ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

104

ΤΟΜΟΣ Δ΄

ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ΄ - ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ - ΛΗΜΜΑΤΑ
ΠΑΠΠΟΥ - ΣΧΟΛΙΑ ΕΥΤΟΚΙΟΥ

ΥΠΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

ΤΕΧΝΙΚΟΝ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τῆς ἐκδόσεως τοῦ δ′ τόμου

ἐπεμελήθη

ΚΩΝ. Γ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

ΤΟΜΟΣ Δ′

ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ′ - ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ - ΛΗΜΜΑΤΑ
ΠΑΠΠΟΥ - ΣΧΟΛΙΑ ΕΥΤΟΚΙΟΥ

ΥΠΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

τινὲς εἰς τὸ κείμενον τοῦ Ζ' βιβλίου τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, ἐκδόσεως Paul ver Eecke, 1922 καὶ 1959, Παρίσιοι καὶ εἰς τὸ κείμενον τοῦ Πάππου, Λήμματα εἰς τὰ Κωνικὰ καὶ τοῦ Εὐτοκίου, Σχόλια εἰς τὰ Κωνικά, ἐκδόσεως I. L. Heiberg, 1893, Λειψία.

Σελὶς 4,4. Ἀντὶ *καὶ τῆς καθέτου*, νὰ τεθῇ ⟨*τῆς τομῆς*⟩ *καὶ τῆς καθέτου*

» 5,19. Ἀντὶ *εὐθεῖά τις ἡ AB*, νὰ τεθῇ *εὐθεῖά τις* ⟨*πρὸς τὴν τομὴν*⟩ *ἡ AB*

» 9,5. Ἀντὶ *σχημάτων ὁμοίων*, νὰ τεθῇ ⟨*ὀρθογωνίων*⟩ *σχημάτων ὁμοίων*

» 18. Ὡς στίχος 1 νὰ τεθῇ ⟨*Πόρισμα*⟩

» 36. Ὡς στίχος 19 νὰ τεθῇ ⟨*Πόρισμα*⟩

» 37. Ὡς στίχος 4 νὰ τεθῇ ⟨*Πόρισμα*⟩

» 89,15. Ἀντὶ *τῶν τετραγώνων τοῦ σχήματος*, νὰ τεθῇ *τῶν τετραγώνων* ⟨*τῶν πλευρῶν*⟩ *τοῦ σχήματος*

» 124,12. Ἀντὶ *Εἰς τοὺς κωνικοὺς ὅρους*, νὰ τεθῇ *Εἰς τοὺς* ⟨*πρώτους*⟩ *κωνικοὺς ὅρους*

» 222,5. Ἀντὶ *ἀνίσων εὐθειῶν*, νὰ τεθῇ ⟨*δύο*⟩ *ἀνίσων εὐθειῶν*.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

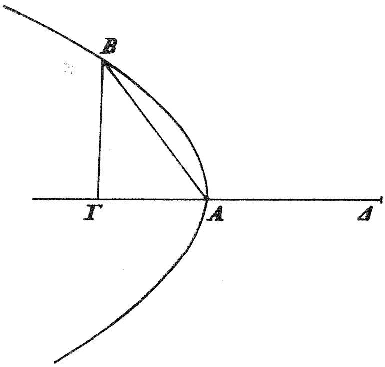
ΚΩΝΙΚΩΝ
Βιβλίον 7ον

᾿Απολλώνιος ᾿Αττάλῳ χαίρειν.

Σοῦ ἀποστέλλω μὲ τὰς λέξεις αὐτὰς τὸ ἕβδομον βιβλίον τῶν κωνικῶν τομῶν. Τοῦτο τὸ βιβλίον περιέχει πολλὰς προτάσεις νέας σχετικὰς πρὸς τὰς διαμέτρους τῶν τομῶν καὶ τὰ σχήματα τὰ κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν διαμέτρων τούτων (δηλ. ὀρθογώνια, ἔχοντα βάσιν τὰς διαμέτρους αὐτὰς καὶ ὕψος τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον). Ὅλαι αἱ προτάσεις αὗται εἶναι χρήσιμοι εἰς πολλὰς κατηγορίας προβλημάτων καὶ ἰδίως εἰς τὴν διερεύνησιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν. Τὰ παραδείγματα τῆς χρησιμότητος αὐτῆς θὰ παρουσιασθῶσι συχνάκις εἰς τὰ προβλήματα τῶν κωνικῶν τομῶν, τὰ ὁποῖα ἔλυσα καὶ ἀπέδειξα εἰς τὸ ὄγδοον βιβλίον, τὸ ὁποῖον, οὕτως εἰπεῖν, ἀποτελεῖ συνέχειαν τοῦ βιβλίου τούτου, καὶ τὸ ὁποῖον σκέπτομαι νὰ ἐκδώσω τὸ ταχύτερον. Ἔρρωσο.

1

᾿Εὰν ἐπὶ τοῦ ἄξονος παραβολῆς, προεκβληθέντος πέραν τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ληφθῇ εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν παράμετρον, καὶ ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα, ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς ὁποίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὸ τετράγωνον τῆς οὕτω ἀχθείσης εὐθείας θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον, ὑπὸ τῆς εὐθείας τῆς ἀποκοπτομένης μεταξὺ τῆς κορυφῆς ⟨τῆς τομῆς⟩ καὶ τῆς καθέτου, καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀποκοπτομένης μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τοῦ σημείου μέχρι τοῦ ὁποίου ἔχει προεκβληθῇ ὁ ἄξων.



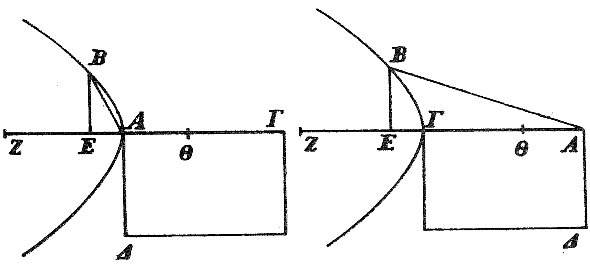
Ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΒ. Ἃς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓ μέχρι τοῦ σημείου Δ, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΔ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον· ἃς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς τομῆς εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΒΓ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΓ x ΓΑ (1, 11).

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ὁ ἄξων τῆς τομῆς, καὶ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον, τὸ $ΒΓ^2$ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΑ x ΑΓ. Ἐὰν λοιπὸν προσθέσωμεν τὸ $ΑΓ^2$, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$, θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΑ x ΑΓ $+ ΑΓ^2$, τουτέστι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΓ x ΓΑ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ (Εὐκλ. 1, 47)· εἶναι λοιπὸν τὸ $ΑΒ^2$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΓ x ΓΑ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΚΩΝΙΚΩΝ ζ′

2

Ἐὰν ὁ ἄξων ὑπερβολῆς διαιρεθῇ εἰς τὸν λόγον τοῦ ἄξονος τούτου πρὸς τὴν παράμετρον αὐτῆς, οὕτως, ὥστε τὸ προσκείμενον μέρος πρὸς τὸ ἓν τῶν δύο ἄκρων τοῦ ἄξονος ν᾽ ἀντιστοιχῇ πρὸς τὴν παράμετρον, καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ ἄκρου τούτου ἀχθῇ πρὸς σημεῖόν τι τῆς τομῆς εὐθεῖα, ἐξ οὗ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὸ τετράγωνον τῆς οὕτω ἀχθείσης εὐθείας θὰ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀποκοπτομένων μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ ἑκατέρου τῶν ἄκρων μερῶν τοῦ ἄξονος,



τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς τὴν παράμετρον, ὡς εἶναι ὁ πλάγιος ἄξων πρὸς τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ ἄξονος. Καλοῦμεν δὲ ὁμόλογον εὐθεῖαν τὸ μέρος τοῦ ἄξονος τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὴν παράμετρον.

Ἔστω ΑΓΕ ὁ προεκβληθεὶς ἄξων ὑπερβολῆς καὶ ΓΔ τὸ σχῆμα τῆς τομῆς ταύτης (δηλ. ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν τὸν πλάγιον ἄξονα ΑΓ καὶ ὕψος τὴν παράμετρον ΑΔ), καὶ ἂς διαιρεθῇ ὁ ἄξων ΑΓ, κατὰ τὸ σημεῖον Θ, οὕτως, ὥστε ΓΘ:ΘΑ = ΓΑ:ΑΔ, τουτέστι πρὸς τὴν παράμετρον. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α εὐθεῖά τις ⟨πρὸς τὴν τομὴν⟩ ἡ ΑΒ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΕ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Λέγω, ὅτι ΑΒ² : ΘΕ x ΕΑ = εὐθεῖα ΑΓ:ΓΘ.

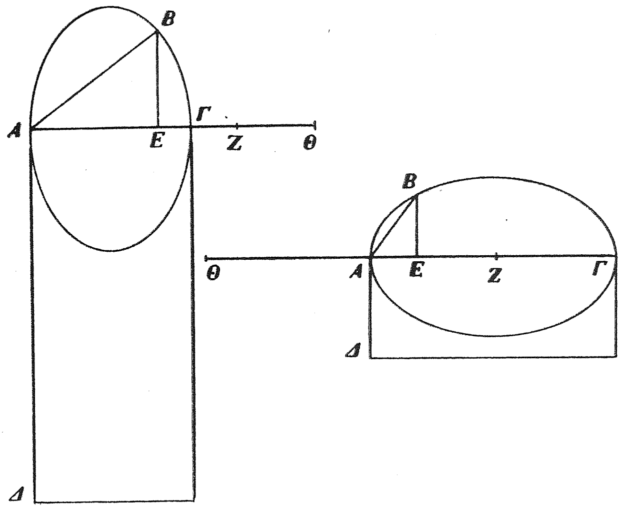
Ἂς ληφθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΑΕxΕΖ+ΒΕ^2. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΕxΕΖ : ΑΕxΕΓ = ΒΕ^2 : ΑΕxΕΓ. Ἀλλὰ τὸ ΒΕ^2 : ΑΕxΕΓ=εὐθεῖα ΑΔ : πλάγιος ἄξων ΑΓ (1, 12)· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΑΕxΕΖ : ΑΕxΕΓ = ΔΑ:ΑΓ, καὶ ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΕ : ΕΓ = ΔΑ : ΑΓ, τουτέστι = ΑΘ : ΘΓ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), θὰ εἶναι εὐθεῖα ΖΓ : ΓΕ = ΑΓ : ΓΘ· εἶναι ἄρα ΖΑ : ΘΕ = ΑΓ : ΓΘ. Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΕ ὡς κοινὸν ὕψος, θὰ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΖΑxΑΕ : ΘΕxΕΑ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, τουτέστιν, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΓ : ΓΘ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΖΑ x ΑΕ = ΑΒ^2· εἶναι ἄρα τὸ ΑΒ^2 : ΘΕxΕΑ = ΑΓ : ΓΘ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3

Ἐὰν τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο ἄκρον ἄξονος ἐλλείψεως ἐκβληθῇ ἐκτὸς τῆς τομῆς, ὥστε ὁ ἐκβληθεὶς ἄξων καὶ τὸ μέρος του τὸ κείμενον ἐκτὸς τῆς τομῆς νὰ εἶναι μεταξύ των, ὡς εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἄξων πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ, καὶ ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς, ἡ ὁποία προσδιορίζει τὸ μέρος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν παράμετρον, ἀχθῇ εὐθεῖα πρὸς τυχὸν σημεῖον τῆς τομῆς, ἐκ τοῦ ὁποίου ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὸ τετράγωνον τῆς οὕτω ἀχθείσης εὐθείας θὰ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον πλευράς, τὰς ἀποκοπτομένας εὐθείας μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ ἑκάστου τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας τῆς ἀντιστοιχούσης πρὸς τὴν παράμετρον, ὡς εἶναι ὁ ἄξων τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀνάλογον μέρος τοῦ ἄξονος. Καλοῦμεν δὲ ὁμόλογον εὐθεῖαν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς τὴν παράμετρον.

Ἔστω τομὴ ἡ ἔλλειψις, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα

ΑΓ, καὶ τὸ σχῆμα εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΓΔ (βάσις+ὁ ἄξων, ὕψος=ἡ παράμετρος), καὶ ΑΘ ἡ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ἄξονος, ὥστε νὰ εἶναι εὐθεῖα ΓΘ : ΑΘ = ΓΑ : ΑΔ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῆ τυχοῦσα εὐθεῖα ΑΒ, ἂς ἀχθῆ ἡ ΒΕ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ x ΕΘ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΑΓ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΘ.



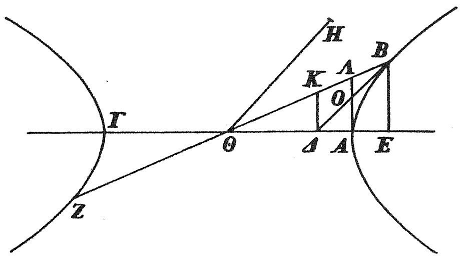
Διότι ἂς γίνῃ ΑΕ x ΕΖ = ΒΕ². Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ x ΕΖ : ΑΕ x ΕΓ = ΒΕ² : ΑΕ x ΕΓ. Ἀλλὰ ΒΕ² : ΑΕ x ΕΓ = παράμετρος ΑΔ : πλαγίαν διάμετρον ΑΓ (1, 21)· εἶναι λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ x ΕΖ : ΑΕ x ΕΓ = ΔΑ : ΑΓ. Εἶναι ἄρα εὐθεῖα ΖΕ : ΕΓ = ΑΔ : ΑΓ, τουτέστιν = ΑΘ : ΘΓ, καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 17), εἶναι εὐθεῖα ΖΓ : ΓΕ = ΑΓ : ΓΘ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΑ : ΕΘ = ΑΓ : ΓΘ. Ἐὰν δὲ ληφθῆ ἡ εὐθεῖα ΑΕ ὡς κοινὸν ὕψος, θὰ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΖΑ x ΑΕ : ΑΕ x ΕΘ = ΖΑ : ΕΘ. Εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΓ : ΓΘ = ΖΑ x ΑΕ : ΑΕ x ΕΘ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΖΑ x ΑΕ = $ΑΒ^2$· εἶναι λοιπὸν τὸ $ΑΒ^2$: ΑΕ x ΕΘ = ΑΓ : ΓΘ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

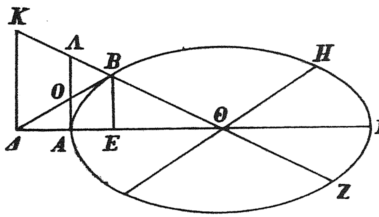
4

Ἐὰν ἐφαπτομένη τις εἰς ὑπερβολὴν ἢ ἔλλειψιν συναντᾷ τὸν ἄξονα τῆς τομῆς, καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς εὐθεῖά τις τεταγμένως κατηγμένη καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς παραλλήλως πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ἀχθῇ εὐθεῖα ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου, ἡ ὁποία εἶναι συζυγὴς πρὸς τὴν διάμετρον τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς, τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης θὰ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ἐφαπτομένην αὐτήν, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη μεταξὺ τῆς εὐθείας τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τοῦ σημείου συναντήσεως τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἐφαπτομένης, πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τεταγμένως κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς.

Ἔστω ΑΓ ὁ ἄξων ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΒΔ, εἰς τὸ σημεῖον Β, καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΕ τεταγμένως κατηγμένη ἐπὶ τὴν διάμετρον ΓΑΕ, καὶ ἡ ΘΗ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΔ, ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου, ἡ ὁποία εἶναι συζυγὴς πρὸς τὴν διάμετρον τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Β. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΒΔ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΘΗ ὡς ἡ εὐθεῖα ΔΕ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΘ.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Β ἡ διάμετρος ΒΘΖ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΛ, ΔΚ παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΕ, καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις Μ : ΒΔ = ΟΒ : ΒΛ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα Μ τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου, τουτέστι τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας παρὰ τὴν ὁποίαν ἔχουσι παραβληθῆ ὑπερβάλλοντα ὀρθογώνια εἰς τὴν ὑπερβολήν, ⟨ὀρθογωνίων⟩ σχημάτων ὁμοίων πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρᾶς διπλασίας τῆς Μ καὶ τῆς διαμέτρου ΖΒ (1, 50)· ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν τῶν τεταγμένως κατηγμένων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΘ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΘΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς συζυγοῦς πρὸς τὴν διάμετρον ΖΒ· τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν ΘΒ x Μ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΘΗ^2 (1,15 καὶ 2,20). Εἶναι δὲ εὐθεῖα ΟΒ : ΒΛ = εὐθεῖα Μ : ΒΔ, τουτέστι = ΒΔ : ΒΚ· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν εὐθειῶν Μ καὶ ΒΚ, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΒΔ^2. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν Μ καὶ ΒΚ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν Μ καὶ ΒΘ, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΚ : ΒΘ· εἶναι λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΘ καὶ Μ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΒΚ: εὐθεῖα ΒΘ, τουτέστιν ὡς εὐθεῖα ΕΔ : ΕΘ. Ἐδείχθη ὅμως, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΒΘ x Μ = ΘΗ^2· εἶναι λοιπὸν τὸ ΒΔ^2 : ΘΗ^2 = ΔΕ : ΕΘ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





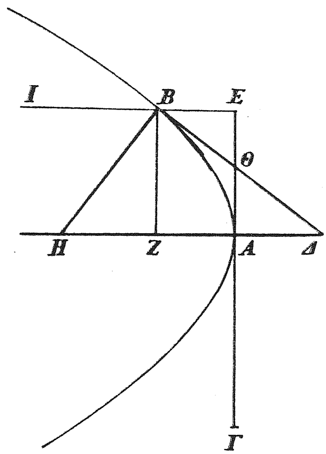
5

Ἐὰν εἰς παραβολὴν ληφθῇ διάμετρός τις, ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὁποίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἡ εὐθεῖα παρὰ τὴν ὁποίαν παραβάλλονται τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν τεταγμένως κατηγμένων εὐθειῶν τῆς τομῆς, ἐπὶ τὴν διάμετρον, τουτέστιν ἡ παράμετρος τῆς ληφθείσης διαμέτρου θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον τοῦ ἄξονος, αὐξηθεῖσαν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τῆς κυρίας κορυφῆς τῆς τομῆς.

