ὑπὸ τῶν καθέτων, αἵτινες ἐλέχθησαν ἀνωτέρω, λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦτο δὲν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΔΓΒ.

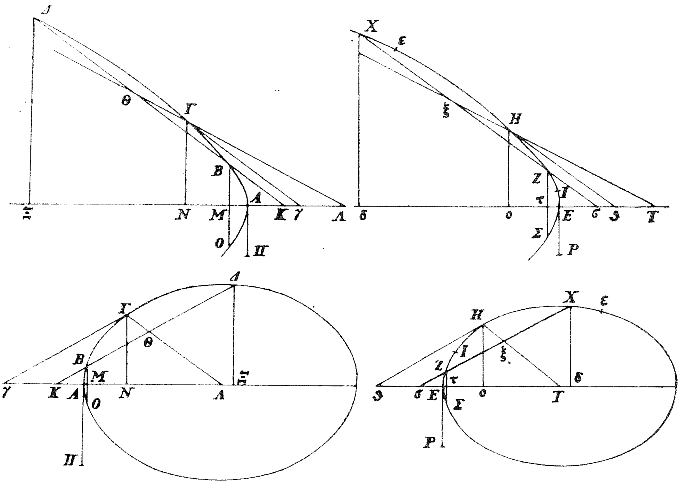
Διότι, τὸ μὲν τμῆμα ΔΓΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΧΗΖ, τὸ δὲ τμῆμα ΧΗΖ δὲν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα θε (θ. 19), διότι τοῦτο δὲν ἔχει ἀποκοπῆ ὑπὸ τῶν αὐτῶν καθέτων· τὸ τμῆμα ἄρα θε δὲν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΔΓΒ.

22

Ἐὰν κάμωμεν τὰς αὐτὰς κατασκευὰς εἰς ὑπερβολὰς ἢ ἐλλείψεις δεικνύονται τὰ αὐτά, ὡς εἰς τὴν παραβολὴν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Ἂς γίνωσιν αἱ αὐταὶ κατασκευαί, ὡς ἐγένετο προηγουμένως εἰς τὴν παραβολήν, καὶ ἂς προεκταθῶσιν αἱ διάμετροι τῶν τμημάτων, αἱ ΓΘ, Ηξ, μέχρι τῶν κέντρων Λ, Τ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Γ, Η αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν, αἱ Γγ, Ηθ, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας ΔΚ, Χσ. Ἂς εἶναι δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΑΞ πρὸς τὴν παράμετρον ΑΠ, ὡς αἱ εὐθεῖαι Ετ, Εδ πρὸς τὴν παράμετρον ΕΡ τῆς ἄλλης τομῆς. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ τομαὶ εἶναι ὅμοιαι, τὰ σχήματά των (τὰ ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα βάσιν τὴν θεωρουμένην διάμετρον καὶ ὕψος τὴν παράμετρον), θὰ εἶναι ὅμοια, καὶ ὁ πλάγιος ἄξων τῆς μιᾶς τομῆς θὰ εἶναι πρὸς τὴν παραβολήν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτόν, ὡς ὁ ἄξων τῆς ἄλλης, πρὸς τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον (θ. 12). Ἔστω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, Ετ εὑρίσκονται εἰς τὸν λόγον τῶν παραμέτρων· κατὰ τὰ δειχθέντα εἰς τὸ δωδέκατον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, ἐὰν εἰς τὸ τμῆμα ΒΑΟ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΟ, καὶ εἰς τὸ τμῆμα ΖΕΣ, παράλληλοι πρὸς τὴν

ΖΣ, καὶ ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλλήλων τούτων εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς ἕκαστον τμῆμα, αἱ παράλληλοι τοῦ τμήματος ΖΕΣ, ὡς καὶ ἡ βάσις τοῦ ΖΣ θὰ εἶναι πρὸς τὰ μέρη τοῦ ἄξονος Ετ, τὰ ὁποῖα αἱ παράλληλοι αὗται ἀποκόπτουσιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ε, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους, εἰς οὓς εἶναι αἱ δύο αὗται παράλληλοι τοῦ τμήματος ΒΑΟ, ὡς καὶ ἡ βάσις τοῦ ΒΟ, πρὸς τὰς ἀποκοπτομένας



εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΜ, ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α, καὶ ὁ λόγος τῶν εὐθειῶν τῶν ἀποκοπτομένων ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΜ πρὸς τὰς εὐθείας τὰς ἀποκοπτομένας ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ετ θὰ εἶναι ὁ αὐτός. Τὰ τμήματα ἄρα ΒΑΟ, ΖΕΣ εἶναι ὅμοια (ὁρισ. 7).

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΜ : παράμετρος ΑΠ = Ετ : παράμετρος ΕΡ, καὶ ἡ ΑΞ : ΑΠ = δΕ : ΕΡ, συνάγεται, ὅτι θὰ εἶναι ΑΜ : ΜΒ = Ετ : τΖ, ἡ δὲ ΞΑ : ΑΜ = δΕ : Ετ· εἶναι λοιπὸν ΞΑ : ΒΜ =

$\delta E : \tau Z$. Ἀλλὰ $\Delta\Xi : \Xi A = X\delta : \delta E$· θὰ εἶναι ἄρα $\Delta\Xi : BM = \delta X : \tau Z$, καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\Xi K : KM = \delta\sigma : \sigma\tau$, καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 19), θὰ εἶναι $K\Xi : \Xi M = \delta\sigma : \delta\tau$. Ἀλλὰ $\Xi M : \Xi A = \delta\tau : \delta E$· εἶναι λοιπὸν $K\Xi : \Xi A = \sigma\delta : \delta E$. Ἀλλὰ εἶναι $\Xi A : \Delta\Xi = E\delta : \delta X$· εἶναι λοιπὸν $K\Xi : \Delta\Xi = \sigma\delta : \delta X$. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι, αἱ παρὰ τὰ σημεῖα E, δ εἶναι ὀρθαί· τὰ τρίγωνα ἄρα $K\Delta\Xi$, $\sigma X\delta$ εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ γωνίαι, αἱ παρὰ τὰ σημεῖα K, σ εἶναι ἴσαι. Τὰ σχήματα δὲ τῶν ὁμοίων τομῶν εἶναι ὅμοια καὶ αἱ εὐθεῖαι $\Gamma\gamma$, $H\theta$ εἶναι ἐφαπτόμεναι· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $\Lambda N \times N\gamma : \Gamma N^2 =$ ὀρθογώνιον $To \times o\theta : Ho^2$ (1, 37). Ἀλλὰ τὸ $\Gamma N^2 : N\gamma^2 = Ho^2 : o\theta^2$, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $\Gamma N\gamma$, $Ho\theta$ εἶναι ὅμοια· εἶναι λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $\Lambda N \times N\gamma : N\gamma^2 =$ ὀρθογώνιον $TO \times o\theta : o\theta^2$, καὶ ἄρα θὰ εἶναι $\Lambda N : N\gamma = To : o\theta$. Ἀλλὰ $N\gamma : \Gamma N = \theta o : oH$· θὰ εἶναι λοιπὸν $\Lambda N : \Gamma N = To : oH$. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι, αἱ περὶ τὰ σημεῖα N, o εἶναι ὀρθαί, καὶ τὰ τρίγωνα $\Gamma\gamma N$, $H\theta o$ εἶναι ὅμοια· αἱ γωνίαι λοιπόν, αἱ περὶ τὰ σημεῖα Λ, T καὶ αἱ γωνίαι αἱ περὶ τὰ σημεῖα γ, θ εἶναι ἴσαι. Τὰ τρίγωνα ἄρα $\Gamma\gamma\Lambda$, $H\theta T$ εἶναι ὅμοια, καὶ $\gamma\Lambda : \Gamma\Lambda = \theta T : TH$. Εἶναι δὲ $\gamma K : \Gamma\Theta = \sigma\theta : H\xi$, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα $\gamma\Gamma$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΘK, καὶ ἡ εὐθεῖα $H\theta$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $\sigma\xi$, ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ τῶν τομῶν εἶναι $AM : MB = E\tau : \tau Z$, καὶ $MB : MK = Z\tau : \tau\sigma$· ἐκ ταυτότητος λοιπὸν εἶναι [$AM : MK = E\tau : \tau\sigma$, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), καὶ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 17), εἶναι $AM : AK = E\tau : E\sigma$]. Ἀλλὰ $A\Lambda : AM = ET : \tau E$, (διότι, ὁ λόγος ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν λόγων $(A\Lambda : A\Pi) \times (A\Pi : AM)$ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων

(ΕΤ : ΕΡ) x (ΕΡ : τΕ))· εἶναι ἄρα ΑΛ : ΑΚ = ΤΕ : Εσ. Εἶναι δὲ ΛΝ : Λγ = οΤ : Τθ, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων, καὶ ΝΛ : Λγ = $ΑΛ^2 : Αγ^2$, ὡς καὶ οΤ : Τθ = $ΕΤ^2 : Τθ^2$ (1, 37)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΛ^2 : Λγ^2 = ΕΤ^2 : Τθ^2$· ὥστε ΑΛ : Λγ = ΕΤ : Τθ. Ἀλλὰ ἐδείχθη ἤδη, ὅτι ΑΛ : ΛΚ = ΕΤ : Τσ· εἶναι λοιπὸν Λγ : ΛΚ = Τθ : Τσ, καὶ ἐπομένως Λγ : γΚ = Τθ : θσ. Ἀλλὰ Γγ : γΛ = θΗ : θΤ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων γΛΓ, θΤΗ· θὰ εἶναι λοιπὸν Γγ : γΚ = θΗ : θσ. Ἐδείχθη ὅμως ἀνωτέρω, ὅτι γΚ : ΓΘ = σθ : Ηξ· εἶναι λοιπὸν [ἕνεκα τῆς ταυτότητος καὶ Γγ : ΓΘ = θΗ : Ηξ]. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι, αἱ περὶ τὰ σημεῖα γ, θ εἶναι ἴσαι· τὰ τμήματα λοιπὸν ΒΓΔ, ΖΗΧ εἶναι ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα, κατὰ τὰ δειχθέντα εἰς τὸ δέκατον ὄγδοον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου.