Ἔστω ΑΗ ὁ ἄξων παραβολῆς, καὶ ΒΙ μία διάμετρος αὐτῆς, καὶ ΑΓ ἡ εὐθεῖα παρὰ τὴν ὁποίαν παραβάλλονται τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν τεταγμένως κατηγμένων ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΗ εὐθειῶν, τουτέστιν, ἡ παράμετρος τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Β, ἡ εὐθεῖα ΒΖ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Λέγω, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν τῶν τεταγμένως κατηγμένων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΙ τῆς τομῆς, τουτέστι τὰ τετράγωνα τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Β, εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ παραβαλλόμενα παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, αὐξηθεῖσαν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας ΑΖ.

Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΙ μέχρι τοῦ σημείου Ε, καὶ ἡ ΒΗ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ, ἐφαπτομένην τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Β. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΔΗ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΘΕ· ὥστε θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΘ : ΒΕ = ΗΔ : ΔΒ, καὶ ἕπεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΗ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου

ΒΙ (1,49). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΔΖ x ΖΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΒΖ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΒΗ εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ ΒΖ εἶναι κάθετος, τὸ δὲ $BZ^2 = ΓA x AZ$· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΔΖxΖΗ= ὀρθογώνιον ΓΑ x ΑΖ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΔΖ εἶναι διπλασία τῆς ΑΖ (1, 35)· ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΑΓ εἶναι ἐπίσης διπλασία τῆς ΖΗ, καὶ ἑπομένως τὸ τετραπλάσιον τῆς ΑΖ εἶναι διπλάσιον τῆς ΔΖ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΓ αὐξηθεῖσα κατὰ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας ΔΖ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΔΖ, ΖΗ, τουτέστι πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς εὐθείας ΔΗ. Ἀλλ' ἐδείχθη, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς παραμέτρου τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν διάμετρον ΒΙ· ἡ παράμετρος λοιπόν, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν διάμετρον ΒΙ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, παράμετρον τοῦ ἄξονος, αὐξηθεῖσαν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τῆς ΑΖ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



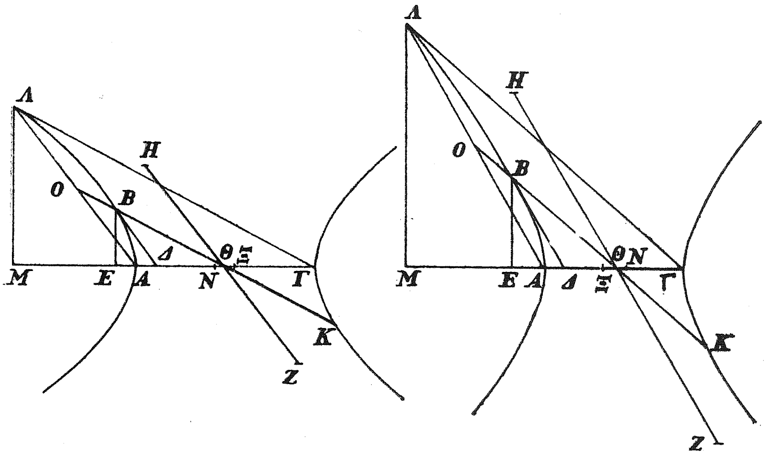
6

Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων τοῦ ἄξονος ὑπερβολῆς ληφθῶσι δύο εὐθεῖαι ἴσαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πρὸς τὴν κληθεῖσαν ὁμόλογον (θ. 2), ἀχθῶσι δὲ δύο τυχοῦσαι συζυγεῖς διάμετροι τῆς τομῆς, καὶ ἂν ἐκ μιᾶς ἀρχικῆς κορυφῆς (ἀκραίου σημείου τοῦ ἄξονος) ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ὀρθίαν διάμετρον (δευτέραν διάμετρον), συναντῶσα τὴν τομήν, ἐκ τοῦ σημείου δὲ συναντήσεως ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν συζυγῶν διαμέτρων, ἥτις εἶναι ἡ πλαγία διάμετρος, θὰ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀντιστοίχου ὀρθίας διαμέτρου (δευτέρας), ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ ἀπολαμβανομένη μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τοῦ ἄκρου τῆς ὁμολόγου εὐθείας τῆς προσκειμένης πρὸς τὴν ἀπωτέραν κορυφήν, πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τῆς αὐτῆς καθέτου καὶ τοῦ ἄκρου τῆς ὁμολόγου εὐθείας τῆς προσκειμένης πρὸς τὴν πλησιεστέραν κορυφήν, ὁ δὲ λόγος τοῦ μήκους τῆς πλαγίας διαμέτρου, πρὸς τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον αὐτῆς, τουτέστι πρὸς τὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παραβάλλονται τὰ ὀρθογώνια τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν τῶν τεταγμένως κατηγμένων, ἢ τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ὀρθίαν διάμετρον, τουτέστι πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον (δηλ. τὴν συζυγῆ), θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουσι μεταξύ των αἱ ἀπολαμβανόμεναι, ὡς ἐλέχθη, εὐθεῖαι.

Ἔστω ΓΑΜ ὁ ἄξων ὑπερβολῆς, πλάγιος ἄξων τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, κέντρον αὐτῆς τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἑκατέρα τῶν εὐθειῶν ΑΝ, ΓΞ ἴση πρὸς τὴν ὁμόλογον εὐθεῖαν, καὶ ἃς ἀχθῶσι διὰ τοῦ σημείου Θ αἱ συζυγεῖς διάμετροι ΖΗ, ΒΚ. Ἔστω ΑΛ μία παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΗ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΛΜ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΜ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς πλαγίας διαμέτρου ΒΚ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὀρθίας διαμέτρου ἢ τῆς δευτέρας (συζυγοῦς) διαμέτρου ΖΗ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΞΜ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ.

Ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΛ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου

Β ἡ κάθετος ΒΕ, καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΗ, ἡ εὐθεῖα ΒΔ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $\Gamma\Theta = \Theta\mathrm{A}$, καὶ ἡ εὐθεῖα $\Lambda\mathrm{O} = \mathrm{OA}$, ἡ εὐθεῖα ΓΛ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΘ· ὥστε θὰ εἶναι διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, ἡ εὐθεῖα $\Delta\mathrm{E}:\mathrm{E}\Theta = \mathrm{AM}:\mathrm{M}\Gamma$. Ἀλλὰ εἶναι $\Delta\mathrm{E}:\mathrm{E}\Theta = \Delta\mathrm{B}^2:\Theta\mathrm{H}^2$ (θ. 4), καὶ ἐπειδή, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, τὸ $\Theta\mathrm{B}^2:\mathrm{B}\Delta^2 = \Gamma\Delta^2:\mathrm{A}\Lambda^2$, τὸ



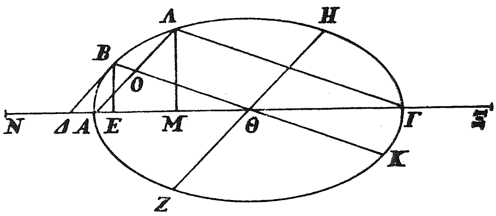
δὲ $\mathrm{B}\Delta^2:\Theta\mathrm{H}^2 = \mathrm{AM}:\mathrm{M}\Gamma$, ὁ λόγος $\Theta\mathrm{B}^2:\Theta\mathrm{H}^2$, θὰ σύγκειται (θὰ εἶναι γινόμενον) ἐκ τοῦ λόγου $\Gamma\Lambda^2:\mathrm{A}\Lambda^2$, καὶ τοῦ λόγου $\mathrm{AM}:\mathrm{M}\Gamma$. Ἀλλὰ ὁ λόγος $\Gamma\Lambda^2:\mathrm{A}\Lambda^2$ σύγκειται ἐκ τῶν λόγων $\Gamma\Lambda^2$: ὀρθογώνιον $\Gamma\mathrm{M} \times \mathrm{M}\Xi$, τοῦ ὀρθογωνίου $\Gamma\mathrm{M} \times \mathrm{M}\Xi$: ὀρθογώνιον $\mathrm{AM} \times \mathrm{MN}$, καὶ τοῦ ὀρθογωνίου $\mathrm{AM} \times \mathrm{MN} : \mathrm{A}\Lambda^2$· ὁ λόγος ἄρα $\Theta\mathrm{B}^2 : \Theta\mathrm{H}^2$ σύγκειται (εἶναι γινόμενον) ἐκ τῶν λόγων $\Gamma\Lambda^2$: ὀρθογώνιον $\Gamma\mathrm{M} \times \mathrm{M}\Xi$, τοῦ ὀρθογωνίου $\Gamma\mathrm{M} \times \mathrm{M}\Xi : \mathrm{AM} \times \mathrm{MN}$, τοῦ ὀρθογωνίου $\mathrm{AM} \times \mathrm{MN} : \mathrm{A}\Lambda^2$, καὶ τοῦ λόγου $\mathrm{AM} : \mathrm{M}\Gamma$. Ἀλλὰ τὸ $\Gamma\Lambda^2 : \Gamma\mathrm{M} \times \mathrm{M}\Xi = \mathrm{A}\Gamma : \mathrm{A}\Xi$ (θ. 2), καί, ὁμοίως, τὸ ὀρθογώνιον $AM \times MN : A\Lambda^2 = \Gamma N : A\Gamma$, ὁ δὲ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου $\Gamma M \times M\Xi : AM \times MN$, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου $M\Xi : MN$ καὶ τοῦ λόγου $\Gamma M : MA$· ὁ λόγος λοιπὸν $\Theta B^2 : \Theta H^2$ σύγκειται ἐκ τῶν λόγων $A\Gamma : A\Xi$, $\Gamma N : A\Gamma$, $M\Xi : MN$, $\Gamma M : MA$, καὶ τοῦ λόγου $AM : M\Gamma$. Εἶναι δὲ ὁ λόγος ὁ συγκείμενος ἐξ ὅλων τῶν λόγων τούτων, ἴσος πρὸς τὸν λόγον $M\Xi : MN$. Διότι, ὁ λόγος $\Gamma N : A\Gamma$, συνδυαζόμενος μὲ τὸν λόγον $A\Gamma : A\Xi$, συνιστᾷ τὸν λόγον $\Gamma N : A\Xi$, εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα $\Gamma N = A\Xi$, καὶ ὁ λόγος $\Gamma M : AM$, συνδυαζόμενος μὲ τὸν λόγον $AM : M\Gamma$, συνιστᾷ τὸν λόγον τῆς εὐθείας $M\Gamma$ πρὸς τὸν ἑαυτόν της· ὁ λόγος ἄρα ὁ συγκείμενος ἐξ ὅλων τῶν λόγων τούτων, θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὑπόλοιπον λόγον, τουτέστι πρὸς τὸν λόγον $M\Xi : MN$. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ $\Theta B^2 : \Theta H^2 = M\Xi : MN$· ὥστε καὶ τὸ $BK^2 : ZH^2 = M\Xi : MN$. Εἶναι δὲ τὸ $BK^2 : ZH^2 = KB$: τὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παραβάλλονται τὰ ὀρθογώνια (παράμετρον), τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ἄγονται πρὸς τὴν διάμετρον KB, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ZH (1,21)· θὰ εἶναι ἄρα ἡ διάμετρος KB πρὸς τὴν παράμετρον, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτήν, δηλ. πρὸς τὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παραβάλλονται τὰ ὀρθογώνια, τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν τεταγμένως κατηγμένων εὐθειῶν ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην, ὡς ἡ εὐθεῖα $M\Xi$ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν MN. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

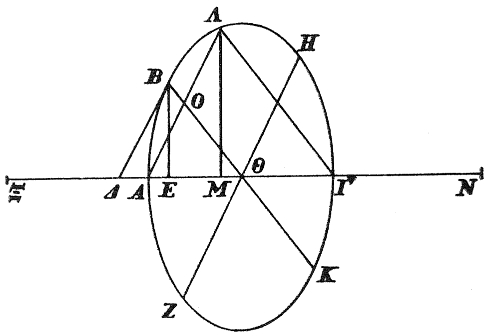
7

Ἐὰν εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς τὴν καλουμένην ὁμόλογον πρόσκεινται εἰς ἑκατέραν τῶν κορυφῶν (ἄκρων) ἑνὸς ἄξονος ἐλλείψεως, ληφθῶσι δὲ εἰς τὴν τομὴν δύο τυχοῦσαι συζυγεῖς διάμετροι καὶ ἀχθῇ ἐκ μιᾶς κορυφῆς τῆς τομῆς εὐθεῖα παράλληλος πρὸς μίαν τῶν συζυγῶν διαμέτρων, ἐκ τοῦ σημείου δὲ τῆς συναντήσεως τῆς παραλλήλου ταύτης μετὰ τῆς τομῆς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν ὁποίαν δὲν ἤχθη ἡ παράλληλος, θὰ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης διαμέτρου, τῆς συζυγοῦς πρὸς τὴν πρώτην, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τοῦ ἄκρου τῆς ὁμολόγου εὐθείας, τῆς προσκειμένης πρὸς μίαν τῶν κορυφῶν, πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς αὐτῆς καθέτου καὶ τοῦ ἄκρου τῆς ὁμολόγου εὐθείας τῆς προσκειμένης πρὸς τὴν κορυφὴν ἐξ ἧς ἤχθη ἡ παράλληλος, ὅπερ θὰ παρασταθῇ ἐπίσης καλῶς, ὅταν, διὰ τὸν μεγάλον ἄξονα, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ κεῖνται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς τομῆς, ἤ, ὅταν διὰ τὸν μικρὸν ἄξονα κεῖνται αὗται ἐπ᾽ αὐτοῦ τοῦ ἰδίου ἄξονος· ἡ διάμετρος δὲ αὕτη θὰ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παραβάλλονται τὰ ὀρθογώνια τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν τῶν τεταγμένως κατηγμένων, ἢ τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ἄλλην διάμετρον, εἰς τὸν λόγον τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν.

Ἔστω ΑΓ ὁ ἄξων ἐλλείψεως, δύο εὐθεῖαι ὁμόλογοι, αἱ ΑΝ, ΓΞ, καὶ δύο συζυγεῖς διάμετροι, αἱ ΒΚ, ΖΗ. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΛ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΖΗ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Λ τῆς τομῆς ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΛΜ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΚ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΗ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΜΞ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΚ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παραβάλλονται τὰ ὀρθογώνια τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὰς εὐθείας, τὰς τεταγμένως κατηγμένας ἐπὶ τὴν διάμετρον ΚΒ, ἢ τὰς εὐθείας τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν διάμετρον ΖΗ, τουτέστιν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΒ εἶναι πρὸς τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ΜΞ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ.

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΛ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΕ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου





Β παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΗ, ἡ εὐθεῖα ΒΔ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τομῆς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΓΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΘΑ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΛΟ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΑ, ἡ εὐθεῖα ΓΛ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΘ, ὥστε διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων θὰ εἶναι $ΔΕ:ΕΘ=ΑΜ:ΜΓ$. Ἀλλὰ εἶναι καὶ $ΔΕ:ΕΘ=ΒΔ^2:ΘΗ^2$ (θ. 4)· εἶναι λοιπὸν $ΑΜ:ΜΓ=ΒΔ^2:ΘΗ^2$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων εἶναι τὸ $Β\Theta^2:Β\Delta^2=\Gamma\Lambda^2:Α\Lambda^2$, καὶ τὸ $Β\Delta^2:\Theta Η^2=ΑΜ:Μ\Gamma$, θὰ εἶναι $Β\Theta^2:\Theta Η^2=$ μὲ τὸν συγκείμενον λόγον $(\Gamma\Lambda^2:Α\Lambda^2) \times (ΑΜ:Μ\Gamma)$. Ἀλλὰ ὁ λόγος $\Gamma\Lambda^2:Α\Lambda^2$ σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου (εἶναι γινόμενον τῶν λόγων) $\Gamma\Lambda^2:\Gamma Μ \times Μ\Xi$, τοῦ λόγου $\Gamma Μ \times Μ\Xi: ΑΜ \times ΜΝ$, καὶ τοῦ λόγου $ΑΜ:ΜΝ : Α\Lambda^2$· ὁ λόγος ἄρα $Β\Theta^2:\Theta Η^2$ σύγκειται ἐκ τῶν λόγων (εἶναι γινόμενον τῶν λόγων) $\Gamma\Lambda^2:\Gamma Μ \times Μ\Xi$, τοῦ $\Gamma Μ \times Μ\Xi:ΑΜ \times ΜΝ$ καὶ τοῦ $ΑΜ \times ΜΝ:Α\Lambda^2$, ἐν συνδυασμῷ μὲ τὸν λόγον $ΑΜ:Μ\Gamma$. Ἀλλὰ $\Gamma\Lambda^2:\Gamma Μ \times Μ\Xi=Α\Gamma:Α\Xi$ (θ. 3), καὶ ὁμοίως τὸ ὀρθογώνιον $ΑΜ \times ΜΝ:Α\Lambda^2=\Gamma Ν:Α\Gamma$, ὁ δὲ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου $\Gamma Μ \times Μ\Xi:ΑΜ \times ΜΝ$ σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου $\Gamma Μ:ΑΜ$ καὶ $Μ\Xi:ΜΝ$ (δηλ. εἶναι γινόμενον αὐτῶν)· ὁ λόγος λοιπὸν $Β\Theta^2:\Theta Η^2$ σύγκειται ἐκ τῶν λόγων $Α\Gamma:Α\Xi$, $\Gamma Ν:Α\Gamma$, $\Gamma Μ:ΑΜ$, $Μ\Xi:ΜΝ$, καὶ τοῦ λόγου $ΑΜ:Μ\Gamma$. Ὁ λόγος λοιπὸν ὁ συγκείμενος ἐξ ὅλων αὐτῶν τῶν λόγων εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον $Μ\Xi:ΜΝ$· διότι ὁ λόγος $\Gamma Ν:Α\Gamma$ ἐν συνδυασμῷ μὲ τὸν λόγον $Α\Gamma:Α\Xi$ συνιστᾷ τὸν λόγον $\Gamma Ν:Α\Xi$, ὅστις ἐξ ἄλλου εἶναι λόγος ἰσότητος, καὶ ὁ λόγος ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ λόγου $\Gamma Μ:ΑΜ$ καὶ τοῦ λόγου $ΑΜ:Μ\Gamma$ συνιστᾷ τὸν λόγον τῆς εὐθείας ΓΜ πρὸς τὸν ἑαυτόν της. Θὰ εἶναι ἄρα ὁ λόγος ὁ συγκείμενος ἐξ ὅλων αὐτῶν τῶν λόγων, ὁ ὑπόλοιπος λόγος, τουτέστι ὁ $Μ\Xi:ΜΝ$ (διότι $\Gamma Ν=Α\Xi$). Εἶναι λοιπὸν τὸ $\Theta Β^2:\Theta Η^2=Μ\Xi:ΜΝ$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ $ΒΚ^2:ΖΗ^2=ΒΚ$: τὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παραβάλλονται τὰ ὀρθογώνια τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν τῶν τεταγμένως κατηγμένων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΚ τῆς τομῆς, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΗ, ἡ εὐθεῖα ΒΚ θὰ εἶναι πρὸς αὐτὴν τὴν πρώτην εὐθεῖαν, τουτέστι πρὸς τὴν εἰς αὐτὴν ἀντίστοιχον παράμετρον, ὡς ἡ εὐθεῖα $Μ\Xi:ΜΝ$. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ε. Σ. Σταμάτη : Κωνικαὶ τομαὶ Ἀπολλωνίου, τόμος δ'.

⟨Πόρισμα⟩

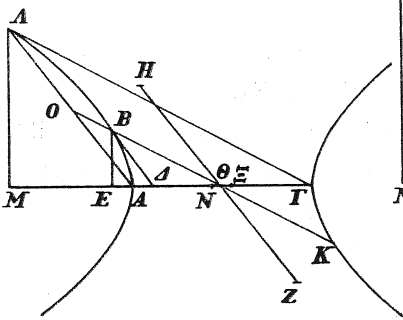
Κατόπιν τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Λ πίπτῃ ἐπὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ διάμετρος ΚΒ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον ΖΗ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΜΞ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ.

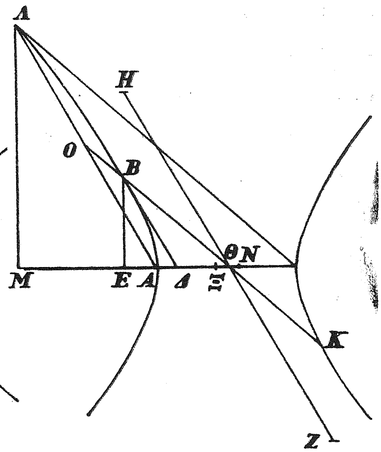
8

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα ἕκτον καὶ ἕβδομον, τόσον διὰ τὴν ὑπερβολήν, ὅσον καὶ διὰ τὴν ἔλλειψιν, λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ πλαγίου ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΒΚ, ΖΗ, θεωρουμένων, ὡς προέκτασις ἡ μία τῆς ἄλλης, ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝxΜΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῆς εὐθείας ΜΞ καὶ ἐκείνης, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΝΜ x ΜΞ.

Ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΞΙ μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ. Εἶναι λοιπὸν τὸ $ΑΓ^2$:$ΒΚ^2$=$ΑΘ^2$:$ΘΒ^2$, τὸ δὲ $ΑΘ^2$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΘxΘΕ (1,37)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΓ^2$:$ΒΚ^2$=ὀρθογώνιον ΔΘxΘΕ:$ΘΒ^2$. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΔΘx ΘΕ:$ΘΒ^2$=ὀρθογώνιον ΑΓxΓΜ:$ΓΑ^2$, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΔΒ, ΒΘ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας ΑΛ, ΛΓ (λῆμμα 9 εἰς 2ον βιβλίον (Πάππου))· εἶναι λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΓx ΓΜ:$ΓΛ^2$=$ΑΓ^2$:$ΒΚ^2$. Ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΜ ὡς κοινὸν ὕψος· τὸ ὀρθογώνιον ΑΓxΓΜ θὰ εἶναι : ὀρθογώνιον ΜΓxΓΝ=ΓΑ:ΓΝ. Εἶναι δὲ τὸ $ΓΛ^2$:ΞΜxΜΓ=ΑΓ:ΑΞ (θ. 2 καὶ 3), ἡ δὲ εὐθεῖα ΓΝ=εὐθεῖα ΑΞ, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ὁμόλογοι (θ. 6)· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΑΓxΓΜ : ὀρθογώνιον ΜΓ x ΓΝ = $ΓΛ^2$:ΞΜxΜΓ, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16) θὰ εἶναι ΑΓxΓΜ:

$ΓΛ^2 = ΜΓ x ΓΝ : ΓΜ x ΜΞ$. Ἀλλ' ἐδείχθη, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $ΑΓ x ΓΜ : ΓΛ^2 = ΑΓ^2 : ΒΚ^2$· εἶναι λοιπὸν τὸ $ΑΓ^2 : ΒΚ^2 = ΜΓ x ΓΝ : ΓΜ x ΜΞ$, τουτέστι $= ΓΝ : ΜΞ$, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΓΝ x ΜΞ : ΜΞ^2 = ΓΝ : ΜΞ$. Εἶναι δὲ ἐκ τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων $ΒΚ^2 : ΖΗ^2 = ΞΜ : ΜΝ$· ὥστε $ΒΚ : ΖΗ = ΞΜ : ΞΙ$, ἡ ὁποία (ΞΙ) εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν ΞΜ, ΜΝ. Θὰ εἶναι ἄρα $ΒΚ : ΒΚ+ΖΗ = ΜΞ : ΜΙ$, τουτέστι $= ΜΞ+ΞΙ$, καὶ τὸ $ΒΚ^2 : (ΒΚ+$





$ΖΗ)^2 = ΜΞ^2 : ΜΙ^2$. Ἀλλ' ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι $ΑΓ^2 : ΒΚ^2 =$ ὀρθογώνιον $ΓΝ x ΜΞ : ΞΜ^2$· θὰ εἶναι λοιπόν, ἕνεκα τῆς ταυτότητος, τὸ $ΑΓ^2 : (ΒΚ+ΖΗ)^2 = ΓΝ x ΞΜ : ΜΙ^2$. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΜΙ ἀποτελεῖται ἐκ τῆς εὐθείας ΜΞ, αὐξηθείσης κατὰ τὴν εὐθεῖαν, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΝΜ x ΜΞ$· εἶναι λοιπὸν τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο συζυγῶν διαμέτρων ΒΚ, ΖΗ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον $ΝΓ x ΜΞ$ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΜΙ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς εὐθείας ΜΞ καὶ τῆς εὐθείας ΞΙ, τῆς ὁποίας εὐθείας ΞΙ τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΝΜxΜΞ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9

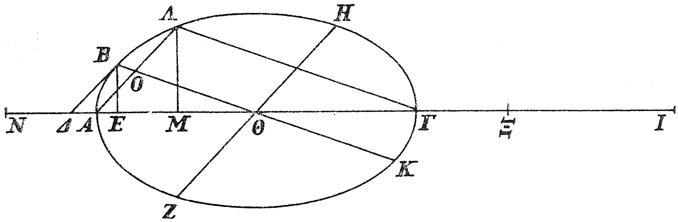
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα ἕκτον καὶ ἕβδομον θεωρήματα, λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῶν εὐθειῶν ΒΚ, ΖΗ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΓ, ΜΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῶν εὐθειῶν ΜΞ, ΞΙ, τουτέστιν ἐκείνης (τῆς ΞΙ), τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΜ, ΜΞ.

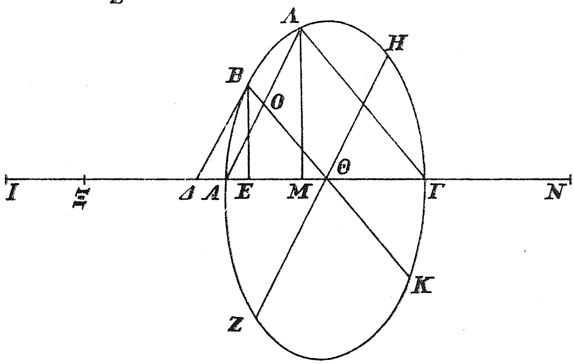
Διότι κατὰ τὸ τελευταῖον θεώρημα (τὸ προηγούμενον) εἶναι φανερόν, ὅτι $KB{:}ZH = M\Xi{:}\Xi I$, καὶ $KB^2 : (BK - ZH)^2 = M\Xi^2 : (M\Xi - \Xi I)^2$. Ἀλλὰ τὸ $A\Gamma^2 : BK^2 =$ ὀρθογώνιον $\Gamma N x M\Xi : M\Xi^2$, κατὰ τὸ αὐτὸ ὄγδοον προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι λοιπὸν διὰ τὴν ταυτότητα, τὸ $A\Gamma^2 : (BK - ZH)^2 =$ ὀρθογώνιον $\Gamma N x M\Xi : (M\Xi - \Xi I)^2$. Ἀλλὰ τὸ ΞI^2 εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΝΜxΜΞ· εἶναι λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν συζυγῶν διαμέτρων ΒΚ, ΖΗ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΓ, ΜΞ, εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς εὐθείας ΜΞ καὶ ἐκείνης, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΜ, ΜΞ, τουτέστι τῆς εὐθείας ΞΙ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΚ, ΖΗ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΝΓ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΜ, ΜΞ.

Διότι, ἐπειδή, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ ὄγδοον θεώρημα, τὸ $ΑΓ^2 : ΒΚ^2 = ΓΝ : ΜΞ$, καὶ κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ $ΒΚ^2 : ΒΚ \times ΖΗ = ΜΞ : ΞΙ$, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα $ΜΞ : ΞΙ = ΒΚ : ΖΗ$, θὰ εἶναι ἄρα διὰ τὴν ταυτότητα, τὸ $ΑΓ^2 : ΒΚ \times ΖΗ = ΓΝ : ΞΙ$, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΝΜ \times ΜΞ$. Εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ πρὸς τὸ





ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους ΒΚ, ΖΗ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΝΓ εἶναι πρὸς ἐκείνην τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΜ, ΜΞ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11

Ἐὰν δι' ὑπερβολὴν ἔχωσι δοθῆ τὰ αὐτά, ὡς εἰς τὸ ἕβδομον θεώρημα, λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΒΚ, ΖΗ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΓΝ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΝΜ, ΜΞ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΑΓ^2 : ΒΚ^2 = ΓΝ : ΜΞ$ (θ. 8), καὶ τὸ $ΒΚ^2$: $(ΒΚ^2 + ΖΗ^2) = ΜΞ : (ΜΞ + ΜΝ)$, ἐπειδὴ εἶναι φανερόν, κατὰ τὸ ἕκτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, ὅτι τὸ $ΒΚ^2 : ΖΗ^2 = ΜΞ : ΜΝ$, θὰ εἶναι ἄρα, διὰ τὴν ταυτότητα, τὸ $ΑΓ^2$: πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν συζυγῶν διαμέτρων, τὸ $(ΒΚ^2 + ΖΗ^2)$, ὡς ἡ $ΓΝ : (ΝΜ + ΜΞ)$. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12

Εἰς πᾶσαν ἔλλειψιν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο οἱωνδήποτε συζυγῶν διαμέτρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων.

Ἂς ληφθῇ τὸ σχῆμα τοῦ ἑβδόμου θεωρήματος τοῦ βιβλίου τούτου. Ἔστω ΑΓ ὁ εἷς τῶν ἀξόνων, καὶ δύο συζυγεῖς διάμετροι αἱ ΒΚ, ΖΗ, καὶ δύο εὐθεῖαι ὁμόλογοι αἱ ΑΝ, ΓΞ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου ἄξονος τῆς ἐλλείψεως, ὡς ὁ πλάγιος ἄξων (ΑΓ) πρὸς τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον (1,15), καὶ ἡ ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον ὡς ἡ $ΓΝ : ΝΑ$, ἐπειδὴ ἡ ΑΝ εἶναι μία ὁμόλογος εὐθεῖα, καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα $ΑΝ = ΓΞ$, εἶναι ἄρα τὸ $ΑΓ^2$: τετράγωνον τοῦ ἄλλου ἄξονος $= ΝΓ : ΓΞ$· καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 6,18), θὰ εἶναι $ΑΓ^2 : ΑΓ^2 +$ τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου ἄξονος $= ΝΓ : ΝΞ$. Ἀλλ' εἶναι τὸ $ΑΓ^2 : ΒΚ^2 = ΝΓ : ΜΞ$ (θ. 8), τὸ $ΒΚ^2 : (ΒΚ^2 + ΖΗ^2) = ΜΞ : (ΜΞ + ΜΝ)$, διότι ἔχει δειχθῆ, ὅτι τὸ $ΒΚ^2 : ΖΗ^2 = ΜΞ : ΜΝ$ (θ. 8)· καὶ εἶναι $ΜΞ + ΜΝ = ΝΞ$·

καὶ διὰ τὴν ταυτότητα, εἶναι $ΑΓ^2 : (ΒΚ^2+ΖΗ^2) = ΝΓ : ΝΞ$. Ἀλλ' ἐδείχθη, ὅτι $ΝΓ : ΝΞ = ΑΓ^2$: ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀξόνων (συζυγῶν)· εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο τυχουσῶν συζυγῶν διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως τῶν ΒΚ, ΖΗ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13

Εἰς πᾶσαν ὑπερβολήν, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων δύο οἱωνδήποτε συζυγῶν διαμέτρων τῆς τομῆς.