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ἄλλο τμῆμα, ὡς τὸ Ιε, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ ἔχῃ ἀποκοπῇ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν τεταγμένως κατηγμένων, αἵτινες προελέχθησαν, καὶ τὸ ὁποῖον, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλλείψεως, δὲν ἔχει ἀποκοπῇ ὑπὸ τῶν τεταγμένως κατηγμένων εὐθειῶν, τῶν κειμένων εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς πρώτας, πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ κέντρου, λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦτο δὲν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΔΓΒ.

Διότι, εἰ δυνατόν, ἔστω, ὅτι εἶναι ὅμοιον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τμῆμα ΒΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΖΧ, τὸ τμῆμα Ιε θὰ εἶναι ἐπίσης ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΖΧ. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν ἔχει ἀποκοπῇ ἀπὸ τὰς αὐτὰς καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα, οὔτε ἀπὸ τὰς καθέτους τὰς κειμένας εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου· ὑπετέθη ἄρα ἄτοπον πρᾶγμα. Τὸ τμῆμα ἄρα Ιε δὲν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΧΖ, οὔτε, ἐπομένως, πρὸς τὸ τμῆμα ΔΓΒ (θ.

19 καὶ 20)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

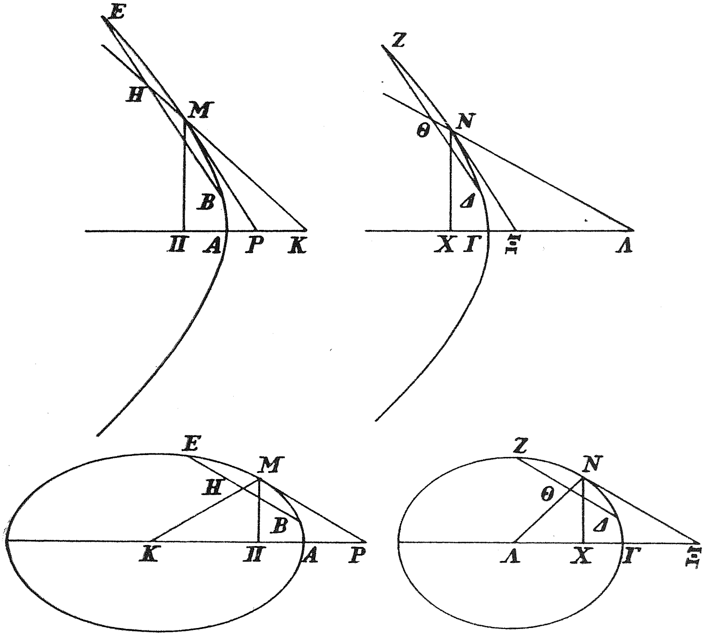
23

Εἰς ἀνομοίας τομὰς οὐδὲν μέρος τῆς μιᾶς εἶναι ὅμοιον πρὸς οἱονδήποτε μέρος ἄλλης.

Ἔστωσαν ἀνόμοιαι τομαί, αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἔστωσαν κατὰ πρῶτον καὶ αἱ δύο ὑπερβολαὶ ἢ ἐλλείψεις. Λέγω, ὅτι οὐδὲν τμῆμα τῆς τομῆς ΑΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς οἱονδήποτε τμῆμα τῆς τομῆς ΓΔ.

Διότι, εἰ δυνατόν, ἔστωσαν τὰ τμήματα ΒΕ, ΔΖ ὅμοια. Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΕ, ΔΖ, καὶ ἂς διαιρεθῶσιν εἰς δύο ἴσα μέρη κατὰ τὰ σημεῖα Θ, Η, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν κέντρων Κ, Λ τῶν τομῶν, αἱ εὐθεῖαι ΗΜΚ, ΘΝΛ, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι διάμετροι τῶν τομῶν (1, 47). Αἱ διάμετροι αὗται θὰ εἶναι ἄξονες τῶν τομῶν, ἢ δὲν θὰ εἶναι. Ἐὰν αὗται εἶναι ἄξονες, καὶ ἐὰν τὰ τμήματα ΒΕ, ΔΖ εἶναι ὅμοια, αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐπὶ τῶν ἀξόνων τούτων θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας ΕΒ, ΔΖ, καὶ οἱ λόγοι τῶν καθέτων πρὸς τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας ἀποκόπτουσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἀπὸ τῆς κορυφῆς, εἰς τὴν μίαν τῶν τομῶν, θὰ εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τοὺς λόγους τῶν καθέτων πρὸς τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας ἀποκόπτουσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος εἰς τὴν ἄλλην τομήν, ὁ δὲ λόγος τῶν εὐθειῶν τῶν ἀποκοπτομένων ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος, πρὸς τὰς εὐθείας τὰς ἀποκοπτομένας ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἄξονος θὰ εἶναι ἐπίσης ὁ αὐτός. Ἀλλ' ἀφοῦ αἱ παράλληλοι αὗται εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν, αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ὅμοιαι· ὅπερ ἄτοπον, διότι αἱ τομαὶ ὑπετέθησαν ἀνόμοιαι.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΗΜΚ, ΘΝΛ δὲν εἶναι ἄξονες τῶν τομῶν, ἔστωσαν ἄξονες αὐτῶν αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΓΛ. Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Μ, Ν, αἱ εὐθεῖαι ΜΠ, ΝΧ κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας, καὶ ἐκ τῶν αὐτῶν σημείων ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν ΜΡ, ΝΞ. Εἶναι λοιπὸν φανερὸν (θ. 18), ὅτι τὰ τρίγωνα ΜΡΚ,



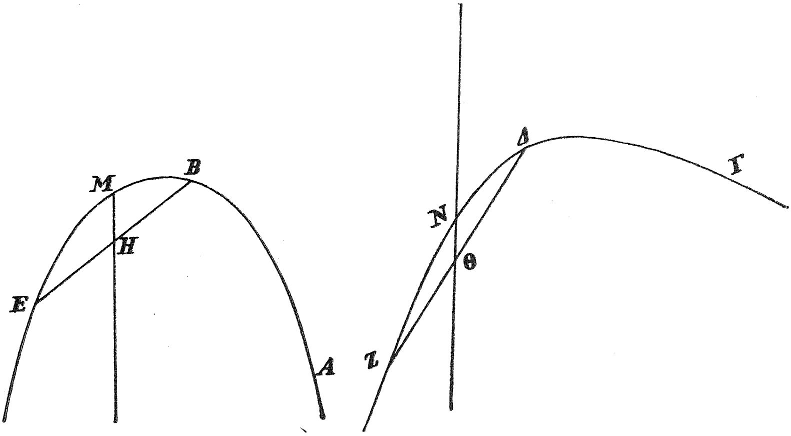
ΝΞΛ, τῶν ὁποίων αἱ εὐθεῖαι ΜΠ, ΝΧ εἶναι κάθετοι, εἶναι ὅμοια· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $\mathrm{ΚΠ} \times \mathrm{ΠΡ} : \mathrm{ΜΠ}^2 =$ ὀρθογώνιον $\mathrm{ΛΧ} \times \mathrm{ΧΞ} : \mathrm{ΝΧ}^2$ (1, 37). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{ΚΠ} \times \mathrm{ΠΡ} : \mathrm{ΜΠ}^2 =$ πλάγιος ἄξων τῆς τομῆς ΑΒ : ἀντίστοιχος παράμετρος, καὶ τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{ΛΧ} \times \mathrm{ΧΞ} : \mathrm{ΝΧ}^2 =$ πλάγιος ἄξων τῆς τομῆς ΓΔ:

ἀντίστοιχος παράμετρος· ὁ ἄξων λοιπὸν τῆς τομῆς ΑΒ : ἀντίστοιχος παράμετρος = ὁ ἄξων τῆς τομῆς ΓΔ : ἀντίστοιχος παράμετρος. Τὰ σχήματα λοιπὸν τῶν τομῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι ὅμοια, καὶ συνεπῶς αἱ τομαὶ εἶναι ὅμοιαι (θ. 12). Αἱ τομαὶ ἄρα ΑΒ, ΓΔ, αἱ ὁποῖαι ὑπετέθησαν ἀνόμοιαι εἶναι ὅμοιαι καὶ εἶναι ἄτοπον, ὅτι τὸ τμῆμα ΒΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΔΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24

Ἐὰν ἡ μία τομὴ ΑΒΕ εἶναι παραβολὴ καὶ ἡ ἄλλη ἡ ΓΔΖ εἶναι ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἔχει δειχθῆ (θ. 14), ὅτι ἡ πρώτη τομὴ δὲν εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν ἄλλην· λέγω τώρα, ὅτι καὶ τὰ τμήματα τῶν τομῶν τούτων δὲν δύνανται νὰ εἶναι ὅμοια μεταξύ των.

Διότι, εἰ δυνατόν, ἔστω, ὅτι εἶναι ὅμοια, καὶ ἂς ἀχθῶσιν εἰς τὰ τμήματα ταῦτα εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ πλήθους, παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας ΒΕ, ΔΖ (ὁρισ. 7), οὕτως, ὥστε οἱ λόγοι τῶν μερῶν τῆς διαμέτρου ΜΗ, τῶν ἀποκοπτομένων ὑπὸ τῶν παραλλήλων, εἰς τὸ τμῆμα ΒΕ, πρὸς τὴν κορυφὴν Μ, πρὸς αὐτὰς ταύτας τὰς παραλλήλους, νὰ εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τοὺς λόγους τῶν ἀποκοπτομένων εὐθειῶν τῆς διαμέτρου ΝΘ, πρὸς τὴν κορυφὴν Ν, πρὸς τὰς παραλλήλους τὰς ἀγομένας εἰς τὸ ἄλλο τμῆμα ΔΖ. Καὶ ὅτι ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς τμήματος θὰ εἶναι συγχρόνως, πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ, ὡς ἡ βάσις τοῦ ἄλλου τμήματος πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ, καὶ ὅτι τὰ μέρη τ' ἀποκοπτόμενα ἐπὶ τῆς μιᾶς διαμέτρου θὰ εἶναι παντοῦ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, πρὸς τὰ μέρη τ' ἀποκοπτόμενα ἐπὶ τῆς ἄλλης διαμέτρου (ὁρισ. 7). Εὐκόλως λοιπὸν δεικνύεται, ὅτι δὲν δύναται νὰ συμβαίνῃ τοῦτο, διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου, καθ᾽ ὃν ἐδείχθη δι᾽ ὁλοκλήρους τὰς τομὰς (θ. 14).