Ἂς ληφθῇ τὸ σχῆμα τῆς ὑπερβολῆς τοῦ ἕκτου θεωρήματος τοῦ βιβλίου τούτου, ὅπου ΑΓ εἶναι ὁ εἷς τῶν ἀξόνων, αἱ ΒΚ καὶ ΖΗ εἶναι δύο συζυγεῖς διάμετροι, καὶ ΑΝ, ΞΓ εἶναι αἱ δύο ὁμόλογοι εὐθεῖαι. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου ἄξονος τῆς ὑπερβολῆς, ὡς εἶναι ὁ ἄξων ΑΓ πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὐτοῦ παράμετρον (1,16), καὶ ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὐτοῦ παράμετρον, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΝ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΝΑ, ἐπειδὴ ἡ ΑΝ εἶναι ἡ ὁμόλογος εὐθεῖα, ἡ τελευταία δὲ αὕτη εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΞ, ἕπεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ θὰ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀξόνων, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΝ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΝΞ. Ἀλλὰ τὸ $ΑΓ^2 : ΒΚ^2 =$ εὐθεῖα $ΓΝ : ΜΞ$ (θ. 8), καὶ $ΒΚ^2 : ΖΗ^2 = ΜΞ : ΜΝ$· καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5,19), τὸ τετράγωνον τῆς ΒΚ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΒΚ, ΖΗ εἶναι ὡς ἡ εὐθεῖα $ΜΞ : ΞΝ$ (θ. 6). Εἶναι ἄρα, διὰ τὴν ταυτότητα, τὸ $ΑΓ^2$:

$(BK^2 - ZH^2) = \Gamma N : N\Xi$. Ἀλλὰ ἐδείχθη, ὅτι τὸ $A\Gamma^2$: (διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀξόνων τῆς τομῆς) εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τῆς εὐθείας $\Gamma N : N\Xi$· ἡ διαφορὰ λοιπὸν τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων τῆς τομῆς εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν τυχουσῶν συζυγῶν διαμέτρων BK, ZH. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14

Ἐὰν ληφθῇ τὸ σχῆμα τῆς ἐλλείψεως τοῦ ἑβδόμου θεωρήματος τοῦ βιβλίου τούτου, λέγω, ὅτι δοθείσης τῆς εὐθείας ΑΛ παραλλήλου πρὸς τὴν διάμετρον ZH, καὶ τῆς ΛΜ καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν συζυγῶν διαμέτρων BK, ZH, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ΝΓ πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς εὐθείας ΜΘ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $A\Gamma^2 : BK^2 = \Gamma N : M\Xi$, καὶ $BK^2 : ZH^2 = M\Xi : MN$ (θ. 8), καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 19) θὰ εἶναι $BK^2 : (BK^2 - ZH^2) = M\Xi : (M\Xi - MN)$, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν εὐθειῶν, $M\Xi - MN$ εἶναι $= 2M\Theta$, θὰ εἶναι ἄρα, διὰ τὴν ταυτότητα, $A\Gamma^2 : (BK^2 - ZH^2) = \Gamma N : 2M\Theta$. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15

Ἐὰν ληφθῶσι τὰ σχήματα τῶν θεωρημάτων ἕκτου καὶ ἑβδόμου τοῦ βιβλίου τούτου, τόσον διὰ τὴν ὑπερβολήν, ὅσον καὶ διὰ τὴν ἔλλειψιν, λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ἥτις προσδιορίζει τὸ σχῆμα τῆς τομῆς μετὰ τῆς εὐθείας ΒΚ (ἡ εὐθεῖα ἥτις προσδιορίζει, εἶναι ἐδῶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου, δηλ. ἡ παράμετρος καὶ βάσις ἡ ΒΚ), τουτέστι τὸ τετράγωνον τῆς παραμέτρου τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν διάμετρον ΒΚ, ὡς εἶναι τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΓ, ΜΞ, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΜΝ.

Ἂς γίνῃ ἡ εὐθεῖα ΒΚ : ξ = ΜΞ : ΜΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΜΞ : ΜΝ = ΚΒ: ἀντίστοιχος αὐτῆς παράμετρος, ἡ εὐθεῖα ξ θὰ προσδιορίζῃ τὸ σχῆμα τῆς τομῆς μετὰ τῆς διαμέτρου ΚΒ (θ. 6 καὶ 7) (τὸ σχῆμα, ὡς γράφεται ἀνωτέρω ἐντὸς παρενθέσεως). Ἀλλὰ $ΑΓ^2$: $ΒΚ^2$ = ΓΝ x ΜΞ : $ΜΞ^2$, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ ὄγδοον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, καὶ $ΒΚ^2$: $ξ^2$ = $ΜΞ^2$: $ΜΝ^2$· καὶ διὰ τὴν ταυτότητα θὰ εἶναι τὸ $ΑΓ^2$: $ξ^2$ = ΝΓ x ΜΞ : $ΜΝ^2$. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ὡς εἰς τὰ θεωρήματα ἕκτον καὶ ἕβδομον τοῦ βιβλίου τούτου, ἔστω ξ ἡ ἀντίστοιχος παράμετρος τῆς διαμέτρου ΒΚ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῶν εὐθειῶν ΒΚ καὶ ξ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΓ, ΜΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΚ : εὐθεῖα ξ = ΜΞ : ΜΝ (θ. 6 καὶ 7), θὰ εἶναι ἄρα, δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 19), ΒΚ : (ΒΚ — ξ) = ΜΞ : (ΜΞ — ΜΝ), καὶ θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τετράγωνα αὐτῶν, τουτέστιν, ὅτι $ΒΚ^2$: $(ΒΚ — ξ)^2$ = $ΜΞ^2$: $(ΜΞ — ΜΝ)^2$. Ἀλλὰ τὸ $ΑΓ^2$: $ΒΚ^2$ = ὀρθογώνιον ΝΓ x ΜΞ :

$ΜΞ^2$ (θ. 8)· καὶ διὰ τὴν ταυτότητα, εἶναι $ΑΓ^2 : (ΒΚ - ξ)^2 = ΝΓ \times ΜΞ : (ΜΞ - ΜΝ)^2$. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ὡς εἰς τὰ θεωρήματα ἕκτον καὶ ἕβδομον τοῦ βιβλίου τούτου, λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος, τῆς διαμέτρου ΒΚ μετὰ τῆς παραμέτρου ξ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΓΝ, ΜΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΞ, ΜΝ.

Διότι, ἐπειδὴ ΒΚ : εὐθεῖα ξ = ΜΞ : ΜΝ (θ. 6 καὶ 7), θὰ εἶναι ἄρα, διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), $ΒΚ^2 : (ΒΚ + ξ) = ΜΞ^2 : (ΜΞ + ΜΝ)^2$. Ἀλλὰ τὸ $ΑΓ^2 : ΒΚ^2 = ΓΝ \times ΜΞ : ΜΞ^2$ (θ. 8)· καὶ διὰ τὴν ταυτότητα, θὰ εἶναι τὸ $ΑΓ^2 : (ΒΚ + ξ)^2 = ΓΝ \times ΜΞ : (ΜΞ + ΜΝ)^2$. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς τὴν διάμετρον ΒΚ καὶ τὴν παράμετρον αὐτῆς ξ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΝΓ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΒΚ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΝΓ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΞ (θ. 8), καὶ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΒΚ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΚ καὶ ξ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΒΚ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ξ, τουτέστιν, ὡς εἶναι ἡ ΜΞ πρὸς τὴν ΜΝ, θὰ εἶναι ἄρα διὰ τὴν ταυτότητα, $ΑΓ^2 : ΒΚ \times ξ = ΝΓ : ΜΝ$ (θ. 6 καὶ 7). Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο εὐθειῶν ΒΚ, ξ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΓ, ΜΞ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΑΓ^2 : ΒΚ^2 = ΝΓ \times ΜΞ : ΜΞ^2$, καὶ $ΒΚ^2 : (ΒΚ^2 + ξ^2) = ΜΞ^2 : (ΜΝ^2 + ΜΞ^2)$· διότι, ὡς ἐδείχθη εἰς τὰ θεωρήματα ἕκτον καὶ ἕβδομον τοῦ βιβλίου τούτου, ἡ $ΒΚ : ξ = ΜΞ : ΜΝ$· εἶναι ἄρα, διὰ τὴν ταυτότητα, τὸ $ΑΓ^2 : (ΒΚ^2 + ξ^2) = ΓΝ \times ΜΞ : (ΜΝ^2 + ΜΞ^2)$. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΒΚ καὶ ξ, ὡς εἶναι τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΓ, ΜΞ, πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ.

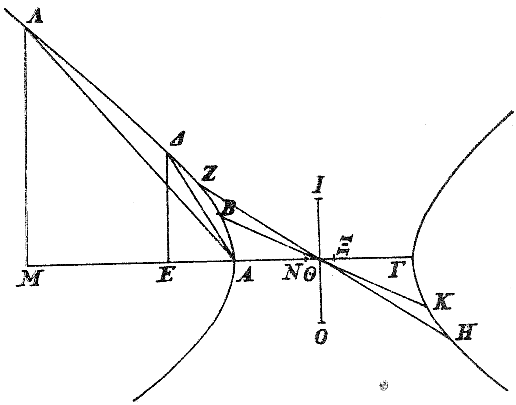
Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΑΓ^2 : ΒΚ^2 = ΝΓ \times ΜΞ : ΜΞ^2$ (θ. 8), καὶ $ΒΚ : ξ = ΜΞ : ΜΝ$, θὰ εἶναι τὸ $ΒΚ^2 : (ΒΚ^2 - ξ^2) = ΜΞ^2 : (ΜΞ^2 - ΜΝ^2)$ (θ. 6 καὶ 7). Καὶ διὰ τὴν ταυτότητα θὰ εἶναι ἄρα $ΑΓ^2 : (ΒΚ^2 - ξ^2) = ΓΝ \times ΜΞ : (ΜΝ^2 - ΜΞ^2)$. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21

Ἐὰν εἰς ὑπερβολήν, ὁ πλάγιος ἄξων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ὀρθοῦ ἄξονος, πᾶσα πλαγία διάμετρος λαμβανομένη μεταξὺ τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῆς τομῆς, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθίας διαμέτρου (δηλ. τῆς συζυγοῦς μὴ πλαγίας διαμέτρου), καὶ ὁ λόγος τοῦ μεγάλου ἄξονος πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου πάσης ἄλλης πλαγίας διαμέτρου πρὸς τὴν συζυγῆ ὀρθίαν διάμετρον, ὁ δὲ λόγος πάσης πλαγίας διαμέτρου πλησιεστέρας πρὸς τὸν μεγάλον ἄξονα, πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου πλαγίας τινὸς διαμέτρου, εὑρισκομένης μακρύτερον τοῦ ἄξονος, πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον.

Ἔστωσαν ΑΓ, ΙΟ οἱ ἄξονες ὑπερβολῆς καὶ δύο πλάγιαι διάμετροι αὐτῆς αἱ ΒΚ, ΖΗ, καὶ ὁ ἄξων ΑΓ ἔστω μεγαλύτερος τοῦ ἄξονος ΙΟ. Λέγω, ὅτι ἡ διάμετρος ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθίας διαμέτρου, ἡ ὁποία εἶναι συζυγὴς πρὸς αὐτήν, καὶ ὅτι ἡ διάμετρος ΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς διαμέτρου αὐτῆς, ὁ δὲ λόγος τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸν ἄξονα ΙΟ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΒΚ πρὸς τὴν ὀρθίαν διάμετρον, ἡ ὁποία εἶναι συζυγὴς πρὸς αὐτήν, ἢ μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΖΗ πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον αὐτῆς, καὶ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου ΒΚ, εὑρισκομένης πλησιέστερον πρὸς τὸν ἄξονα, πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΖΗ πρὸς τὴν ὀρθίαν διάμετρον τὴν συζυγῆ αὐτῆς.

Ἂς γίνῃ, καὶ ἀπὸ τὸ ἓν μέρος, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο, εὐθεῖά τις ΓΝ : ΑΝ καὶ εὐθεῖά τις ΑΞ : ΓΞ = ἄξων ΑΓ : ἀντίστοιχος αὐτοῦ παράμετρος, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΝ, ΓΞ νὰ εἶναι αἱ καλούμεναι ὁμόλογοι. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΔ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, ἡ εὐθεῖα ΑΛ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΛΜ κάθετοι ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΒΚ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὀρθίας διαμέτρου τῆς συζυγοῦς πρὸς αὐτήν, ὡς ἡ εὐθεῖα ΞΕ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΝ (θ. 6), καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΖΗ θὰ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς συζυγοῦς πρὸς αὐτὴν διαμέτρου, ὡς ἡ εὐθεῖα ΞΜ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ. Ἡ διάμετρος ἄρα ΒΚ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς συζυ-



γοῦς διαμέτρου, καὶ ἡ διάμετρος ΖΗ τῆς συζυγοῦς πρὸς αὐτήν. Εἶναι δὲ ὁ ἄξων ΑΓ πρὸς τὴν παράμετρον, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς αὐτόν, ὡς ἡ εὐθεῖα ΓΝ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΝ, ἢ ὡς ἡ εὐθεῖα ΑΞ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΞΓ, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΓΝ, ΑΞ εἶναι ἴσαι, καὶ ὁ λόγος ἑκατέρας αὐτῶν πρὸς τὴν ΑΝ εἶναι ὁ αὐτός, ὁ δὲ λόγος τῆς ΞΕ : ΕΝ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΞΑ : ΑΝ· ὥστε ὁ λόγος ΞΑ : ΓΞ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΞΕ : ΕΝ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ λόγος ΞΑ : ΓΞ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΞΜ : ΜΝ. Ἀλλὰ ΞΑ : ΓΞ $=$ ΑΓ^2 : ΙΟ^2

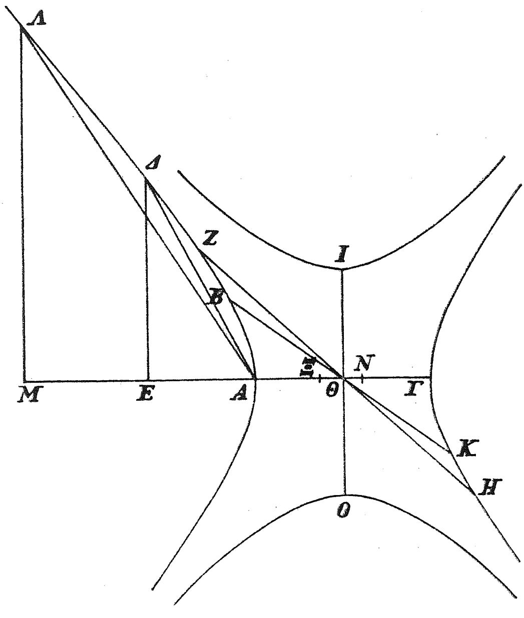
(1, 16), διότι οἱ δύο οὗτοι λόγοι εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τὸν λόγον τῆς εὐθείας ΑΓ πρὸς τὴν ἀντίστοιχον εἰς αὐτὴν παράμετρον· ὁ λόγος ἄρα $ΑΓ^2 : ΙΟ^2$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΞΕ : ΕΝ, ἢ τοῦ λόγου ΞΜ : ΜΝ. Εἶναι δὲ εὐθεῖα ΞΕ : ΕΝ $=$ $ΒΚ^2$: τετράγωνον τῆς συζυγοῦς πρὸς αὐτὴν ὀρθίας διαμέτρου, καὶ ἡ ΜΞ : ΜΝ $=$ τετράγωνον διαμέτρου ΖΗ : τετράγωνον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς· ὁ λόγος ἄρα $ΑΓ^2 : ΙΟ^2$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $ΒΚ^2$: τετράγωνον τῆς συζυγοῦς πρὸς αὐτὴν διαμέτρου, καὶ μεγαλύτερος τοῦ λόγου $ΖΗ^2$: τετράγωνον τῆς συζυγοῦς πρὸς αὐτὴν διαμέτρου, ὥστε ἰσχύει τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων αὐτῶν, τουτέστιν ὁ λόγος ΑΓ : ΙΟ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΒΚ : εὐθεῖα συζυγὴς πρὸς αὐτήν, ἢ τοῦ λόγου ΖΗ : συζυγὴς αὐτῆς εὐθεῖα. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος ΞΕ : ΕΝ, τουτέστιν ὁ λόγος $ΒΚ^2$: τετράγωνον τῆς συζυγοῦς πρὸς αὐτὴν εὐθείας, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΞΜ : ΜΝ, τουτέστι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΖΗ : τὸ τετράγωνον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς, ὁ λόγος τῆς διαμέτρου ΒΚ πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΖΗ πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22

Ἐὰν δὲ ὁ πλάγιος ἄξων τῆς ὑπερβολῆς εἶναι μικρότερος τοῦ ὀρθοῦ ἄξονος, πᾶσα πλαγία διάμετρος θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθίας διαμέτρου τῆς συζυγοῦς πρὸς αὐτήν, ὁ δὲ λόγος τοῦ μικροῦ πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου πάσης πλαγίας διαμέτρου πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς ὀρθίαν διάμετρον, καὶ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τῆς πλησιεστέρας πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα, πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς μακρύτερον ἀπὸ τὸν μικρὸν ἄξονα εὑρισκομένης διαμέτρου πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον.

Ἔστωσαν ἄξονες τῆς ὑπερβολῆς, οἱ ΑΓ, ΟΙ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Θ, καὶ ΒΚ, ΖΗ δύο τυχοῦσαι διάμετροι, ἔστω δὲ ὁ ἄξων ΑΓ μικρότερος τοῦ ἄξονος ΙΟ. Λέγω, ὅτι αἱ διάμετροι ΒΚ, ΖΗ εἶναι μικρότεραι τῶν ἀντιστοίχων ὀρθίων διαμέτρων, αἱ ὁποῖαι εἶναι πρὸς αὐτὰς συζυγεῖς, καὶ ὅτι ὁ λόγος τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸν ἄξονα ΙΟ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΒΚ πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον, καὶ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου ΒΚ πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΖΗ πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς.

Ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις ΓΝ πρὸς εὐθεῖαν ΝΑ, ὡς ὁ ἄξων ΑΓ πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ, καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ΑΞ πρὸς εὐθεῖαν ΞΓ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον· θὰ εἶναι λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ΞΓ, ΑΝ ἐκεῖναι, τὰς ὁποίας καλοῦμεν ὁμολόγους. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, καὶ ἡ ΑΛ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Δ, Λ, αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΛΜ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Εἶναι λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΒΚ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὀρθίας διαμέτρου, ἡ ὁποία εἶναι συζυγὴς πρὸς αὐτὴν (θ. 6), ὡς ἡ εὐθεῖα ΞΕ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΝ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΖΗ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς, ὡς ἡ εὐθεῖα ΞΜ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ· ὥστε εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ διάμετρος ΒΚ εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθίας διαμέτρου, ἡ ὁποία εἶναι συζυγής πρὸς αὐτήν, καὶ ὅτι ἡ διάμετρος ΖΗ εἶναι μικροτέρα τῆς συζυγοῦς αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἄξων ΓΑ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΓΝ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΝΑ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΞΑ : ΓΞ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ εὐθεῖα ΓΝ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΞ, καὶ ὁ λόγος ἑκατέρας τῶν εὐθειῶν τούτων πρὸς τὴν



εὐθεῖαν ΑΝ θὰ εἶναι ὁ αὐτός. Ἀλλὰ ὁ λόγος ΞΕ : ΕΝ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΞΑ : ΑΝ· ὥστε ὁ λόγος ΞΕ : ΕΝ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΓΝ : ΝΑ. Ἀλλὰ ΞΕ : ΕΝ = τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΒΚ, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς διαμέτρου (θ. 6), καὶ ΓΝ : ΝΑ = τετράγωνον τοῦ πλαγίου ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ὀρθοῦ ἄξονος (1, 16)· εἶναι ἄρα ὁ λόγος τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸν ὀρθὸν συζυγῆ αὐτοῦ ἄξονα, μικρότερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΒΚ, πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον, καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΖΗ πρὸς τὴν ὀρθίαν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΞΕ : ΕΝ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΞΜ : ΜΝ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΞΕ : ΕΝ $=$ ΒΚ^2 : τετράγωνον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς διαμέτρου, καὶ ἡ εὐθεῖα ΞΜ : ΜΝ $=$ ΖΗ^2 : τετράγωνον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς διαμέτρου, θὰ εἶναι ἄρα ὁ λόγος τῆς διαμέτρου ΚΒ πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς ὀρθίαν διάμετρον, μικρότερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΖΗ πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23

Ἐὰν οἱ ἄξονες ὑπερβολῆς εἶναι ἴσοι, ὅλοι οἱ συζυγεῖς ἄξονες θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσοι.

Διότι ἐὰν ληφθῇ τὸ σχῆμα τοῦ εἰκοστοῦ πρώτου θεωρήματος καὶ ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἄξονα ΟΙ, ὁ ἄξων ΑΓ θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσος πρὸς τὴν παράμετρον, τὴν ἀντίστοιχον αὐτοῦ (1, 16). Εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΘ $=$ ΘΓ, καὶ αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι εἶναι ὁμόλογοι εὐθεῖαι, διότι εἶναι μεταξύ των, ὡς ἡ πλαγία διάμετρος ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρον αὐτῆς. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΒΚ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὀρθίας συζυγοῦς αὐτῆς διαμέτρου, ὡς ΘΕ : ΕΘ, τουτέστιν, ὡς ἴση εὐθεῖα πρὸς ἴσην εὐθεῖαν, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΖΗ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς συζυγοῦς της, ὡς ἡ ΘΜ : ΜΘ· εἶναι ἄρα ἑκατέρα τῶν διαμέτρων ΒΚ, ΖΗ ἴση πρὸς τὴν συζυγῆ της, καὶ ἄρα ἴση πρὸς τὴν παράμετρον αὐτῆς. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

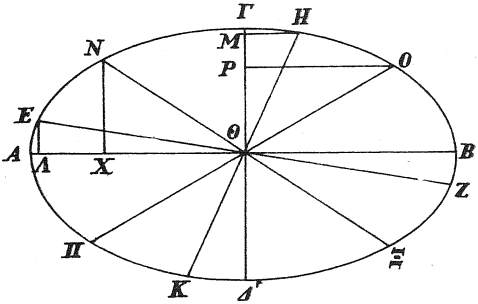
24

Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν ἀχθῶσι οἱαιδήποτε συζυγεῖς διάμετροι, ὁ λόγος μεγάλης τινὸς διαμέτρου πρὸς τὴν μικρὰν συζυγῆ διάμετρον θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ μεγάλου ἄξονος πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα, καὶ ὁ λόγος μιᾶς μεγάλης διαμέτρου, πλησιεστέρας πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα τῆς τομῆς, πρὸς τὴν μικρὰν συζυγῆ διάμετρον, θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου μιᾶς μεγάλης διαμέτρου, εὑρισκομένης μακρύτερον τοῦ ἄξονος τούτου, πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτοῦ διάμετρον.

Ἔστω ΑΒ ὁ μέγας ἄξων μιᾶς ἐλλείψεως, καὶ ΓΔ ὁ μικρὸς ἄξων, ΕΖ, ΗΚ καὶ ΞΝ, ΠΟ συζυγεῖς διάμετροι τῆς τομῆς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ διάμετρος ΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς συζυγοῦς της ΗΚ, καὶ ἡ διάμετρος ΞΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς συζυγοῦς της ΟΠ. Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Ε, Ν αἱ εὐθεῖαι ΕΛ, ΝΧ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΒ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Η, Ο αἱ εὐθεῖαι ΗΜ, ΟΡ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα ΓΔ. Εἶναι λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΘ x ΘΒ : ΘΓ² = ὀρθογώνιον ΑΛ x ΛΒ : ΛΕ² (1, 21). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΑΘ x ΘΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΘΓ²· τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν ΑΛ x ΛΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΛΕ²· ὥστε θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΘ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΘΕ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΖΕ. Εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΓΘ x ΘΔ : ΘΒ² = ὀρθογώνιον ΓΜ x ΜΔ : ΜΗ², καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΓΘ x ΘΔ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου ΘΒ· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΓΜ x ΜΔ μικρότερον τοῦ ΜΗ²· ὥστε θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΘΔ μικροτέρα τῆς εὐθείας ΘΗ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΔ μικροτέρα τῆς εὐθείας ΗΚ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΕΖ, ὥστε ὁ λόγος ΑΒ : ΓΔ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου

ΕΖ : ΗΚ. Εἶναι δὲ ἡ διάμετρος ΕΖ συζυγὴς τῆς διαμέτρου ΗΚ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἡ διάμετρος ΟΠ εἶναι συζυγὴς πρὸς τὴν διάμετρον ΝΞ, ἡ ὁποία εἶναι [παράλληλος] πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς εἰς τὸ σημεῖον Ν· ἡ διάμετρος λοιπὸν ΟΠ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα ΑΒ, ἢ ἡ διάμετρος ΚΗ.

Εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΛ x ΛΒ : ΑΧ x ΧΒ $=$ ΑΕ^2 : ΝΧ^2, τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΑΧ x ΧΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΛ x ΛΒ (1, 21)· εἶναι ἄρα τὸ ΝΧ^2 μεγαλύτερον τοῦ ΕΛ^2, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΧ x ΧΒ ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΛ x ΛΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ΝΧ^2 ἀπὸ τοῦ ΕΛ^2.



Εἶναι ἐπίσης φανερόν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΧ x ΧΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΝΧ^2. Ἡ ὑπεροχὴ ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου ΑΧ x ΧΒ ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΛ x ΛΒ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ΘΛ^2 ἀπὸ τοῦ ΘΧ^2· ἡ ὑπεροχὴ λοιπὸν τοῦ ΘΛ^2 ἀπὸ τοῦ ΘΧ^2 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ΝΧ^2 ἀπὸ τοῦ ΕΛ^2· ὥστε εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, ΘΛ^2 $+$ ΛΕ^2, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων, ΘΧ^2 $+$ ΧΝ^2, καὶ ἄρα ἡ εὐθεῖα ΘΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΘΝ, καὶ ἡ διάμετρος ΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ΝΞ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, τὸ ὀρθογώνιον ΓΡ x ΡΔ : ΓΜ x ΜΔ $=$

$ΟΡ^2 : ΗΜ^2$, τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΓΡ x ΡΔ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου [$ΟΡ^2$ (1, 21), καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΓΜ x ΜΔ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου] $ΗΜ^2$· εἶναι ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ὀρθογωνίου ΓΡ x ΡΔ ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΓΜ x ΜΔ μικροτέρα τῆς ὑπεροχῆς τοῦ τετραγώνου τῆς ΟΡ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΜ. Ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ὀρθογωνίου ΓΡ x ΡΔ ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΓΜ x ΜΔ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ $ΘΜ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΘΡ^2$· ἡ ὑπεροχὴ λοιπὸν τοῦ $ΘΜ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΘΡ^2$ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑπεροχῆς τοῦ $ΟΡ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΗΜ^2$, καὶ ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων $ΘΜ^2 + ΜΗ^2$ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων $ΘΡ^2+ΡΟ^2$. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΘΗ εἶναι μικροτέρα τῆς ΘΟ, καὶ ἡ διάμετρος ΗΚ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου ΟΠ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ διάμετρος ΕΖ, ἡ ὁποία εἶναι συζυγὴς πρὸς τὴν διάμετρον ΗΚ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ΞΝ, ἡ ὁποία εἶναι συζυγὴς πρὸς τὴν διάμετρον ΟΠ, καὶ ἡ διάμετρος ΗΚ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου ΟΠ, ὁ λόγος τῆς διαμέτρου ΕΖ πρὸς τὴν συζυγῆ της ΗΚ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΞΝ πρὸς τὴν συζυγῆ της ΟΠ.

⟨ Π ό ρ ι σ μ α ⟩

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἄξονος ΑΒ ἀπὸ τοῦ ἄξονος ΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπεροχῆς τῆς διαμέτρου ΕΖ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ΗΚ, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῆς διαμέτρου ΕΖ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ΗΚ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπεροχῆς τῆς διαμέτρου ΞΝ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ΟΠ. Θὰ εἶναι δὲ καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΑΒ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΓΔ μεγαλυτέρα τῆς ὑπεροχῆς τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΕΖ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΗΚ, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπεροχῆς τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΞΝ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΟΠ.

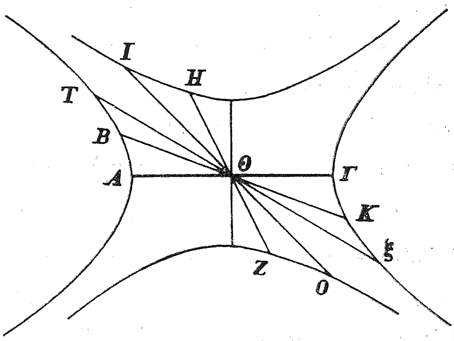
⟨Πόρισμα⟩

Λέγω ἀκόμη, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία καθορίζει τὸ σχῆμα τῆς τομῆς (ἡ παράμετρος) μετὰ τῆς διαμέτρου ΑΒ, εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία καθορίζει τὸ σχῆμα τῆς τομῆς μετὰ τῆς διαμέτρου ΕΖ (δηλ. ἡ ἀντίστοιχος εἰς τὴν ΕΖ παράμετρος)· καί, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία καθορίζει τὸ σχῆμα τῆς τομῆς (δηλ. ἡ ἀντίστοιχος παράμετρος) μετὰ τῆς διαμέτρου ΕΖ, εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία καθορίζει τὸ σχῆμα τῆς τομῆς μετὰ τῆς διαμέτρου ΞΝ, καὶ ἀκόμη, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία καθορίζει τὸ σχῆμα τῆς τομῆς (ἡ ἀντίστοιχος παράμετρος) μετὰ τῆς διαμέτρου ΞΝ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, ἡ ὁποία καθορίζει τὸ σχῆμα τῆς τομῆς (ἡ ἀντίστοιχος παράμετρος) μετὰ τοῦ μικροῦ ἄξονος.

Διότι ὁ ἄξων ΑΒ εἶναι μεγαλύτερος τῆς διαμέτρου ΟΠ, ἡ διάμετρος ΟΠ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ΗΚ, καὶ ἡ διάμετρος ΗΚ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἄξονος ΓΔ, ἡ δὲ διάμετρος ΞΝ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου ΕΖ, καὶ ἡ διάμετρος ΕΖ εἶναι μικροτέρα τοῦ μικροῦ ἄξονος ΑΒ. Ἀλλὰ κατὰ τὸ δέκατον πέμπτον θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου, τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΒ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸν ἄξονα ΓΔ καὶ τὴν εὐθεῖαν (δηλ. παράμετρον) τὴν καθορίζουσαν τὸ σχῆμα τῆς τομῆς μετὰ τοῦ ἄξονος ΓΔ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΟΠ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σχῆμα τῆς τομῆς τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΞΝ, [τὸ δὲ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΗΚ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σχῆμα τῆς τομῆς] τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΕΖ, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΒ. Ἐδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

25

Εἰς ὑπερβολὴν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀξόνων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος δύο οἱωνδήποτε συζυγῶν διαμέτρων, καὶ πᾶσα πλαγία διάμετρος, πλησιεστέρα πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα τῆς τομῆς, αὐξηθεῖσα κατὰ τὴν συζυγῆ της διάμετρον, εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας διαμέτρου, εὑρισκομένης μακρύτερον τοῦ ἄξονος τούτου καὶ αὐξηθείσης κατὰ τὴν συζυγῆ της διάμετρον.



Ἔστω ΑΓ ὁ πλάγιος ἄξων ὑπερβολῆς, κέντρον αὐτῆς τὸ σημεῖον Θ καὶ ἄλλαι συζυγεῖς διάμετροι, αἱ ΒΚ, ΗΖ καὶ Τξ, ΙΟ· ὁ ἄξων ΑΓ θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὀρθὸν ἄξονα ἢ ὄχι. Ἐὰν θὰ εἶναι ἴσος, αἱ διάμετροι ΚΒ, ΗΖ θὰ εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ διάμετροι Τξ, ΙΟ θὰ εἶναι ἴσαι (θ. 23). Ἀλλὰ ἡ διάμετρος ΚΒ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἄξονος ΓΑ, καὶ ἡ διάμετρος Τξ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ΚΒ· εἶναι λοιπὸν φανερὸν τὸ προτεθέν.

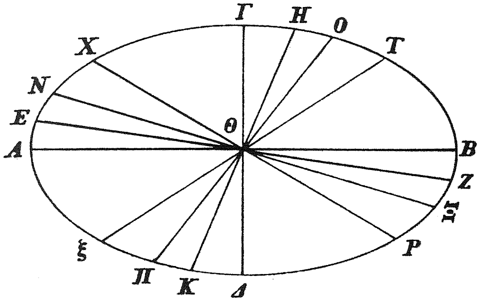
Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων ΑΓ δὲν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἄλλον ἄξονα τῆς τομῆς, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ ἄλλου ἄξονος τῆς τομῆς θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν συζυγῶν διαμέτρων ΚΒ, ΖΗ, κατὰ τὸ δέκατον τρίτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου· ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ἡ ἴση πρὸς τοὺς δύο ἄξονας θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας τῆς ἴσης πρὸς τὰς δύο διαμέτρους ΚΒ, ΖΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν διαμέτρων ΒΚ, ΖΗ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν διαμέτρων Τξ, ΙΟ, ἡ εὐθεῖα, ἡ ἴση πρὸς τὰς δύο διαμέτρους ΒΚ, ΖΗ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας τῆς ἴσης πρὸς τὰς δύο διαμέτρους Τξ, ΙΟ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26

Εἰς ἔλλειψιν, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀξόνων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἄλλων συζυγῶν διαμέτρων οἱωνδήποτε τῆς τομῆς, καὶ τὸ ἄθροισμα δύο συζυγῶν διαμέτρων, εὑρισκομένων πλησιέστερον πρὸς τοὺς ἄξονας, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν συζυγῶν διαμέτρων, τῶν μακρύτερον τῶν ἀξόνων εὑρισκομένων, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν συζυγῶν διαμέτρων, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος οἱωνδήποτε ἄλλων συζυγῶν διαμέτρων.

Ἔστω ΑΒ ὁ μέγας ἄξων ἐλλείψεως, καὶ ΓΔ ὁ μικρός, συζυγεῖς δὲ διάμετροι αἱ ΖΕ, ΚΗ, καὶ ΝΞ, ΟΠ, καὶ Τξ, ΧΡ, καὶ ἔστω ἡ διάμετρος ΕΖ μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ΚΗ, ἡ διάμετρος ΝΞ μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ΟΡ, καὶ ἡ διάμετρος ΧΡ ἴση πρὸς τὴν διάμετρον Τξ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἴση πρὸς τοὺς δύο ἄξονας ΑΒ, ΓΔ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας τῆς ἴσης πρὸς τὰς δύο διαμέτρους ΕΖ, ΖΚ, ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας τῆς ἴσης πρὸς τὰς δύο διαμέτρους ΝΞ, ΟΠ, ἡ δὲ εὐθεῖα ἡ ἴση πρὸς τὰς δύο ἴσας διαμέτρους ΧΡ, Τξ εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων.