Ἐὰν δὲ ἡ μία τῶν τομῶν ἦτο ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἄλλη ἔλλειψις, ἀποδεικνύεται τὸ ἄτοπον διὰ παρομοίων συλλογισμῶν, ὡς εἰς τὸ δέκατον πέμπτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου.

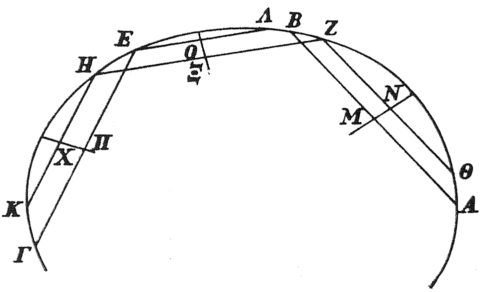
25

Οὐδὲν μέρος τῶν τριῶν τομῶν κώνου εἶναι τόξον κύκλου.

Ἔστω ΑΒΕΓ τομή τις κώνου. Λέγω, ὅτι οὐδὲν μέρος τῆς τομῆς αὐτῆς εἶναι τόξον κύκλου.

Διότι, εἰ δυνατόν, ἔστω, ὅτι αὕτη εἶναι τόξον κύκλου, εἰς τὸ ὁποῖον ἄγονται δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΕ, μὴ παράλληλοι, καὶ εὐθεῖά τις ΖΗ μὴ παράλληλος πρὸς τὰς πρώτας. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΖΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΗΚ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἂς διαιρεθῶσιν ὅλαι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἰς δύο μέρη ἴσα ἑκάστη, διὰ τῶν σημείων Μ, Ν, Ο, Ξ, Π, Χ. Θὰ εἶναι λοιπὸν αἱ ἐπιζευγνυόμεναι εὐθεῖαι ΜΝ, ΟΞ, ΠΧ διάμετροι τοῦ κύκλου, καὶ ὡς διαιροῦσαι παραλλήλους χορδὰς εἰς δύο ἴσα μέρη θὰ εἶναι κάθετοι (Εὐκλ. 3, 3). Ἀλλὰ αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι διάμετροι τῆς τομῆς

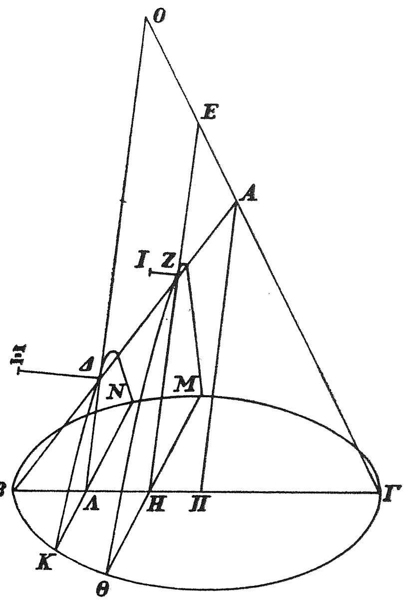


(2, 28), καὶ αἱ εὐθεῖαι ΜΝ, ΞΟ, ΠΧ θὰ εἶναι ἀκόμη ἄξονες τῆς τομῆς. Ἀλλὰ αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν συναντῶνται εἰς μίαν εὐθεῖαν, διότι αἱ πρώτως ληφθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι δὲν ἤχθησαν παράλληλοι· ὅπερ ἄτοπον, διότι εἰς οὐδεμίαν τομὴν συναντῶνται περισσότεροι τῶν δύο ἀξόνων (2, 48). Οὐδὲν ἄρα μέρος τῆς τομῆς κώνου εἶναι τόξον κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδων παραλλήλων, τὰ ὁποῖα προεκτεινόμενα πέραν τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ὑποτείνουσι τὴν ἐξωτερικήν του γωνίαν, αἱ ὑπερβολαί, αἱ γεννώμεναι οὕτω πως, θὰ εἶναι ὅμοιαι μεταξύ των καὶ ἄνισοι.

Ἔστω κῶνος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς τμηθῇ οὗτος δι᾽ ἐπιπέδων παραλλήλων, τῶν ὁποίων αἱ κοιναὶ τομαὶ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως τοῦ κώνου εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΘΜ, ΚΝ, ἂς ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἡ εὐθεῖα ΒΛΗΓ κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ταύτας, καὶ ἂς τμηθῇ ὁ κῶνος δι᾽ ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, ὅπερ θὰ τμήσῃ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου κατὰ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἔστωσαν αἱ κοιναὶ τομαὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῶν δύο προηγουμένως ληφθέντων παραλλήλων ἐπιπέδων, αἱ εὐθεῖαι ΔΛ, ΖΗ, αἵτινες ἂς προεκταθῶσι μέχρι τῶν σημείων Ο, Ε. Λέγω, ὅτι ἡ τομὴ ΘΖΜ, εἶναι ὁμοία, ἀλλ᾽ ὄχι ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΚΔΝ.



Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α ἡ εὐθεῖα ΑΠ παράλληλος πρὸς τὰς εὐθείας ΔΛ, ΖΗ, καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖα $ΟΔ : ΔΞ = ΑΠ^2 : ΒΠ \times ΠΓ$, καὶ εὐθεῖα $ΕΖ : ΖΙ = ΑΠ^2 \times ΒΠ : ΠΓ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΒΛ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΚΝ, τὰ τετράγωνα τῶν ἄλλων εὐθειῶν τῶν ἀγομένων εἰς τὴν ὑπερβολὴν ΚΔΝ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΛ, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΛΝ, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιπέδων, τῶν παραβαλλομένων παρὰ τὴν παράμετρον ΔΞ, καὶ ὑπερβαλλόντων (ὑπερεχόντων) κατὰ ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς τὸ ΟΔ x ΔΞ (1, 12).

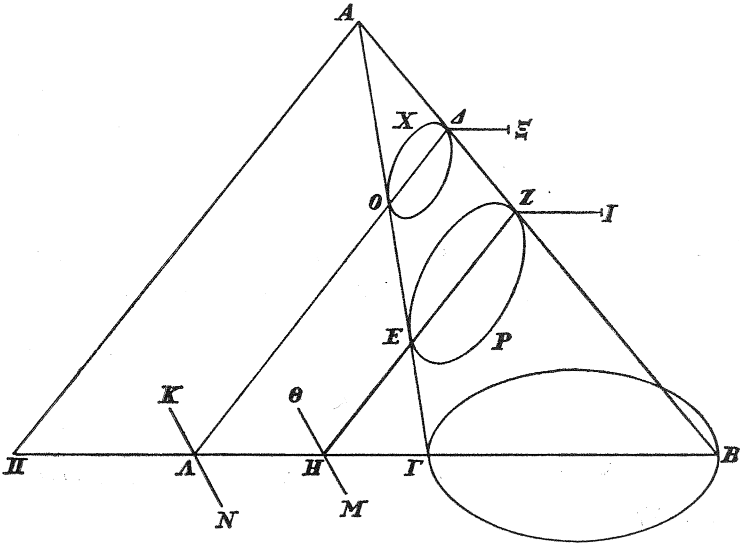
Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΘ, τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὴν ὑπερβολὴν ΘΖΜ θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ παραβαλλόμενα παρὰ τὴν παράμετρον ΖΙ, καὶ ὑπερβάλλοντα (ὑπερέχοντα) κατὰ ὀρθογώνια σχήματα ὅμοια πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΙ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΔΛ, ΚΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΖΗ, ΘΜ, διότι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι μεταξύ των· αἱ τομαὶ λοιπὸν εἶναι ὅμοιαι. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΟΔ x ΔΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖ x ΖΙ, αἱ τομαὶ δὲν εἶναι ἴσαι (θ. 2)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ ὑπὸ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων μεταξύ των, ἅτινα συναντῶσι τὰς δύο πλευρὰς τοῦ τριγώνου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καὶ δὲν εἶναι παράλληλα πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου, οὔτε κεῖνται ἀπέναντι τῆς βάσεως ταύτης, αἱ γεννώμεναι τομαὶ θὰ εἶναι ἐλλείψεις ὅμοιαι καὶ ὄχι ἴσαι μεταξύ των.

Ἔστω, ὅτι δύο ἐπίπεδα παράλληλα τέμνουσι τὸν κῶνον ΑΒΓ, καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΘΜ, ΚΝ εἶναι αἱ κοιναὶ τομαί των μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἡ εὐθεῖα ΒΓΗΛ κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΘΜ, ΚΝ, καὶ ἂς τμηθῇ ὁ κῶνος διὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς τελευταίας ταύτης εὐθείας (ΒΓΗΛ) καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου, καὶ ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΖΕΗ, ΔΟΛ αἱ κοιναὶ τομαὶ τῶν προηγουμένων ἐπιπέδων. Λέγω, ὅτι αἱ τομαὶ ΖΡΕ, ΔΧΟ εἶναι ὅμοιαι, ἀλλὰ ἄνισοι.