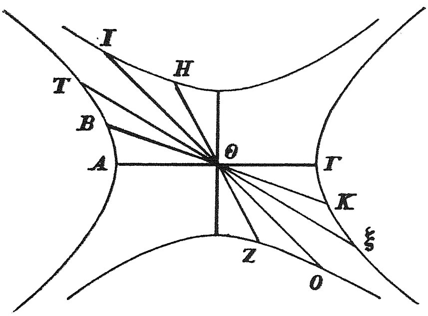
Διότι, ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ ἄξονος ΑΒ πρὸς τὸν ἄξονα ΓΔ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΕΖ πρὸς τὴν διάμετρον ΚΗ (θ. 24), ὁ λόγος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων ΑΒ, ΓΔ, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας τῆς ἀποτελουμένης ὑπὸ τῶν δύο ἀξόνων ΑΒ, ΓΔ, θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαμέτρων ΕΖ, ΚΗ, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαμέτρων ΕΖ, ΚΗ (θ. 12). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαμέτρων ΕΖ, ΚΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων ΑΒ, ΓΔ· τὸ τετράγωνον λοιπὸν τῆς εὐθείας τῆς ἀποτελουμένης ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀξόνων ΑΒ, ΓΔ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας τῆς ἀποτελουμένης ἐκ τῶν διαμέτρων ΖΕ, ΚΗ. Τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν ἀξόνων ΑΒ, ΓΔ εἶναι μικρότερον τῆς εὐθείας τῆς ἴσης πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέτρων ΕΖ, ΚΗ, Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέτρων ΕΖ, ΚΗ εἶναι μικρότερον [τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαμέτρων ΝΞ, ΟΠ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέτρων ΝΞ, ΟΠ] εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἴσων συζυγῶν διαμέτρων ΧΡ, Τξ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



27

Εἰς πᾶσαν ἔλλειψιν, ἢ ὑπερβολὴν τῆς ὁποίας οἱ ἄξονες εἶναι ἄνισοι, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγάλου ἄξονος ἀπὸ τοῦ μικροῦ ἄξονος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπεροχῆς ἄλλης τινὸς διαμέτρου ἀπὸ τῆς συζυγοῦς αὐτῆς, καὶ ἡ ὑπεροχὴ διαμέτρου τινὸς πλησιεστέρας πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπεροχῆς διαμέτρου τινὸς μακρύτερον τοῦ ἄξονος τούτου εὑρισκομένης, ἀπὸ τῆς συζυγοῦς αὐτῆς διαμέτρου.

Τὸ θεώρημα εἶναι φανερὸν εἰς τὴν ἔλλειψιν, κατὰ τὸ εἰκοστὸν τέταρτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου, ἡ δὲ ἀπόδειξις τούτου εἰς τὴν ὑπερβολὴν ἔχει ὡς ἑξῆς· ἔστω ΑΓ ὁ ἄξων ὑπερβολῆς, συζυγεῖς δὲ διάμετροι αἱ ΚΒ, ΖΗ, καὶ ξΤ, ΙΟ. Λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ ἄλλου ἄξονος τῆς τομῆς, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν διαμέτρων ΚΒ, ΖΗ, καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν διαμέτρων ΚΒ, ΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν διαμέτρων ξΤ, ΙΟ.



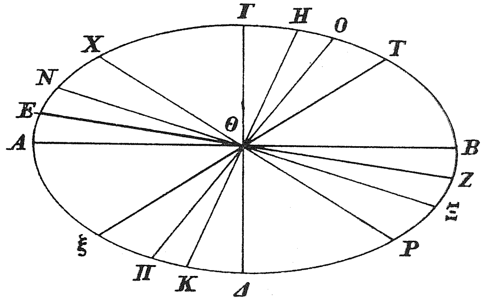
Διότι, ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄλλου ἄξονος τῆς τομῆς εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν διαμέτρων ΚΒ, ΖΗ (θ. 13), καὶ ἡ διάμετρος ΚΒ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἄξονος, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ συζυγοῦς πρὸς αὐτόν, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν διαμέτρων ΚΒ, ΖΗ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν διαμέτρων ΚΒ, ΖΗ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν διαμέτρων ξΤ, ΙΟ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28

Εἰς πᾶσαν ὑπερβολὴν ἢ ἔλλειψιν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τοὺς ἄξονας εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς δύο ἄλλας τυχούσας συζυγεῖς διαμέτρους, καὶ τὰ ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα πλευρὰς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους τὰς πλησιεστέρας πρὸς τοὺς ἄξονας εἶναι μικρότερα τῶν ἐχόντων πλευρὰς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους τὰς μακρυτέρας ἀπὸ τῶν ἀξόνων.

Τοῦτο εἶναι φανερὸν εἰς τὴν ὑπερβολήν, κατὰ τὸ προηγούμενον, διότι ἑκάτερος τῶν ἀξόνων εἶναι μικρότερος πάσης ἄλλης προσκειμένης διαμέτρου, εἰς δὲ τὴν ἔλλειψιν τοῦτο δεικνύεται ὡς ἑξῆς· ἔστω ΑΒ ὁ μέγας ἄξων καὶ ΓΔ ὁ μικρὸς ἄξων τῆς τομῆς, διάμετροι δὲ συζυγεῖς τῆς τομῆς αἱ ΕΖ, ΚΗ, καὶ ΝΞ, ΟΠ, καὶ ΧΡ, Τξ. Λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τοὺς ἄξονας ΑΒ, ΓΔ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς διαμέτρους ΕΖ, ΚΗ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς διαμέτρους ΞΝ, ΟΠ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς διαμέτρους ΧΡ, Τξ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀξόνων ΑΒ, ΓΔ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν συζυγῶν διαμέτρων ΕΖ, ΚΗ (θ. 26), τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀξόνων ΑΒ, ΓΔ θὰ εἶναι ἐπίσης μικρότερον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαμέτρων ΕΖ, ΚΗ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαμέτρων ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαμέτρων ΕΖ, ΚΗ (θ. 12), καὶ ἂν ἀφαιρέσωμεν τὰ τελευταῖα ταῦτα ἀθροίσματα, ἀπὸ τῶν πρώτων ἀντιστοίχως, τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τῶν ἀξόνων, ΑΒ x ΓΔ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ διπλασίου ὀρθογ. τῶν διαμέτρων ΕΖ x ΗΚ· ὥστε τὸ ὀρθογ. τὸ ἔχον πλευρὰς τοὺς ἄξονας, τὸ ΑΒ xΓΔ, εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς



τὰς διαμέτρους, τοῦ ΕΖ x ΚΗ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τῶν διαμέτρων, τὸ ΕΖ x ΚΗ, εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΝΞ x ΟΠ, καὶ ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τῶν διαμέτρων, τὸ ΝΞ x ΟΠ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου τῶν διαμέτρων, τοῦ ΧΡ x Τξ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29

Εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου τινός, καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ταύτης εἶναι πάντοτε ἡ αὐτὴ (δηλ. σταθερά. Σχῆμα τῆς τομῆς = ὀρθογώνιον τὸ ἔχον βάσιν τὴν ὑπ' ὄψει διάμετρον καὶ ὕψος τὴν παράμετρον τῆς διαμέτρου αὐτῆς).

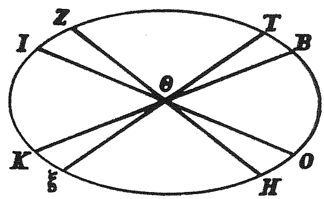
Ἔστω ΑΓ ὁ ἄξων ὑπερβολῆς (σχ. θ. 27), κέντρον τὸ Θ καὶ συζυγεῖς διάμετροι αἱ ΒΚ, ΖΗ, καὶ ξΤ, ΙΟ. Λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΚ, καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΒΚ, καὶ ὅτι ἡ αὐτὴ διαφορὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ξΤ καὶ τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ξΤ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄλλου ἄξονος τῆς τομῆς εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν διαμέτρων ΚΒ καὶ ΖΗ, καὶ ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν διαμέτρων ξΤ καὶ ΟΙ, τὸ δὲ σχῆμα τῆς τομῆς, τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου ἄξονος, καὶ τὸ σχῆμα τῆς τομῆς, τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΖΗ (1, 16), καὶ τὸ σχῆμα τῆς τομῆς, τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ξΤ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΟΙ, εἶναι ἄρα ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ, καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ, ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΚ, καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΒΚ, καὶ ἡ αὐτὴ διαφορὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ξΤ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ξΤ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30

Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν προστεθῇ εἰς τὸ σχῆμα τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ διαμέτρου τινὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου αὐτῆς, τὸ ἄθροισμα εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ (σταθερὸν) (σχῆμα = ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν τὴν ὑπ' ὄψει διάμετρον καὶ ὕψος τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον).

Ἔστω Θ τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως καὶ διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΒΚ, ΖΗ, καὶ ξΤ, ΟΙ. Λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα τῆς τομῆς, τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΚ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΒΚ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σχῆμα τῆς τομῆς, τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ξΤ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ξΤ.



Διότι, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΒΚ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΖΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ξΤ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΟΙ (θ. 12), καὶ τὸ σχῆμα τῆς τομῆς (ἔννοια τοῦ σχήματος, ὡς ἀνωτέρω) τὸ κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΚ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΖΗ, καὶ ὁμοίως τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΟΙ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σχῆμα τῆς τομῆς, τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ξΤ (1, 15), εἶναι ἄρα τὸ σχῆμα τῆς τομῆς, τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΚ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΒΚ, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σχῆμα τῆς τομῆς, τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ξΤ, αὐξηθὲ κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ξΤ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

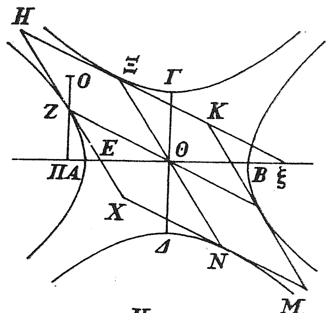
31

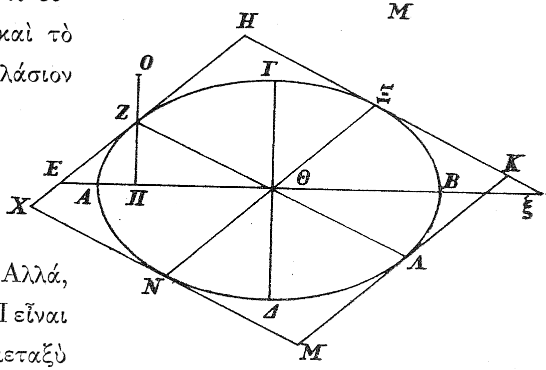
Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν ἀχθῶσι συζυγεῖς διάμετροι, ἢ εἰς τὰς ἀντικειμένας συζυγεῖς (εἰς δύο κλάδους ὑπερβολῆς συζυγεῖς), τὸ παραλληλόγραμμον τῶν διαμέτρων τούτων, ὅταν αἱ γωνίαι των εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς σχηματιζομένας εἰς τὸ κέντρον ὑπὸ τῶν συζυγῶν διαμέτρων, θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τοὺς ἄξονας.

Ἔστω Θ τὸ κέντρον ἐλλείψεως ἢ ἀντικειμένων συζυγῶν ὑπερβολῆς, ΑΒ, ΓΔ οἱ ἄξονες, καὶ ΖΛ, ΞΝ συζυγεῖς διάμετροι τυχοῦσαι, καὶ διὰ τῶν σημείων Ζ, Λ, Ξ, Ν ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι ΗΧ, ΚΜ, ΗΚ, ΧΜ. Θὰ εἶναι λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ΗΧ, ΚΜ παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον ΞΝ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΗΚ, ΧΜ θὰ εἶναι ὁμοίως παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον ΖΛ (θ. 2,6 διὰ τὴν ἔλλειψιν, καὶ 2,20 διὰ τὴν ὑπερβολήν). Τὸ ΗΜ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τὰς σχηματιζομένας εἰς τὸ κέντρον Θ ὑπὸ τῶν συζυγῶν διαμέτρων ΖΛ, ΞΝ. Λέγω, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΗΜ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀξόνων, τὸ ΑΒ x ΓΔ.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἡ εὐθεῖα ΖΠ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΘΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΠΟ μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν ΕΠ, ΠΘ. Θὰ εἶναι ἄρα $Α Θ^2 : Θ Γ^2$ = ὀρθογώνιον ΘΠ x ΠΕ : $ΖΠ^2$ (1, 37). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΘΠ x ΠΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον ΟΠ· εἶναι λοιπὸν $ΑΘ^2 : ΘΓ^2 = ΟΠ^2 : ΖΠ^2$· ὥστε εἶναι ΑΘ : ΘΓ = ΠΟ : ΖΠ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΑΘ : ΘΓ = $ΑΘ^2$: ΑΘ x ΘΓ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΠ : ΠΖ = ΟΠ x ΘΕ : ΠΖ x ΘΕ· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΘ^2$: ΑΘ x ΘΓ = ΟΠ x ΘΕ : ΠΖ x ΘΕ, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16) θὰ εἶναι $ΑΘ^2$: ΟΠ x ΘΕ = ΑΘ x ΘΓ : ΖΠ x ΘΕ. Ἀλλὰ τὸ $ΑΘ^2$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΕΘ x ΘΠ (1, 37)· εἶναι λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΕΘ x ΘΠ : ΟΠ x ΘΕ = ΑΘ x ΘΓ : ΖΠ x ΘΕ. Εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα

ΘΕ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΖΕ· ὥστε τὸ $ZE^2 : \Theta\Xi^2 =$ ΕΠ : ΠΘ. Καὶ τὸ τρίγωνον ΘΖΕ : τρίγωνον ΘΞξ $= ZE^2 : \Theta\Xi^2$, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΘΖΕ : τρίγωνον ΘΞξ, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ἄλλου, = ΕΠ : ΠΘ. Εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΞΟΖΗ μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ διπλασίου τοῦ τριγώνου ΘΖΕ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ τριγώνου ΞΘξ· διότι τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΘΖΕ : ἐπίπεδον ΘΗ = εὐθεῖα ΕΖ : ΖΗ, τουτέστι εὐθεῖα, ΕΘ : Θξ, καὶ τὸ ἐπίπεδον ΘΗ : διπλάσιον τριγώνου ΞΘξ = εὐθεῖα ΗΞ = εὐθεῖα Ξξ, τουτέστιν, ὡς εὐθεῖα ΘΕ : εὐθεῖα Θξ. Ἀλλά, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΟΠ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ





τῶν εὐθειῶν ΕΠ καὶ ΠΘ, θὰ εἶναι 2 τρίγωνον ΘΖΕ : παραλληλόγραμμον ΗΘ = εὐθεῖα ΟΠ : εὐθεῖα ΠΘ. Ἀλλὰ ΟΠ : ΠΘ = ΟΠ x ΘΕ : ΠΘ x ΘΕ, καὶ ἐδείχθη ἤδη, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΟΠ x ΘΕ : ὀρθογώνιον ΠΘ x ΘΕ = ὀρθογώνιον ΠΖ x ΘΕ : ὀρθογώνιον ΑΘ x ΘΓ· εἶναι ἄρα 2 τρίγωνον ΘΖΕ [: παραλληλόγραμμον ΘΗ] = ὀρθογώνιον ΖΠ x ΘΕ : ὀρθογώνιον ΑΘ x ΘΓ. Ἀλλὰ τὸ 2 τρίγωνον ΘΖΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΖΠ x ΘΕ· τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ΘΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΘ x ΘΓ, καὶ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐπιπέδου (σχήματος) ΘΗ, τουτέστι τὸ παραλληλόγραμμον ΗΜ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΘ x ΘΓ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀξόνων, τὸ ΑΒ x ΓΔ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐδείχθη λοιπὸν εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα

ὅτι εἰς πᾶσαν ὑπερβολὴν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν ἄλλων συζυγῶν διαμέτρων·

ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν συζυγῶν διαμέτρων, τῶν πλησιεστέρων πρὸς τοὺς ἄξονας, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῶν μακρύτερον ἀπεχόντων ἀπὸ τοὺς ἄξονας·

ὅτι εἰς πᾶσαν ἔλλειψιν ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων οἱωνδήποτε συζυγῶν διαμέτρων·

ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῶν πλησιεστέρων πρὸς τοὺς ἄξονας εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν συζυγῶν διαμέτρων, τῶν μακρύτερον ἀπεχόντων ἀπὸ τοὺς ἄξονας·

ὅτι εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἐὰν ὁ ἄξων ᾖ ἡ πλαγία πλευρὰ (διάμετρος) τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου παραμέτρου, ἡ πλαγία πλευρὰ (διάμετρος) τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ οἱασδήποτε ἄλλης διαμέτρου, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου παραμέτρου εἰς τὴν διάμετρον αὐτήν·

ὅτι ὁ λόγος τοῦ πλαγίου ἄξονος πρὸς τὴν παράμετρον, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτόν, θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου πάσης ἄλλης πλαγίας διαμέτρου πρὸς τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον·

ὅτι εἰς τὰ σχήματα τὰ κατεσκευασμένα εἰς τὰς πλησιεστέρας πρὸς τὸν ἄξονα διαμέτρους, ὁ τελευταῖος οὗτος λόγος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῶν σχημάτων τῶν κατεσκευασμένων εἰς τὰς μακρύτερον εὑρισκομένας διαμέτρους.

Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων, ἢ ἡ πλαγία πλευρὰ (διάμετρος) τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, εἶναι μικρότερος τῆς ἀντιστοίχου παραμέτρου, αἱ ἄλλαι πλάγιαι διάμετροι θὰ εἶναι μικρότεραι τῶν ἀντιστοίχων παραμέτρων.

Καὶ ὁ λόγος τοῦ πλαγίου ἄξονος πρὸς τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου πάσης ἄλλης πλαγίας διαμέτρου πρὸς τὴν παράμετρον τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου, καὶ ὅτι εἰς τὰ σχήματα τὰ κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν πλαγίων διαμέτρων τῶν πλησιεστέρων πρὸς τὸν ἄξονα, ὁ λόγος οὗτος θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς πλαγίας διαμέτρου πρὸς τὴν παράμετρον τῶν σχημάτων τῶν κατεσκευασμένων ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν εὑρισκομένων μακρύτερον τοῦ ἄξονος.

Καὶ ἐὰν τὸ σχῆμα τῆς τομῆς τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τοῦ ἄξονος εἶναι ἰσοσκελές, τὰ ἄλλα σχήματα τὰ κατεσκευασμένα ἐπὶ τῶν ἄλλων διαμέτρων θὰ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελῆ.

Ἐδείχθη ἐπίσης, ὅτι εἰς πᾶσαν ἔλλειψιν, ἡ πλαγία πλευρὰ (διάμετρος) τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ οἱασδήποτε διαμέτρου κειμένης μεταξὺ τοῦ μεγάλου ἄξονος καὶ τῶν ἴσων συζυγῶν διαμέτρων, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου τῆς αὐτῆς διαμέτρου, καὶ ὅτι ὁ λόγος τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον εἶναι μεγαλύτερος διὰ τὰς διαμέτρους τὰς κειμένας πλησιέστερον τοῦ μεγάλου ἄξονος, παρὰ διὰ τὰς κειμένας μακρύτερον,

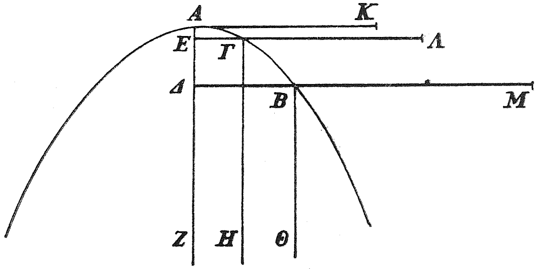
καὶ τοὐναντίον, ἡ πλαγία πλευρὰ (διάμετρος) τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ οἱασδήποτε διαμέτρου, κειμένης μεταξὺ τοῦ μικροῦ ἄξονος καὶ τῶν ἴσων συζυγῶν διαμέτρων, εἶναι μικροτέρα τῆς ἀντιστοίχου παραμέτρου, καὶ ὅτι αἱ διάμετροι αἱ πλησιέστεραι πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα μετὰ τῶν ἀντιστοίχων παραμέτρων, ἔχουσι λόγον μικρότερον τῶν λόγων τῶν διαμέτρων τῶν μακρύτερον εὑρισκομένων ἀπὸ τοῦ ἄξονος τούτου.

Ταῦτα εἶναι πορίσματα τῶν δειχθέντων εἰς τὰ θεωρήματα τὰ σχετικὰ πρὸς τὰς διαμέτρους καὶ τὰ σχήματα τῶν τομῶν.

32

Εἰς πᾶσαν παραβολήν, ἡ παράμετρος, τουτέστιν ἡ εὐθεῖα ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὁποίας κατασκευάζονται τὰ ὀρθογώνια τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν τῶν τεταγμένως κατηγμένων ἐπὶ τὸν ἄξονα, εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου πάσης ἄλλης διαμέτρου, καὶ αἱ διάμετροι τῆς τομῆς αἱ πλησιέστεραι πρὸς τὸν ἄξονα εἶναι μικρότεραι τῶν παραμέτρων, παρὰ αἱ διάμετροι αἱ εὑρισκόμεναι μακρύτερον τοῦ ἄξονος.

Ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΖ, καὶ ΒΘ, ΓΗ ἄλλαι διάμετροι, καὶ ΑΚ, ΓΛ, ΒΜ παράμετροι, τουτέστιν εὐθεῖαι ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων εἶναι κατεσκευασμένα τὰ ὀρθογώνια τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν τῶν τεταγμένως κατηγμένων ἐπὶ τῶν διαμέτρων τούτων. Λέγω,



ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΚ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΓΛ, καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΛ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΒΜ.

Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Β, Γ, αἱ εὐθεῖαι ΒΔ, ΓΕ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΓΛ ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΚ αὐξηθεῖσαν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας ΑΕ (θ. 5). Ὁμοίως, ἡ εὐθεῖα ΒΜ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΚ αὐξηθεῖσαν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας ΑΔ. Εἶναι ἄρα ἡ ΑΚ μικροτέρα τῆς ΓΛ, καὶ ἡ ΓΛ μικροτέρα τῆς ΒΜ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

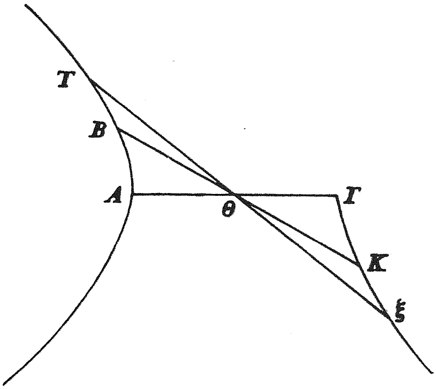
33

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἡ πλαγία πλευρὰ (διάμετρος) τοῦ σχήματος τῆς τομῆς τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ἀντιστοίχου παραμέτρου, ἡ παράμετρος αὕτη τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου παντὸς ἄλλου σχήματος κατεσκευασμένου ἐπὶ πάσης ἄλλης διαμέτρου τῆς τομῆς, καὶ ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου πλησιεστέρας πρὸς τὸν ἄξονα, θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου εὑρισκομένης μακρύτερον τοῦ ἄξονος.

Ἔστω ΑΓ ὁ ἄξων ὑπερβολῆς, τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι τὸ Θ καὶ ἄλλαι διάμετροι αἱ ΚΒ, Τξ. Λέγω, ὅτι ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΚ, καὶ ὅτι ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΚ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τῆς τομῆς τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου Τξ.

Ἂς ληφθῇ πρότερον ὁ ἄξων ΑΓ ἴσος πρὸς τὴν παράμετρον τοῦ σχήματος τῆς τομῆς τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ διάμετρος ΒΚ ἴση πρὸς τὴν παράμετρον τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ταύτης, κατὰ τὸ εἰκοστὸν τρίτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου καὶ τὸ δέκατον ἕκτον θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου. Ἀλλὰ ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι μικρότερος τῆς διαμέτρου ΒΚ· ἡ παράμετρος λοιπὸν τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΒΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ διάμετρος Τξ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ταύτης, καὶ ἡ διάμετρος ΚΒ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου ξΤ, ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ΚΒ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀντιστοίχου παραμέτρου τῆς διαμέτρου ξΤ.

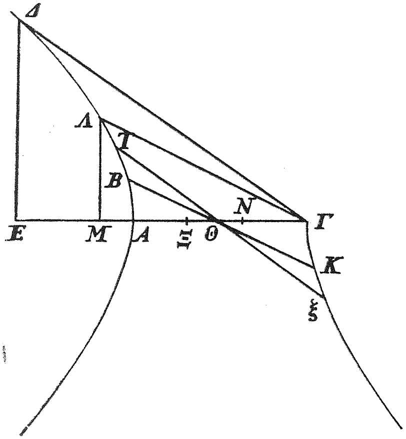
Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι μεγαλύτερος τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου, ὁ λόγος τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου ΚΒ πρὸς τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτόν, ὁ λόγος τῆς διαμέτρου ΚΒ πρὸς τὴν παράμετρόν της θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου Τξ πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς παράμετρον. Ἀλλὰ ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι μικρότερος τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ ἡ διάμετρος ΚΒ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου Τξ· ἡ παράμετρος λοιπὸν τῆς διαμέτρου ΑΓ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ΚΒ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου Τξ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



34

Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι μικρότερος τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος, χωρὶς νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου ταύτης, λέγω, ὅτι ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος, εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ ὅτι ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου Τξ.

Ἂς γίνῃ εὐθεῖα ΓΝ : εὐθεῖα ΝΑ = εὐθεῖα ΑΞ : εὐθεῖα ΞΓ = ἄξων ΑΓ : παράμετρος τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἡ εὐθεῖα ΓΛ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΚΒ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ξΤ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Δ, Λ αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΛΜ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΓΝ : ΝΑ = ΑΞ : ΞΓ = ἄξων ΑΓ : παράμετρος τοῦ σχήματος, θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΝ ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΞ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΞ, θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΝ, καὶ ἄρα θὰ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ



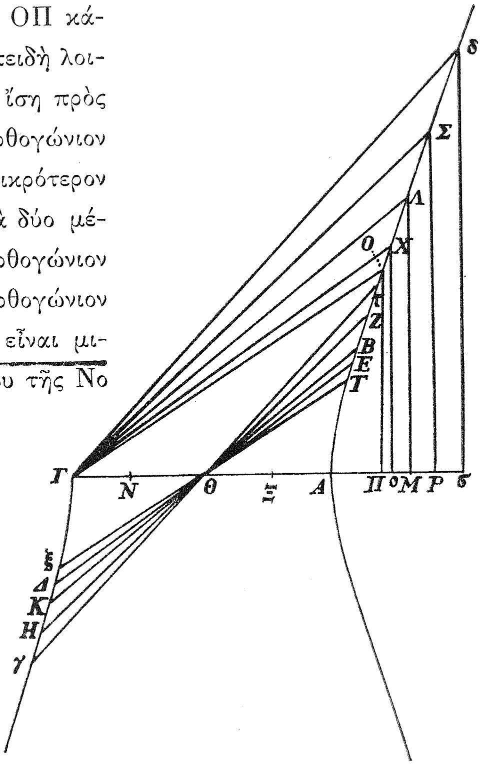
τετράγωνον τῆς ἀντιστοίχου διαμέτρου, ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΑΞ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΝ. Ἀλλὰ ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι μικρότερος τῆς παραμέτρου του, χωρὶς νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου του· ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΑΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΑΞ, χωρὶς νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς εὐθείας ταύτης. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΝΑ, μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τῆς εὐθείας ΑΝ· τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν (ΜΝ + ΝΑ) x ΑΞ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΑΝ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα (ΜΝ + ΝΑ) x ΑΜ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον (ΜΝ + ΝΑ) x ΑΞ, τουτέστιν, ἡ εὐθεῖα ΑΜ : ΑΞ, εἰς λόγον μικρότερον τοῦ λόγου (ΜΝ + ΝΑ) x ΑΜ : ΑΝ², καὶ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΜΞ : ΞΑ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου [(ΜΝ + ΝΑ) x ΑΜ + ΑΝ²] : ΑΝ². Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΝΑ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΜ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΝ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΜΝ²· ὁ λόγος ἄρα τῆς εὐθείας ΜΞ : ΞΑ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΜΝ² : ΑΝ². Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΜΞ : ΞΑ = ΓΝ x ΜΞ : ΓΝ x ΑΞ, ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ : ὀρθογώνιον ΓΝ x ΑΞ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΜΝ² : ΑΝ², καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ : ΜΝ² θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΑΞ : ΑΝ². Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ : ΜΝ² = τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ : τετράγωνον τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΚΒ (θ. 15), τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΑΞ : ΑΝ² = τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ : τετράγωνον τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος. Εἶναι ἄρα ἡ παράμετρος τοῦ ἄξονος ΑΓ μικροτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΚΒ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΝ δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς εὐθείας ΑΞ, ἡ εὐθεῖα ΜΝ θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ διπλασίου τῆς εὐθείας ΜΞ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΕΝ, ΝΜ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τῆς εὐθείας ΜΝ· τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ΜΞ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΕΝ, ΝΜ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΜΝ^2. εἶναι λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΝΕ, ΜΝ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΕ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΝΕ, ΜΝ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΞ, μικρό] τερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου (ΝΕ + ΜΝ) x ΜΕ [: ΜΝ^2· ὥστε ὁ λόγος ΜΕ : ΜΞ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου (ΝΕ + ΜΝ) x ΜΕ πρὸς τὸ ΜΝ^2, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΕΞ : ΜΞ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου (ΕΝ + ΝΜ) x ΕΜ] + ΜΝ^2, [ὅπερ ἀποτελεῖ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΕΝ], πρὸς τὸ ΜΝ^2. Εἶναι ἄρα ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΕΞ : ΞΜ μικρότερος τοῦ λόγου ΕΝ^2 : ΜΝ^2. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΕΞ : ΞΜ = ΓΝ x ΞΕ : ΓΝ x ΜΞ· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΕ : ΓΝ x ΞΜ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΕΝ^2 : ΜΝ^2, καὶ ἐναλλάξ, (Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος ΓΝ x ΞΕ : ΕΝ^2 εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΜ : ΜΝ^2. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΕΝ, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς παραμέτρου, τῆς διαμέτρου ξΤ (θ. 15), καὶ ὁμοίως εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ : ΜΝ^2, ὡς αὐτὸ τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΒΚ· εἶναι ἄρα ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ξΤ, μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΒΚ· ὥστε ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ΒΚ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ξΤ, καὶ ἡ παράμετρος τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΚΒ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35

Ἐὰν ὁ ἄξων ὑπερβολῆς εἶναι μικρότερος τοῦ ἡμίσεος τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος, λέγω, ὅτι καὶ πρὸς τὸ ἓν καὶ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἄξονος δύναται νὰ εὑρεθῇ διάμετρος, τῆς ὁποίας ἡ παράμετρος εἶναι διπλασία τῆς διαμέτρου ταύτης, καὶ ὅτι ἡ παράμετρος αὕτη εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης παραμέτρου ἀντιστοιχούσης, εἰς οἱανδήποτε διάμετρον ἀγομένην πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τομῆς, καὶ ὅτι αἱ παράμετροι τῶν ἄλλων διαμέτρων τῶν πλησιεστέρων καὶ πρὸς τὸ ἓν μέρος καὶ πρὸς τὸ ἄλλο τῶν δύο προηγουμένων, εἶναι μικρότεραι τῶν παραμέτρων τῶν διαμέτρων, τῶν εὑρισκομένων μακρύτερον.

Ἂς διαιρεθῇ ὁ ἄξων ΑΓ κατὰ τὰ σημεῖα Ξ, Ν, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΞ νὰ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΞΓ, ὡς ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΝ νὰ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΝΑ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι μικρότερος τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, ἡ εὐθεῖα ΑΝ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς εὐθείας ΑΞ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΝΞ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΞΑ· ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΞΜ = ΞΝ, καὶ ἔστω ἡ ΛΜ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, συναντῶσα τὴν τομὴν εἰς τὸ σημεῖον Λ. Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΛ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΚΒ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΛ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΞΜ : εὐθεῖα ΜΝ = διάμετρος ΚΒ : παράμετρος τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ταύτης (θ. 6). Ἂς ἀχθῶσι μεταξὺ τῶν σημείων Α, Β αἱ διάμετροι ΔΕ, Τξ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἡ εὐθεῖα ΓΧ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΔΕ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΟ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον Τξ, καὶ αἱ εὐθεῖαι Χο, ΟΠ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΜΞ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΞΝ, τὸ ὀρθογώνιον ΜΞ x Ξο θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $ΞΝ^2$, καὶ ἂν εἰς τὰ δύο μέρη προσθέσωμεν τὸ ὀρθογώνιον (Νο + ΞΝ) x οΞ, τὸ ὀρθογώνιον (ΜΝ + Νο) x οΞ, θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τῆς Νο (Εὐκλ. 2, 6). Ὁ λόγος ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου (ΜΝ + Νο) x Μο : (ΜΝ + Νο) x Ξο θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου (ΜΝ + Νο) x Μο : $Νο^2$. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον(ΜΝ + Νο) x Μο : ὀρθογώνιον (ΜΝ+Νο) x Ξο = Μο : Ξο· ὁ λόγος λοιπὸν τῆς εὐθείας Μο : Ξο εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου (ΜΝ + Νο) x Μο : $Νο^2$, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος ΜΞ : Ξο θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου (ΜΝ + Νο) x Μο + $Νο^2$: $Νο^2$) (2, 6). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον (ΜΝ +



Νο) x Μο + Νο^2 εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΜΝ^2· ὁ λόγος λοιπὸν τῆς εὐθείας ΜΞ : Ξο εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΜΝ^2 : Νο^2. Εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα ΜΞ : Ξο = ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ : ὀρθογώνιον ΓΝ x Ξο· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ : ὀρθογώνιον ΓΝ x Ξο θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΜΝ^2 : Νο^2, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ : ΜΝ^2 θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x Ξο : Νο^2. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ : ΜΝ^2 = τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ : τετράγωνον τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΚΒ (θ. 15), καὶ ὁμοίως τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x Ξο : Νο^2 = τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ : παράμετρος τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΔΕ· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΔΕ· ὥστε ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΔΕ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ξΤ, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον οΞ x ΞΠ εἶναι μικρότερον τοῦ ΞΝ^2, καὶ ὁμοίως, ὅτι ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ξΤ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τοῦ ἄξονος ΑΓ, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΠΞ x ΞΑ εἶναι μικρότερον τοῦ ΞΝ^2.