Ἄς ἀχθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ κώνου ἡ εὐθεῖα ΑΠ παράλληλος πρὸς τὰς εὐθείας ΖΗ, ΔΛ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ διάμετρος



ΟΔ : παράμετρος ΔΞ = ἡ διάμετρος ΕΖ : παράμετρος ΖΙ, ἐπειδὴ οἱ δύο οὗτοι λόγοι εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τὸν λόγον ΑΠ² : ΒΠ x ΠΓ (1, 13). Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΒΓΛ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΚΝ· αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν αἵτινες ἔχουσιν ἀχθῇ ὡς τεταγμένως κατηγμέναι εἰς τὴν ἔλλειψιν ΔΧΟ θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΚΝ, καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ παραβαλλόμενα παρὰ τὴν παράμετρον

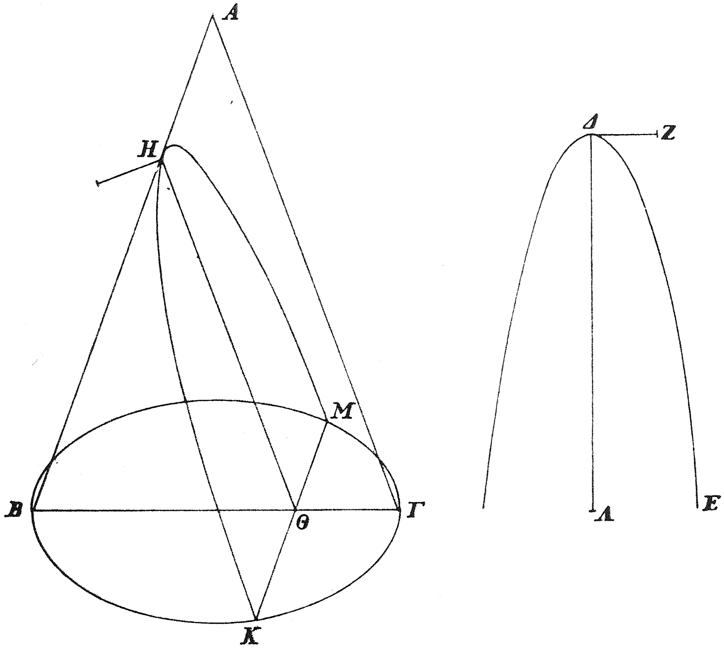
ΔΞ, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐλλείπουσι πάντοτε σχήματα ὅμοια πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΞΔ x ΔΟ (1, 13). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους αἱ τεταγμένως κατηγμέναι εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον ΖΕ, εἰς τὴν ἔλλειψιν ΖΡΕ, θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΘΜ, καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ παραβαλλόμενα παρὰ τὴν παράμετρον ΖΙ, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐλλείπουσι πάντοτε σχήματα ὅμοια πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΙ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΚΛΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΘΗΖ, διότι αἱ εὐθεῖαι ΚΛ, ΛΔ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας ΘΗ, ΗΖ. Τὸ σχῆμα λοιπὸν ΟΔ x ΔΞ θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ σχῆμα ΖΕ x ΖΙ. Εἶναι ἄρα αἱ τομαὶ τοῦ κώνου ὅμοιαι μεταξύ των (θ. 12), ὥστε καὶ αἱ τομαὶ ΖΡΕ, ΔΧΟ εἶναι ὅμοιαι. Αὗται ὅμως δὲν εἶναι ἴσαι, διότι τὸ ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΙ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΟΔ x ΔΞ, καὶ ἑπομένως αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ἄνισοι (θ. 2).

28 (πρόβλημα)

Εἰς δοθέντα ὀρθὸν κῶνον νὰ εὑρεθῇ τομὴ ἴση πρὸς δοθεῖσαν παραβολήν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ὀρθὸς κῶνος, τοῦ ὁποίου τομὴ διερχομένη διὰ τοῦ ἄξονος εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ δοθεῖσα παραβολὴ ἡ ΔΕ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΛ, καὶ παράμετρος ἡ ΔΖ. Ἂς γίνῃ δὲ εὐθεῖα ΔΖ : ΑΗ = ΓΒ² : ΑΒ x ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΗΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ὁ κῶνος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας ΗΘ, καὶ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, γεννῶντος τὴν τομὴν ΚΗΜ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΗΘ. Λέγω, ὅτι ἡ τομὴ ΚΗΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΔΕ.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων εἰς τὴν τομὴν ΚΗ καθέτως ἐπὶ τὸν ἄξονα ΗΘ, εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ παραβαλλόμενα [παρὰ τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον τοῦ ἄξονος τούτου], εἶναι δὲ ἡ παράμετρος αὕτη : εὐθεῖα ΑΗ =



ΒΓ^2 : ὀρθογώνιον ΑΒ x ΑΓ (1, 11), καὶ ἐπειδὴ ἔχει γίνει εὐθεῖα ΔΖ : ΑΗ = ΒΓ^2 : ΒΑ x ΑΓ, ἡ εὐθεῖα ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον τῆς τομῆς ΚΗΜ. Ἀλλά, ἐὰν εἶναι οὕτως, εἶναι φανερὸν (θ. 1), ὅτι αἱ τομαὶ εἶναι ἴσαι, καὶ ἄρα ἡ τομὴ ΔΞ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΗΚ.

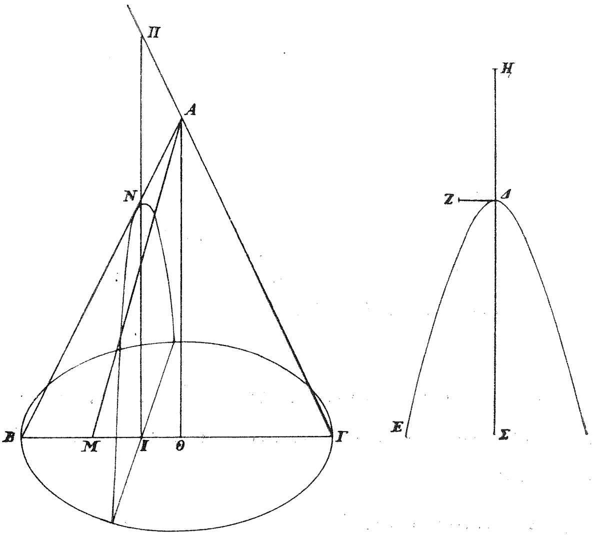
Λέγω, ὅτι ἐκτὸς μόνης τῆς παραβολῆς, ἡ ὁποία προελέχθη, δὲν εὑρίσκεται ἄλλη παραβολή, ἡ ὁποία εἰς τὸν αὐτὸν κῶνον νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν παραβολήν, καὶ ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὴν κορυφήν της ἢ τὸ ἄκρον τοῦ ἄξονος αὐτῆς ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ.

Διότι, ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἄλλη παραβολὴ ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΔΕ, τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς θὰ ἔτεμνε πρὸς ὀρθὰς γωνίας (δηλ. καθέτως) τὸ τρίγωνον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου, καὶ ὁ ἄξων τῆς τομῆς αὐτῆς θὰ ἔκειτο εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐπειδὴ ὁ κῶνος εἶναι ὀρθός. Διότι τοῦτο συμβαίνει διὰ τοὺς ἄξονας ὅλων τῶν τομῶν εἰς τὸν ὀρθὸν κῶνον. Ἐὰν δὲ ἦτο δυνατόν, ἄλλη τομὴ ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΔΕ, νὰ εἶχε τὴν κορυφήν της ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ὁ ἄξων αὐτῆς θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, καὶ ἡ κορυφή της θὰ ἦτο σημεῖον διάφορον τοῦ σημείου Η, ἡ δὲ παράμετρος αὐτῆς θὰ ἦτο πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀποκοπτομένην ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, μεταξὺ τῆς τομῆς ταύτης καὶ τῆς κορυφῆς Α τοῦ κώνου, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΒΓ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΑ x ΑΓ. Ὁ τελευταῖος ὅμως λόγος αὐτὸς εἶναι ὁ τῆς εὐθείας ΔΖ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΗ· ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΔΖ δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον αὐτῆς τῆς ἄλλης τομῆς, ἡ ὁποία ἄρα δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΔΕ. Ἀλλὰ ὑπετέθη, ὅτι αἱ τομαὶ αὗται εἶναι ἴσαι· ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου. Δὲν θὰ εὑρίσκηται ἄρα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ κορυφὴ τοῦ ἄξονος οἱασδήποτε ἄλλης τομῆς ἴσης πρὸς τὴν τομὴν ΔΕ.

29 (πρόβλημα)

Εἰς δοθέντα ὀρθὸν κῶνον νὰ εὑρεθῇ τομὴ ἴση πρὸς δοθεῖσαν ὑπερβολήν. Πρέπει δὲ πάντοτε ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς βάσεως νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς πλαγίας διαμέτρου, ἢ τοῦ ἄξονος τῆς δοθείσης τομῆς πρὸς τὴν παράμετρον τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν διάμετρον ταύτην.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος τοῦ ὁποίου τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερ-



χόμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄξων ἡ εὐθεῖα ΑΘ, καὶ ἡ δοθεῖσα ὑπερβολὴ ΔΕ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΗΔΖ, καὶ σχῆμα αὐτῆς (δηλ. ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν τὸν πλάγιον ἄξονα καὶ ὕψος τὴν παράμετρον) τὸ ὀρθογώνιον ΗΔ x ΔΖ. Ἔστω δὲ πρῶτον $ΑΘ^2 : ΒΘ^2 =$ εὐθεῖα ΗΔ : ΔΖ· ἂς ἀχθῇ εὐθεῖά τις ὡς ἡ ΝΠ, παράλληλος πρὸς τὴν ΑΘ, καὶ ἴση πρὸς τὴν ΗΔ, ὑποτείνουσα τὴν γωνίαν ΒΑΠ (λῆμμα Πάππου 6), καὶ διὰ τῆς εὐθείας ΝΠ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, συναντῶν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Λέγω, ὅτι ἡ γεννωμένη ὑπερβολὴ διὰ τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου, τοῦ ὁποίου ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΙΝΠ [εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὑπερβολὴν ΔΕ].

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΠΝ, ἡ εὐθεῖα, τουτέστιν ἡ πλαγία διάμετρος θὰ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρον τῆς τομῆς, ὡς τὸ $ΑΘ^2 : ΓΘ \times ΘΒ$ (1, 12). Εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα ΗΔ : ΔΖ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἔχει ληφθῇ εὐθεῖα ΠΝ = εὐθεῖα ΗΔ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΔΖ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον τῆς τομῆς, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΠΝΙ. Καὶ ἐκ τούτου, τὸ σχῆμα τῆς τομῆς, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΠΝΙ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σχῆμα τῆς τομῆς ΔΕ, καί, ἄρα αὐταὶ αἱ τομαὶ εἶναι ἴσαι (θ. 2). (Σημ. : τὸ σχῆμα νοεῖται ὡς καὶ ἀνωτέρω).

Προσέτι δέ, δὲν εὑρίσκεται ἄλλη τομὴ ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΔΕ, τῆς ὁποίας τὸ ἀκραῖον σημεῖον τοῦ ἄξονος νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ.

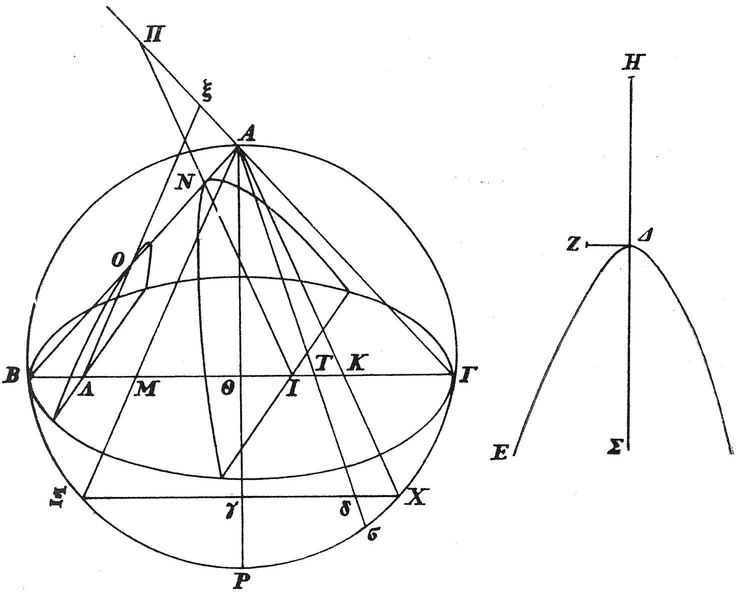
Διότι, ἐὰν τοῦτο εἶναι δυνατόν, ὁ ἄξων τῆς τομῆς ταύτης θὰ εἶναι ἐπίσης εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς τῆς ἄλλης τομῆς θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (θ. 28). Ἐὰν λοιπὸν ἡ ἄλλη αὐτὴ τομὴ εἶναι ὑπερβολὴ καὶ ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΔΕ, ὁ ἄξων αὐτῆς θὰ συναντήσῃ τὴν πλευρὰν ΑΓ προεκτεινομένην πέραν τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, ὥστε τὸ ἀποκοπτόμενον μέρος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ σημείου συναντήσεως μετὰ τῆς εὐθείας ΑΓ προεκτεινομένης νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΗ (θ. 2).

Ὁ ἄξων ὅμως αὐτὸς δὲν εἶναι ἡ εὐθεῖα ΠΝ, καὶ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην, διότι, ἐὰν ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΠΝ, δὲν θὰ ἦτο ἴσος πρὸς αὐτήν. Ἔστω λοιπόν, ὅτι δὲν εἶναι παράλληλος, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Α, παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τομῆς, ἡ εὐθεῖα ΑΜ, ἡ ὁποία θὰ πέσῃ εἴτε μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΘ, εἴτε μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΘ καὶ ΑΓ. Θὰ εἶναι λοιπὸν $ΑΜ^2 : ΒΜ \times ΜΓ = ΔΗ : ΔΖ$· ὅπερ ἄτοπον· διότι τὸ $ΑΜ^2$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $ΑΘ^2$, καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΒΜ \times ΜΓ$ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου $ΒΘ \times ΘΓ$.

Ἔστω τώρα, ὅτι ὁ λόγος $ΑΘ^2 : ΘΒ^2 < ΔΗ : ΔΖ$. Ἂς περιγραφῇ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλος, καὶ ἂς προεκταθῇ ὁ ἄξων ΑΘ μέχρι τοῦ σημείου Ρ· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ λόγος $ΑΘ : ΘΡ < ΗΔ : ΔΖ$. Ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα $ΑΘ : Θγ = ΗΔ : ΔΖ$, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΧγΞ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΜΞ, ΑΚΧ. Ἂς ληφθῶσιν ἀκόμη δύο εὐθεῖαι, αἱ ΠΝ, ξΟ ἴσαι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΗ, ὥστε ἡ ΠΝ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΧ, καὶ ἡ ξΟ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΞ (λῆμμα Πάππου 6), καὶ ἂς νοήσωμεν δύο ἐπίπεδα ἀχθέντα διὰ τῶν εὐθειῶν ΠΝ, ξΟ, κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα θὰ γεννήσωσιν, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, δύο ὑπερβολάς, τῶν ὁποίων ἄξονες εἶναι αἱ εὐθεῖαι ξΟΛ, ΠΝΙ. [Λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ὑπερβολῶν τούτων εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὑπερβολὴν ΔΕ].

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα $ΔΗ : ΔΖ = ΑΘ : Θγ$, τουτέστιν $= ΑΜ : ΜΞ$, καὶ ἀκόμη $ΑΜ^2 : ΒΜ \times ΜΓ =$ εὐθεῖα ξΟ (1, 12), ἡ ὁποία εἶναι πλαγία διάμετρος τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ξΟΛ, πρὸς τὴν εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦσαν παράμετρον, ἕπεται, ὅτι τὸ σχῆμα τῆς τομῆς ΔΕ, καὶ τὸ σχῆμα τῆς τομῆς, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ξΟΛ, θὰ εἶναι ἴσα μεταξύ των, καὶ ἄρα αἱ τομαὶ αἱ ἴδιαι, θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσαι (θ. 2).

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ τομὴ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν



τομήν, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΠΝΙ.

Ἔτι δέ, δὲν θὰ εὑρίσκηται ἄλλη τομή, ἐκτὸς ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι περιγραφῆ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκηται, ὁ ἄξων τῆς τομῆς αὐτῆς θὰ εἶναι εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ (θ. 28). Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΤ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον, ἀποδεικνύεται, ὡς προηγουμένως, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΤ δὲν θὰ συμπέσῃ οὔτε πρὸς τὴν ΑΚ, οὔτε πρὸς τὴν ΑΜ, ἀλλ' ὅτι ἡ εὐθεῖα $ΔΗ : ΔΖ = ΑΤ^2 : ΒΤ \times ΤΓ$, τουτέστιν $= ΑΤ^2 :$ ὀρθογώνιον $ΑΤ \times Τσ$, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΒΤ \times ΤΓ$ (1, 12). Ἀλλὰ $ΑΤ^2 : ΑΤ \times Τσ = ΑΤ : Τσ$· εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $ΔΗ : ΔΖ = ΑΤ : Τσ$· ὅπερ ἄτοπον· διότι εἶναι $ΔΗ : ΔΖ = ΑΘ : Θγ$, τουτέστιν $= ΑΤ : Τδ$.

Ἐὰν δὲ τέλος εἶναι $ΑΘ^2 : ΒΘ^2 > ΔΗ : ΔΖ$, λέγω, ὅτι δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν κῶνον τομὴ ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΔΕ.

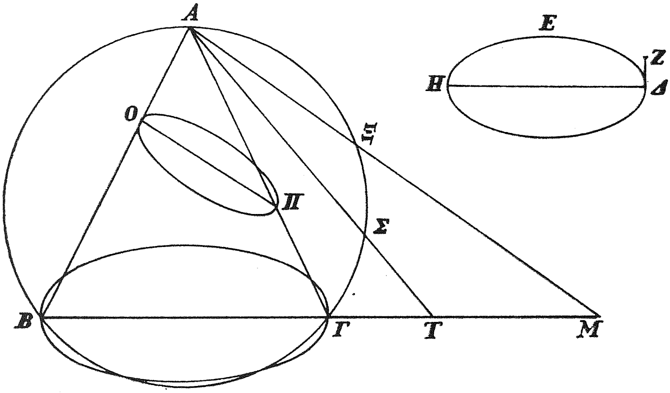
Διότι, ἔστω, εἰ δυνατὸν νὰ εὑρίσκηται, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΜ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς τομῆς αὐτῆς. Εἶναι λοιπὸν $ΑΜ^2 : ΒΜ \times ΜΓ = ΔΗ : ΔΖ$. Ὑπετέθη ὅμως, ὅτι ὁ λόγος $ΑΜ^2 : ΒΘ \times ΘΓ$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $ΔΗ : ΔΖ$· εἶναι ἄρα ὁ λόγος $ΑΜ : ΒΜ \times ΜΓ < ΑΘ : ΒΘ \times ΘΓ$. Ἀλλὰ $ΑΜ^2 > ΑΘ^2$ καὶ $ΒΜ \times ΜΓ < ΒΘ \times ΘΓ$· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εὑρίσκεται ἄρα εἰς τὸν κῶνον αὐτὸν τομὴ ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΔΕ.

30 (πρόβλημα)

Εἰς δοθέντα κῶνον νὰ εὑρεθῇ τομὴ ἴση πρὸς δοθεῖσαν ἔλλειψιν.

Ἔστω δοθεὶς ὀρθὸς κῶνος, τοῦ ὁποίου τομὴ διερχομένη διὰ τοῦ ἄξονος εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ δοθεῖσα ἔλλειψις ΔΕ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΗ, καὶ παράμετρος ἡ ΔΖ. Ἂς περιγραφῇ κύκλος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖα ΑΜ : ΜΞ = ΔΗ : ΔΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα ΟΠ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΜ καὶ ἴση πρὸς τὴν ΔΚ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς εὐθείας ΟΠ, καθέτως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον συναντῶν τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν, σχηματίζει ἔλλειψιν. [Λέγω, ὅτι ἡ ἔλλειψις αὕτη, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ ΟΠ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἔλλειψιν ΔΕ].

Διότι ἡ εὐθεῖα ΟΠ : ἀντίστοιχος παράμετρος = ΑΜ^2 : ΒΜ x



ΜΓ (1, 13)· ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΒΜ x ΜΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΜ x ΜΞ· θὰ εἶναι ἄρα πλάγιος ἄξων ΟΠ : παράμετρος τῆς τομῆς = ΑΜ^2 : ὀρθογώνιον ΑΜ x ΜΞ, τουτέστιν = ΑΜ : ΜΞ. Ἀλλὰ ἔχει γίνει εὐθεῖα ΑΜ : ΜΞ = ΔΗ : ΔΖ · εἶναι λοιπὸν ΟΠ : παράμετρος τῆς τομῆς, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ ΟΠ = ΔΗ : ΔΖ. Τὰ σχήματα λοιπὸν (νοοῦνται ὡς εἰς προηγούμενα θεωρήματα, ὀρθογώνια ἔχοντα βάσεις = πλάγιος ἄξων, ὕψος = παράμετρος) τῆς τομῆς ΔΕ καὶ τῆς τομῆς, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ ΟΠ, εἶναι ἴσα, καὶ ἄρα αἱ τομαὶ αἱ ἴδιαι εἶναι ἴσαι (θ. 2).

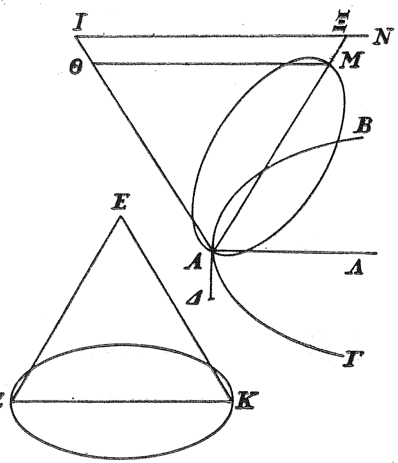
Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν κῶνον τοῦτον ἄλλη τομὴ ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΔΕ, τῆς ὁποίας ἡ κορυφή, κειμένη ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκηται τοιαύτη τομὴ εἶναι προφανές, ὅτι ὁ ἄξων αὐτῆς θὰ κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ ὅτι τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (θ. 28). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ τομὴ αὕτη εἶναι ἔλλειψις, ὁ ἄξων αὐτῆς προεκτεινόμενος θὰ συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ· ὁ ἄξων αὐτὸς θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΗ, καὶ ἡ κορυφὴ τῆς τομῆς αὐτῆς θὰ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ (θ. 2). Δὲν θὰ πέσῃ δὲ ὁ ἄξων οὗτος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΠ, καὶ δὲν θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην. Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν ἐκ τοῦ σημείου Α εὐθεῖά τις ἡ ΑΣΤ, παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον, ἡ ὁποία νὰ μὴ συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΑΜ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ συναντήσῃ τὸ τόξον ΑΓ, διότι δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Εἶναι δὲ ὁ πλάγιος ἄξων τῆς τομῆς αὐτῆς : παράμετρος αὐτῆς $=$ ΑΤ^2 : ὀρθογώνιον ΒΤ x ΤΓ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΗ : ΔΖ πρέπει νὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον (1, 13). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΒΤ x ΤΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΤ x ΤΣ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΗ : ΔΖ $=$ ΑΤ^2 : ΑΤ x ΤΣ, τουτέστιν $=$ εὐθεῖα ΑΤ : ΤΣ. Ἀλλὰ εὐθεῖα ΔΗ : ΔΖ $=$ ΑΜ^2 : ΑΜ x ΜΞ, τουτέστιν $=$ εὐθεῖα ΑΜ : ΜΞ· εἶναι ἄρα εὐθεῖα ΑΤ : ΤΣ $=$ ΑΜ : ΜΞ· ὅπερ ἀδύνατον· δὲν εὑρίσκεται ἄρα εἰς τὸν δοθέντα κῶνον ἄλλη τομὴ ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΔΕ, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ νὰ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἐκτὸς μόνον τῆς τομῆς, τῆς ὁποίας ὁ μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΟΠ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31 (πρόβλημα)

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθὸς κῶνος ὅμοιος πρὸς δοθέντα ὀρθὸν κῶνον καὶ περιβαλλόμενος ὑπὸ δοθείσης παραβολῆς.

Ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΛ, καὶ παράμετρος ἡ εὐθεῖα ΑΔ, καὶ δοθεὶς κῶνος, εἰς τὸν ὁποῖον τὸ τρίγωνον ΕΖΚ διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΛ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς ΑΒΓ καὶ ἄλλο τι ἐπίπεδον, ὡς τὸ ΘΑΛ, καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εὐθεῖά τις ἡ ΑΜ, σχηματίζουσα μετὰ τῆς εὐθείας ΑΛ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΕΖΚ. Ἂς γίνῃ εὐθεῖα ΔΑ : ΑΜ = ΚΖ : ΖΕ· ἂς κατασκευασθῇ μὲ βάσιν τὴν εὐθεῖαν ΑΜ, τὸ τρίγωνον ΑΘΜ, ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΕΚ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Α, Μ, αἱ εὐθεῖαι ΘΑ, ΘΜ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Θ, καὶ βάσις ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΜ,



κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΘΜ. [Λέγω, ὅτι ὁ κῶνος ΑΘΜ, ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ, περιβάλλεται ὑπὸ τῆς δοθείσης παραβολῆς ΑΒΓ].

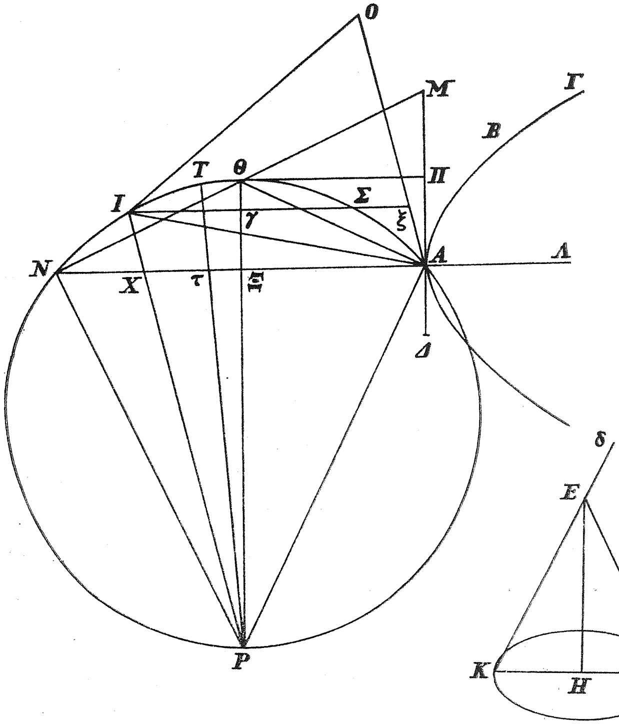
Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΜΑΛ = γωνίαν ΕΖΚ, καὶ γωνία ΕΖΚ = ΘΜΑ, ἕπεται, ὅτι γωνία ΜΑΛ = ΘΜΑ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΛ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΘΜ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΘΜ εἶναι πλευρὰ τοῦ τριγώνου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος κώνου· τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν τῆς δοθείσης τομῆς προσδιορίζει παραβολὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Εἶναι δὲ εὐθεῖα ΔΑ : ΑΜ = ΚΖ : ΖΕ, τουτέστιν ΑΜ : ΜΘ· εἶναι ἄρα εὐθεῖα ΔΑ : ΑΜ = ΑΜ : ΑΘ· ὥστε τὸ ΑΜ^2 τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΑ x ΑΘ : ὀρθογώνιον ΑΘ x ΘΜ = εὐθεῖα ΑΔ : ΑΘ. Εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΑ παράμετρος τῆς τομῆς τῆς γεννωμένης εἰς τὸν κῶνον (1, 11). Ἀλλὰ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι ἡ παράμετρος τῆς τομῆς ΒΑΓ, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο παραβολαί, τῶν ὁποίων αἱ παράμετροι εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι αἱ τομαὶ αὗται ἐπίσης ἴσαι. Ἡ τομὴ ἄρα ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τοῦ εὑρεθέντος κώνου, ὅστις εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΖΕΚ, διότι τὰ τρίγωνα ΕΖΚ, ΘΜΑ εἶναι ὅμοια.

Λέγω ἀκόμη, ὅτι ἐκτὸς μόνου τοῦ προηγουμένου κώνου, ἡ δοθεῖσα τομὴ δὲν δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ ἄλλου κώνου, ὁμοίου πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ, ἔχοντος τὴν κορυφὴν αὐτοῦ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ τομή.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω, ὅτι εὑρίσκεται ἄλλος κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Ι, παρέχων τὴν δοθεῖσαν τομήν, ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου τούτου ἐπίπεδον, καθέτως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς, συναντῶν τὸ τελευταῖον τοῦτο, ἐπίπεδον, κατὰ τὸν ἄξονα τῆς τομῆς, τουτέστι κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΛ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΛ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων. Ἀλλὰ τὸ ἐπίπεδον ΘΑΛ ἤχθη καθέτως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς, κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΛ· θὰ κεῖται λοιπὸν τὸ σημεῖον Ι εἰς τὸ ἐπίπεδον ΘΑΛ (λῆμμα Πάππου 7). Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΙ, ΙΝ πλευραὶ τοῦ κώνου, ὁπότε ἡ εὐθεῖα ΙΝ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΛ, καὶ ἡ γωνία ΖΕΚ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΙΝ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΘΜ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΙ κεῖται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΘΑ. Ἂς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΜ μέχρι τοῦ σημείου Ξ. Ἐὰν λοιπὸν ἡ τομὴ ΒΑΓ ἦτο εἰς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Ι, καὶ ἐὰν ἐλαμβάνετο εὐθεῖα, ὡς ἡ ΑΙ, εἰς τὸν λόγον $ΑΞ^2 : ΑΙ \times ΙΞ$, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ ἦτο ἡ παράμετρος τῆς τομῆς ΒΑΓ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι ἡ παράμετρος τῆς τομῆς ΒΑΓ· εἶναι λοιπὸν τὸ $ΑΜ^2 : ΑΘ \times ΘΜ = ΑΔ : ΑΘ$. Ἀλλὰ τὸ $ΑΜ^2$: τὸ ὀρθογώνιον $ΑΘ \times ΘΜ = ΑΞ^2 : ΑΙ \times ΙΞ$· ὥστε ὁ λόγος $ΑΔ : ΑΘ$ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν $ΑΔ : ΑΙ$· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν δύναται ἄρα νὰ εὑρεθῇ ἄλλος κῶνος, ὅμοιος πρὸς τὸν δοθέντα κῶνον ΖΕΚ, παρέχων τὴν τομὴν ΑΒΓ, τοιοῦτος, ὥστε ἡ κορυφή του νὰ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τομῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

32 (πρόβλημα)

Νὰ εὑρεθῇ κῶνος ὅμοιος πρὸς δοθέντα κῶνον καὶ νὰ περιβάλληται ὑπὸ δοθείσης ὑπερβολῆς. Πρέπει δὲ πάντοτε ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς βάσεως αὐτοῦ νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ πλαγίου ἄξονος πρὸς τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον εἰς τὸ σχῆμα τῆς τομῆς τὸ κατασκευασθὲν ἐπὶ τοῦ ἄξονος.



Ἔστω δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΛ, καὶ πλαγία διάμετρος ἡ εὐθεῖα ΑΝ καὶ ἔστω τὸ σχῆμα τὸ κατασκευασθὲν ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τὸ ὀρθογώνιον ΝΑ x ΑΔ. Ἔστω δοθεὶς κῶνος, εἰς τὸν ὁποῖον τὸ τρίγωνον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος εἶναι τὸ ΕΖΚ. Ἂς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΚΕ μέχρι τοῦ σημείου δ, καὶ ἂς ἀχθῇ κατὰ τὸν ἄξονα ΑΛ τῆς τομῆς, ἐπίπεδον τὸ ΘΑΛ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς. Ἂς γραφῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΝΑ, τμῆμα κύκλου τὸ ΝΘΑ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν δΕΖ (Εὐκλ. 3, 33), ἂς συμπληρωθῇ ὁ κύκλος, καὶ ἂς διαιρεθῇ τὸ τόξον ΑΘΝ εἰς δύο ἴσα μέρη κατὰ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Θ, ἡ εὐθεῖα ΘΞΡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΝ.

Ἔστω τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου, τουτέστι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΕΗ, νὰ εἶναι κατὰ πρῶτον, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΖΗ, εἰς τὸν λόγον τῆς εὐθείας ΑΝ : ΔΑ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΝΘ πέραν τοῦ σημείου Θ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΜΝ, ἡ ὁποία θὰ συναντήσῃ, εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὴν εὐθεῖαν ΑΜ, παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΘΡ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τόξον ΝΡ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΡΑ, ἡ γωνία ΝΘΡ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΘΡ· ὥστε εἶναι ἡ γωνία ΘΜΑ = γωνίαν ΜΑΘ. Ἂς κατασκευασθῇ τώρα ὁ ἰσοσκελὴς κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Θ, ἔχων ὡς βάσιν τὸν κύκλον διαμέτρου ΑΜ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΘΑΛ. Λέγω, κατόπιν τούτων, τὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἡ τομή, θὰ προσδιορίσῃ εἰς τὸν κῶνον τοῦτον ὑπερβολήν, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΛ, πλαγία διάμετρος εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΝ, καὶ [παράμετρος ἡ ΑΔ, καὶ ὅτι ὁ κῶνος οὗτος ὁ ΘΑΜ εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν δοθέντα κῶνον ΕΚΖ].

Ἡ γωνία ΑΘΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΕΚ, ἐπειδὴ τὸ τμῆμα ΑΘΝ κατεσκευάσθη νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΖΕδ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΘ, ΘΜ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ὡς καὶ αἱ εὐθεῖαι ΖΕ, ΕΚ· ἐὰν ἄρα ἀχθῇ ἡ κάθετος ΘΠ θὰ εἶναι $ΕΗ^2$:

ΚΗ x ΗΖ = ΘΠ² : ΜΠ x ΠΑ (ἀντίστρ. λήμματος 5 Πάππου). Ἀλλὰ τὸ ΕΗ² : ΚΗ x ΗΖ = εὐθεῖα ΝΑ : ΑΔ· εἶναι λοιπὸν τὸ ΠΘ² : ΜΠ x ΠΑ = ΝΑ : ΑΔ. Θὰ εἶναι ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται τεταγμένως κατηγμέναι ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΛ τῆς γεννωμένης τομῆς ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ παραβαλλόμενα παρὰ τὴν παράμετρον ΑΔ (1, 12), ὑπερβάλλοντα πάντοτε κατὰ σχήματα ὅμοια πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΝΑ x ΑΔ. Ἀλλὰ τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΛ, εἰς τὴν τομὴν ΑΒΓ, εἶναι ἐπίσης ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ παραβαλλόμενα παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, ὑπερβάλλοντα κατὰ σχήματα ὅμοια πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΝΑ x ΑΔ· ἡ τομὴ ἄρα ἡ γεννωμένη εἰς τὸν κῶνον ΘΑΜ, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Θ, καὶ βάσις ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΜ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ (θ. 2). Ἀλλὰ αἱ τομαὶ αὗται εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν συμπίπτουσι· ὁ κῶνος λοιπὸν τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Θ, εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΘΠ : ΠΜ = ΕΗ : ΗΖ, καὶ περιβάλλεται (ὁ κῶνος) ὑπὸ τῆς τομῆς ΑΒΓ.

Λέγω ἐπίσης, ὅτι ἐκτὸς τοῦ κατασκευασθέντος κώνου, ἡ δοθεῖσα τομὴ δὲν θὰ περιβάλλῃ ἄλλον κῶνον ὅμοιον πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ, τοιοῦτον ὥστε ἡ κορυφή του, ὡς τὸ σημεῖον Θ, νὰ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἡ τομὴ ΑΒΓ.

Ἔστω, ὅτι ἡ τομὴ περιβάλλει, εἰ δυνατόν, ἄλλον κῶνον, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Ι, καὶ εἶναι φανερόν, κατὰ τὸ δειχθὲν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ὅτι τὸ σημεῖον Ι θὰ εὑρίσκηται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΘΑΛ. Ἔστω, ὅτι πλευραὶ τοῦ κώνου τούτου εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΙΟ, ΙΑ, καὶ ὅτι ὁ κῶνος οὗτος εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΖΕΚ. Εἶναι ἄρα αἱ γωνίαι ΑΙΟ, ΖΕΚ ἴσαι, ὡς ἐπίσης αἱ γωνίαι ΑΙΝ, ΖΕδ, καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Ι θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΘΝ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΙΟ προεκβαλλομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Ν. Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΡΧΙ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΟ παράλληλος πρὸς ταύτην, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ι, ἡ εὐθεῖα ξΙ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΝ· Ἐὰν λοιπὸν ἡ τομὴ ΑΒΓ εὑρίσκηται ἐπὶ τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Ι, καὶ ἐὰν προεκβληθῇ ὁ ἄξων ΑΛ τῆς τομῆς ταύτης μέχρι τοῦ σημείου Ν, θὰ εἶναι τὸ ξΙ^2 : Αξ x ξΟ = πλαγία διάμετρος ΑΝ : παράμετρος ΑΔ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΑΝ : ΑΔ = ΕΗ^2 : ΖΗ x ΗΚ, καὶ αἱ δύο γωνίαι ΝΙΡ, ΡΙΑ, τουτέστιν αἱ γωνίαι ΙΑΟ, ΑΟΙ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας ΕΖΚ, ΕΚΖ, καὶ ἡ γωνία ΑΙΟ = γωνία ΖΕΚ· τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΙΟ, ΖΕΚ εἶναι ὅμοια. Κατὰ τὸ ἤδη δειχθὲν θὰ εἶναι τὸ Ιξ^2 : Αξ x ξΟ = ΕΗ^2 : ΖΗ x ΗΚ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΗ = ΗΚ· εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ Αξ = ξΟ. Ἀλλὰ ἡ Αξ : ξΟ = ΝΙ : ΙΟ, τουτέστιν = ΝΧ : ΧΑ· αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΝΧ, ΧΑ θὰ εἶναι ἴσαι· ὅπερ ἄτοπον, ἐπειδὴ μόνον ἡ διάμετρος ΘΡ τοῦ κύκλου συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΑΝ καθέτως, κατὰ τὸ σημεῖον Ξ. Δὲν εὑρίσκεται ἄρα ἄλλος κῶνος ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ, ὁ ὁποῖος ἐκτὸς τοῦ προηγουμένως κατεσκευασμένου κώνου νὰ περιβάλληται ὑπὸ τῆς τομῆς ΑΒΓ.

Ἐὰν τώρα ὁ λόγος ΕΗ^2 : ΗΖ^2 $<$ ΝΑ : ΑΔ, καὶ ἐὰν ἐνεργήσωμεν ὡς εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ εἶναι ΕΗ^2 : ΖΗ x ΗΚ = ΘΠ^2 : ΜΠ x ΠΑ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων (λῆμμα 5, Πάππου). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΜΠ x ΠΑ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΠΑ^2$, τουτέστιν $= ΘΞ^2$, καὶ τὸ $ΘΠ^2 = ΑΞ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΕΗ^2 : ΖΗ \times ΗΚ = ΑΞ^2 : ΘΞ^2$. Ἀλλὰ τὸ $ΑΞ^2$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΡΞ \times ΞΘ$· εἶναι λοιπὸν τὸ $ΕΗ^2 : ΖΗ \times ΗΚ$, τουτέστιν $: ΖΗ^2 = ΡΞ \times ΞΘ : ΞΘ^2$, τουτέστι $= ΡΞ : ΞΘ$. Ἐλήφθη ὅμως, ὅτι $ΗΕ^2 : ΖΗ^2 < ΝΑ : ΑΔ$, καὶ ἄρα ὁ λόγος $ΡΞ : ΞΘ < ΝΑ : ΑΔ$. Ἄς γίνῃ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $ΡΞ : Ξγ = ΝΑ : ΑΔ$, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου γ, ἡ εὐθεῖα ΙγΣξ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΝΑ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΙΝ, ΙΑ, ΙΡ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΟ παράλληλος πρὸς τὴν ΙΡ. Κατὰ τὸ προηγούμενον, εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΙΑ, ΖΕΚ εἶναι ὅμοια, καὶ ἐὰν κατασκευασθῇ ὁ κῶνος ἔχων ὡς κορυφὴν τὸ σημεῖον Ι καὶ ὡς βάσιν τὸν κύκλον διαμέτρου ΑΟ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΘΑΛ, τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἡ τομὴ ΑΒΓ θὰ συναντήσῃ τὸν κῶνον τοῦτον, καὶ θὰ προσδιορίσῃ ὑπερβολήν, τῆς ὁποίας ὁ ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΛ, καὶ τῆς ὁποίας πλαγία διάμετρος εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΝ. Ἀλλὰ ἔχει γίνει $ΡΞ : Ξγ$, τουτέστι $ΡΧ : ΧΙ = ΑΝ : ΑΔ$. Ἀλλὰ $ΡΧ : ΧΙ = ΡΧ \times ΧΙ : ΧΙ^2$, καὶ τὸ $ΡΧ \times ΧΙ$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΝΧ \times ΧΑ$· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΝΧ \times ΧΑ : ΙΧ^2 = ΝΑ : ΑΔ$. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον $ΝΧ \times ΧΑ : ΙΧ^2 = Ιξ^2 : Οξ \times ξΑ$· εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $ΝΑ : ΑΔ = Ιξ^2 : Αξ \times ξΟ$. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΑΔ εἶναι ἡ παράμετρος τῆς τομῆς τῆς γεννωμένης εἰς τὸν κῶνον ΑΙΟ. Ἐκ τούτου καὶ τῶν δειχθέντων εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Ι θὰ περιβάλληται ὑπὸ τῆς τομῆς ΑΒΓ. Ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΝΣ, ΣΑ, καὶ προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΝΣ, εἷς ἄλλος κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Σ, θὰ περιβάλληται ἐπίσης ὑπὸ τῆς αὐτῆς τομῆς, καὶ ἕκαστος τῶν προηγουμένων κώνων θὰ εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν δοθέντα κῶνον ΕΖΚ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ τομὴ αὕτη δὲν θὰ περιβάλλῃ τρίτον κῶνον, ὅμοιον πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ θὰ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς τομῆς ΑΒΓ, ὡς τὸ σημεῖον Ι.

Διότι ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου τούτου θὰ κεῖται, κατὰ τὸ προηγούμενον, ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΙΝ. Ἄς ληφθῇ ἡ κορυφὴ αὕτη εἰς τὸ σημεῖον Τ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΤτΡ. Κατὰ τὸ ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἡ εὐθεῖα ΑΝ : ΑΔ $=$ Ρτ : Ττ· ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ εὐθεῖα ΡΞ : Ξγ, εἶναι ἀκριβῶς ὁ προηγούμενος λόγος. Ἡ τομὴ ἄρα ΑΒΓ δὲν περιβάλλει τρίτον κῶνον ὅμοιον πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ.

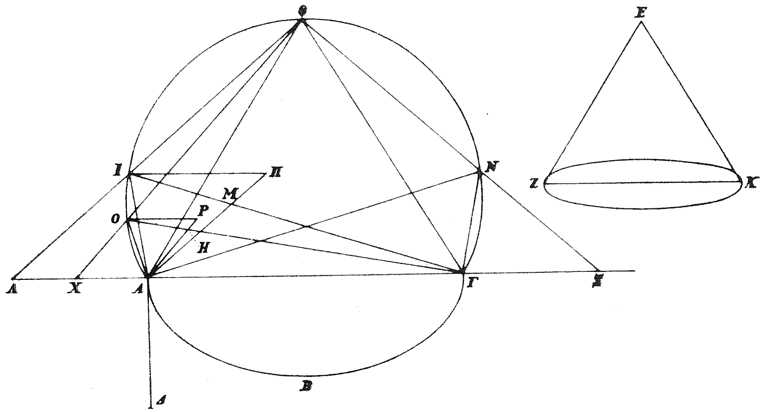
Ἐὰν ὁ λόγος ΕΗ^2 : ΖΗ^2 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΑΝ : ΑΔ, θὰ εἶναι ἀδύνατον ὅμοιος κῶνος πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ νὰ περιβάλληται ὑπὸ τῆς τομῆς ΑΒΓ.

Διότι, ἔστω ἐπιφάνεια κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Ι, εἰ δυνατόν, νὰ περιβάλληται ὑπὸ τῆς τομῆς αὐτῆς, καὶ ἂς γίνῃ κατὰ τὰ δειχθέντα προηγουμένως, ἡ εὐθεῖα ΡΧ : ΧΙ $=$ ΑΝ : ΑΔ. Ἀλλὰ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΑΝ : ΑΔ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΕΗ^2 : ΖΗ^2, ὅστις, ὡς ἐδείχθη εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον ΡΞ : ΞΘ· ὁ λόγος ἄρα ΡΧ : ΧΙ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΡΞ : ΞΘ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον· οὐδεὶς ἄρα κῶνος ὅμοιος πρὸς τὸν δοθέντα κῶνον ΕΖΚ δύναται νὰ περιβάλληται ὑπὸ τῆς τομῆς ΑΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33 (πρόβλημα)

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθὸς κῶνος, ὅμοιος πρὸς δοθέντα ὀρθὸν κῶνον, ὅστις νὰ δέχηται δοθεῖσαν ἔλλειψιν.

Ἔστω δοθεῖσα ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ, καὶ παράμετρος ἡ εὐθεῖα ΑΔ, δοθεὶς δὲ κῶνος ὁ ΕΖΚ. Ἂς ὑψωθῇ διὰ τῆς εὐθείας ΑΓ, ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐλλείψεως ΑΒΓ, καὶ ἂς γραφῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, μὲ βάσιν τὴν ΑΓ, τόξον τοῦ κύκλου ΑΘΓ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΖΕΚ. Ἂς διαιρεθῇ τὸ τόξον τοῦτο εἰς δύο ἴσα μέρη κατὰ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Θ, εὐθεῖα



ἡ ΘΙΛ προεκβαλλομένη οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι εὐθεῖα ΘΛ : ΛΙ = ΑΓ : ΑΔ. Ἂς ἀχθῇ ὁμοίως ἡ εὐθεῖα ΘΞ, οὕτως, ὥστε νὰ διαιρεθῇ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Ν. Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΙ, ΙΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΙΠ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ἡ εὐθεῖα ΑΠ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΘΛ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ὁ κῶνος ὁ ἔχων ὡς κορυφὴν τὸ σημεῖον Ι, καὶ ὡς βάσιν τὸν κύκλον διαμέτρου ΑΜ. Λέγω, ὅτι ὁ κῶνος οὗτος εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ, καὶ δέχεται τομὴν ΑΒΓ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΘΙΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΘΑΓ, διότι βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, καὶ ἡ πρώτη τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΙΜΑ, διὰ τὰς παραλλήλους ΘΛ, ΑΜ, ἡ γωνία ΘΑΓ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΙΜΑ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΜΙΑ = γωνία ΑΘΓ· εἶναι λοιπὸν ἡ ὑπόλοιπος γωνία ΙΑΜ = ὑπόλοιπον γωνίαν ΘΓΑ, καὶ τὰ τρίγωνα ΑΙΜ, ΑΘΓ εἶναι ὅμοια. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΘΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΖΚ· ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΜΙ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελὲς καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΖΚ. Ὁ κῶνος ἄρα ὁ ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Ι, καὶ βάσιν τὸν κύκλον διαμέτρου ΑΜ, εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ, καὶ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἡ τομὴ ΑΒΓ, θὰ προσδιορίσῃ εἰς τὸν κῶνον τοῦτον ἔλλειψιν, τῆς ὁποίας ὁ μέγας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ. Ἔχει δὲ γίνει εὐθεῖα ΘΛ : ΛΙ, τουτέστι τὸ ὀρθογώνιον ΘΛ x ΛΙ : ΛΙ^2 =ΑΓ : ΑΔ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΘΛ x ΛΙ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΛ x ΛΑ· εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΓΑ : ΑΔ = ὀρθογώνιον ΓΛ x ΛΑ : ΛΙ^2. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΛ x ΛΑ : ΛΙ^2 = ΠΙ^2 : ΑΠ x ΠΜ, διὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΠΑΛΙ· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΑ : ΑΔ = ΙΠ^2 : ΑΠ x ΠΜ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ἡ πλαγία διάμετρος· ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΑΔ εἶναι ἡ παράμετρος τῆς τομῆς τῆς γεννωμένης εἰς τὸν κῶνον ΑΙΜ (1, 13). Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἐπίσης ἡ παράμετρος τῆς τομῆς ΑΒΓ· ὥστε ἡ πρώτη αὕτη τομὴ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τομὴν ΑΒΓ (θ. 2). Ὁ κῶνος ἄρα τὸν ὁποῖον περιεγράψαμεν ἀνωτέρω δέχεται τὴν τομὴν ΑΒΓ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἄλλος τις κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Ν, καὶ πλευραὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΝ, ΝΓ, δέχεται τὴν αὐτὴν τομήν. Δὲν ὑπάρχει ὅμως τρίτος κῶνος ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ, ἔχων κορυφὴν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς τομῆς, ὅστις θὰ δέχηται τὴν τομήν.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ ἄλλος κῶνος δεχόμενος τὴν τομήν, ἀποδεικνύεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα, ὅτι, ἐὰν ὑψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς, διὰ τοῦ ἄξονος τῆς τομῆς ταύτης, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων θὰ εἶναι ὁ μέγας ἄξων τῆς τομῆς· καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου θὰ εὑρίσκηται ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΘΓ, ὡς ἐδείχθη διὰ τὴν ὑπερβολὴν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Ἔστω, ὅτι ἡ κορυφὴ αὕτη κεῖται κατὰ τὸ σημεῖον Ο, καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΗ εἶναι πλευραὶ τοῦ κώνου. Ἃς προεκβληθῇ ἡ ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα ΘΟ μέχρι τοῦ σημείου Χ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΡ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΘΧ, καὶ ἡ ΟΡ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΟΑΗ ἰσοσκελές, καὶ θὰ εἶναι τὸ $\text{ΟΡ}^2 : \text{ΑΡ} \times \text{ΡΗ} = \text{ΑΓ} : \text{ΑΔ}$. Ἀλλὰ τὸ $\text{ΟΡ}^2 : \text{ΑΡ} \times \text{ΡΗ} = \text{ΓΧ} \times \text{ΧΑ} : \text{ΟΧ}^2$, διὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΟΡΑΧ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον $\text{ΓΧ} \times \text{ΧΑ}$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $\text{ΘΧ} \times \text{ΧΟ}$· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα $\text{ΓΑ} : \text{ΑΔ} =$ ὀρθογώνιον $\text{ΘΧ} \times \text{ΧΟ} : \text{ΟΧ}^2$, τουτέστι $= \text{ΘΧ} : \text{ΧΟ}$. Ἀλλ' ἐδείχθη, ὅτι $\text{ΓΑ} : \text{ΑΔ} = \text{ΘΛ} : \text{ΛΙ}$· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $\text{ΘΧ} : \text{ΧΟ} = \text{ΘΛ} : \text{ΛΙ}$· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν ὑπάρχουσιν ἄρα τρεῖς κῶνοι ὅμοιοι πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΚ δεχόμενοι τομὴν ΑΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Α

Β

Γ

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

Δ

Ε

Η

Θ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Ι

Κ

Λ

Μ

Ν

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

Ο

Π

Σ

Τ

Υ

Φ

Χ

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ — ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ «ΠΑΤΡΙΣ» Α.Ε
ΑΘΗΝΑΙ, ΙΕΡΑ ΟΔΟΣ 58
ΤΗΛΕΦ. 3465.347 — 3468.216