Ἐὰν δὲ ἀχθῶσιν αἱ διάμετροι ΖΗ, τγ μακρύτερον τοῦ ἄξονος, παρὰ ἡ διάμετρος ΚΒ, λέγω ὅτι ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΖΗ, καὶ ὅτι ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ΖΗ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου τγ.

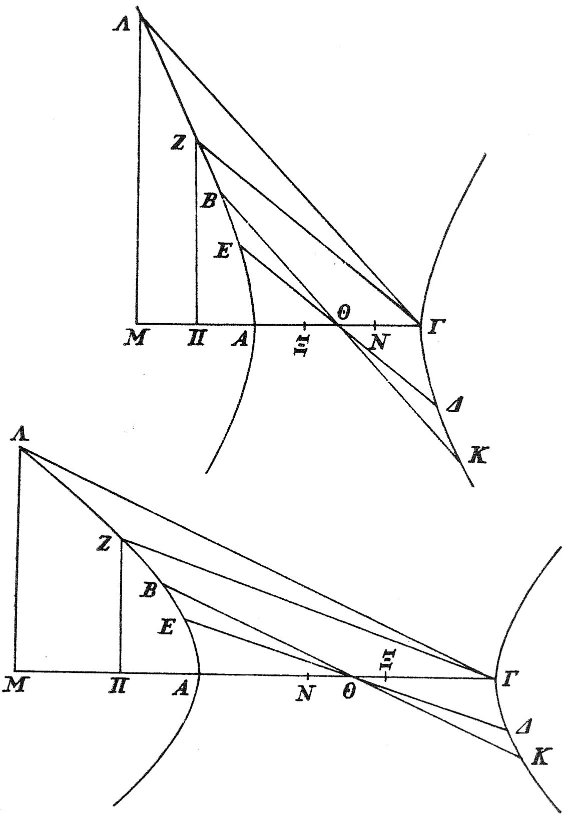
Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου Γ αἱ εὐθεῖαι ΓΣ, Γδ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ΖΗ, τγ καὶ ἐκ τῶν σημείων Σ, δ, αἱ εὐθεῖαι ΣΡ, δσ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Εἶναι λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΡΞ x ΞΜ μεγαλύτερον τοῦ $ΝΞ^2$, καὶ ἐνεργοῦντες ὡς ἐξετέθη προηγουμένως, ἀποδεικνύομεν ὅτι ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΡ : $ΝΡ^2$ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΜ : $ΝΜ^2$· εἶναι ἄρα φανερόν, ὅτι ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΚΒ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον σΞ x ΞΡ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $ΞΝ^2$, ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου τγ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΖΗ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36

Ἐὰν εἰς ὑπερβολήν, αἱ πλευραὶ τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος εἶναι ἄνισοι, ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ πάσης ἄλλης διαμέτρου, καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος εἶναι μεγαλυτέρα τῶν πλησιεστέρων διαμέτρων πρὸς τὸν ἄξονα, παρὰ ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μακρύτερον.

Ἔστω ΑΓ ὁ ἄξων ὑπερβολῆς, Θ τὸ κέντρον του, καὶ ΔΕ, ΒΚ ἄλλαι διάμετροι τυχοῦσαι. Λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΔΕ, καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΔΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΒΚ.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΓΖ, ΓΛ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ΔΕ, ΒΚ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Ζ, Λ αἱ εὐθεῖαι ΖΠ, ΛΜ

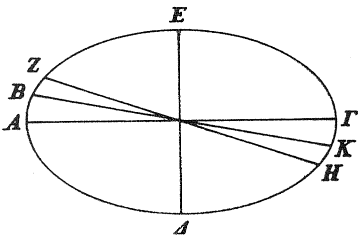


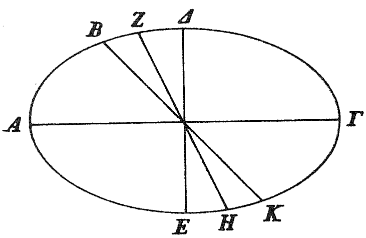
κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις ἡ ΓΝ : ΝΑ = ΑΞ : ΞΓ = πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὴν παράμετρον τοῦ σχήματος. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΑΞ : ΞΝ². 'Αλλὰ ἡ εὐθεῖα ΓΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΔΕ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΠ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΞΠ, ΠΝ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΔΕ καὶ τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΔΕ (θ. 16). 'Αλλὰ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΞΠ, ΠΝ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΞΝ· εἶναι λοιπὸν τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΔΕ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς, ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΠ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΞΝ. Εἶναι δὲ ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΠ : ΞΝ² μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΑΞ : ΞΝ²· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΔΕ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, καὶ ἄρα ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΔΕ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς, εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματός του. 'Ομοίως, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΛ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΚΒ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΛΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΜ θὰ εἶναι πρὸς [τὸ τετράγωνον] τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΜΞ, ΜΝ, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΒΚ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς, κατὰ τὸ δέκατον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου. Ἀλλὰ ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ πρὸς τὸ $ΞΝ^2$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΠ πρὸς τὸ αὐτὸ τετράγωνον, τὸ $ΞΝ^2$· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΚΒ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς [μεταξὺ] τῆς διαμέτρου ΔΕ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς. Ἡ διαφορὰ ἄρα μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΒΚ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37

Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν τὰ σχήματα τῆς τομῆς εἶναι κατεσκευασμένα ἐπὶ διαμέτρων μεγαλυτέρων τῶν ἀντιστοίχων εἰς αὐτὰς παραμέτρων, ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν τῶν σχημάτων τῶν κατεσκευασμένων ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἄξονος, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ πάσης ἄλλης διαμέτρου, ἐκ τῶν προηγουμένων, θὰ εἶναι δὲ ἡ διαφορὰ αὕτη μεγαλυτέρα διὰ τὰς διαμέτρους τὰς πλησιεστέρας πρὸς τὸν ἄξονα, παρὰ δι' ἐκείνας αἱ ὁποῖαι εἶναι μακρύτερον, ἐὰν δὲ αἱ διάμετροι εἶναι μικρότεραι τῶν παραμέτρων αὐτῶν, ἡ μεγαλυτέρα διαφορὰ τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος εἶναι ἡ μεταξὺ τοῦ μικροῦ ἄξονος καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι μεγαλυτέρα διὰ τὰς διαμέτρους τὰς πλησιεστέρας πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα, παρὰ διὰ τὰς μακρύτερον εὑρισκομένας, ἡ δὲ διαφορὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μικροῦ ἄξονος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μεγάλου ἄξονος.

Ἔστω ΑΓ ὁ μέγας ἄξων ἐλλείψεως, ΔΕ ὁ μικρὸς ἄξων, καὶ ἄλλαι διάμετροι αἱ ΚΒ, ΖΗ, ἀμφότεραι μεγαλύτεραι τῶν ἀντιστοίχων εἰς αὐτὰς παραμέτρων. Λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΒΚ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς, καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΒΚ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΖΗ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς.





Διότι, ἐπειδὴ ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι μεγαλύτερος τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, καὶ ἡ διάμετρος ΚΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου αὐτῆς, ἡ δὲ παράμετρος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ (θ. 24), καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΒΚ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΒΚ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΖΗ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς.

Ὁμοίως, ἐὰν αἱ δύο διάμετροι ΒΚ, ΖΗ εἶναι μικρότεραι τῶν παραμέτρων αὐτῶν, λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΔΕ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΖΗ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς, καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΖΗ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΒΚ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς.

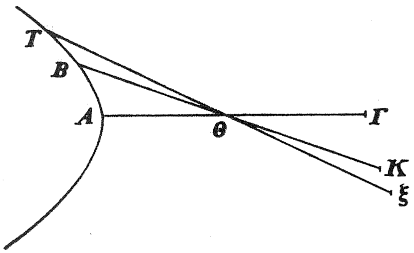
Διότι, ἐπειδὴ ὁ ἄξων ΔΕ εἶναι μικρότερος τῆς διαμέτρου ΖΗ, καὶ ἡ παράμετρος αὐτῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΖΗ, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΔΕ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΖΗ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς (θ. 24), καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΖΗ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΚΒ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος τοῦ μικροῦ ἄξονος ΔΕ εἶναι πρὸς τὸν ἄξονα ΔΕ, ὡς ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρον τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ (1, 15), καὶ ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΔΕ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἄξονος ΑΓ, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΔΕ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ θὰ εἶναι [μεγαλυτέρα] τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἡ πλαγία διάμετρος τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος δὲν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τούτου, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς τομῆς, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου τινός, ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, θὰ εἶναι μεγαλύτερον τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου πλησιεστέρας πρὸς τὸν ἄξονα, θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς μακρύτερον εὑρισκομένης διαμέτρου.

Ἔστω ΑΓ ὁ ἄξων ὑπερβολῆς, ὅστις δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς ἀντιστοίχου παραμέτρου, καὶ δύο ἄλλαι διάμετροι αἱ ΚΒ, ξΤ. Λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ.

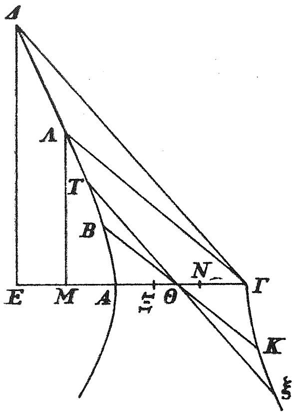


Ἔστω πρότερον, ὅτι ὁ ἄξων ΑΓ δὲν εἶναι μικρότερος τῆς παραμέτρου αὐτοῦ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ διάμετρος ΚΒ μεγαλυτέρα τοῦ ἄξονος ΑΓ, ἡ διάμετρος ξΤ μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ΚΒ, ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ξΤ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ΚΒ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου τοῦ ἄξονος ΑΓ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ διάμετρος ξΤ, αὐξηθεῖσα κατὰ τὴν παράμετρον αὐτῆς, μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ΚΒ αὐξηθείσης κατὰ τὴν παράμετρον αὐτῆς (θ. 33), καὶ ἡ διάμετρος ΚΒ, αὐξηθεῖσα κατὰ τὴν παράμετρον αὐτῆς, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἄξονος ΑΓ, αὐξηθέντος κατὰ τὴν παράμετρον αὐτοῦ. Τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι προσδιορίζουσι τὸ σχῆμα τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ξΤ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα τῶν πλευρῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39

Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι μικρότερος τῆς ἀντιστοίχου παραμέτρου, χωρὶς νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις ἡ ΓΝ : ΝΑ = ΑΞ : ΞΓ = ἄξων ΑΓ : παράμετρος αὐτοῦ. Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου Γ αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΛΓ ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους Τξ, ΚΒ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Δ, Λ αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΛΜ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΑΞ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΞΓ, καὶ ὁ ἄξων ΑΓ δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, ἡ εὐθεῖα ΑΞ δὲν θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς εὐθείας ΑΝ. Ὁμοίως, ἡ εὐθεῖα ΑΞ δὲν θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἑνὸς τετάρτου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΑΝ, ΑΞ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον (ΑΝ + ΑΞ) x 4ΑΞ, δὲν θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΑΝ, ΑΞ· ὥστε ὁ λόγος τοῦ τετραπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου (ΑΝ + ΑΞ) x ΑΜ : 4 (ΝΑ + ΑΞ) x ΑΞ δὲν θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου 4 (ΝΑ + ΑΞ) x ΑΜ : $(ΝΑ + ΑΞ)^2$, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος ΜΞ : ΞΑ δὲν θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου 4 (ΝΑ + ΑΞ) x ΑΜ, αὐξηθέντος κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΝΑ, ΑΞ, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΝΑ, ΑΞ. Ἀλλὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου (ΝΑ + ΑΞ) x ΑΜ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΝΑ, ΑΞ, εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΞΜ, ΜΝ· ὁ λόγος λοιπὸν τῆς εὐθείας ΜΞ : ΞΑ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΝΑ, ΑΞ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΜΞ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΞΑ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΑ· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΑ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν



εὐθειῶν ΝΑ, ΑΞ, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ, εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΑ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΝΑ, ΑΞ (θ. 17). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ, ΜΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῆς διαμέτρου ΚΒ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΑΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΝΑ, ΑΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ, καὶ ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ.

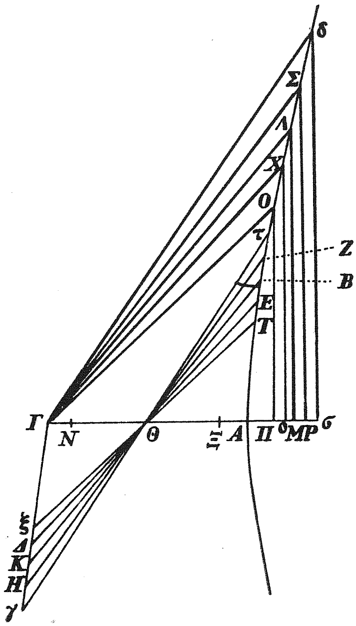
Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΜΞ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἑνὸς τετάρτου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ, τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΞ, θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ. Ἀποδεικνύεται δὲ κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα, ὅτι ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΕ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΝΕ, ΕΞ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΕ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΝΕ, ΕΞ, ὡς εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ (θ. 17), καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΒΚ· ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ. Τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ξΤ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ὁ πλάγιος ἄξων εἶναι μικρότερος τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, ὑπάρχει καὶ πρὸς τὸ ἓν μέρος καὶ πρὸς τὸ ἄλλο τοῦ ἄξονος μία μόνον διάμετρος, ἴση πρὸς τὸ ἓν τρίτον τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος πάσης ἄλλης διαμέτρου ἀγομένης πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου πλησιεστέρας καὶ πρὸς τὸ ἓν καὶ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς πρώτης αὐτῆς διαμέτρου εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου εὑρισκομένης μακρύτερον.

Ἂς ληφθῇ τὸ σχῆμα τοῦ τριακοστοῦ πέμπτου θεωρήματος, καὶ ἔστω τώρα ἡ εὐθεῖα ΑΞ μικροτέρα τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς εὐθείας ΑΝ· θὰ εἶναι ἄρα αὐτη (ἡ ΑΞ) μικροτέρα τῆς εὐθείας ΞΝ.

Ἄς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΜΞ = 1/2 ΞΝ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΛ, ἀφοῦ ἀχθῇ, ἡ ΜΛ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἡ διάμετρος ΚΒ τῆς τομῆς παράλληλος πρὸς τὴν ΓΛ. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΜΞ : ΜΝ = διάμετρος ΚΒ : παράμετρος αὐτῆς (θ. 6), καὶ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΜΞ τὸ ἓν τρίτον τῆς εὐθείας ΜΝ· εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ διάμετρος ΚΒ τὸ ἓν τρίτον τῆς παραμέτρου αὐτῆς. Ἄς ἀχθῶσι τυχοῦσαι διάμετροι αἱ ΔΕ, ξΤ μεταξὺ τῶν σημείων Α, Β, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΧ, ΓΟ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ταύτας, καὶ αἱ εὐθεῖαι Χο, ΟΠ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα.



Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΜΞ εἶναι τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ, καὶ τὸ τετράγωνον τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς (ΜΝ + Ξο) καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας ΜΞ, ἐὰν ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τὸ ὀρθογώνιον (ΜΝ + Ξο) x 4Μο, θὰ ἀπομείνῃ ἓν τετράγωνον ἐσχηματισμένον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν Νο, οΞ, μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΝΜ, Ξο καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας Ξο. Ὁ λόγος ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΜΝ, Ξο, καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας Μο, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΝΜ, Ξο, καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας Ξο, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου αὐτοῦ τούτου τοῦ ὀρθογωνίου, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν Νο, οΞ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΝΜ, Ξο καὶ τὸ τετράπλάσιον τῆς εὐθείας Μο, εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΝΜ, Ξο καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας Ξο, ὡς ἡ εὐθεῖα Μο εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν οΞ· ὁ λόγος λοιπὸν Μο : οΞ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΝΜ, Ξο, καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας Μο, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν Νο, οΞ. Καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος ΜΞ : Ξο θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΜΝ, Ξο, καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας Μο, αὐξηθέντος (τοῦ ὀρθογωνίου τούτου) κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν Νο, οΞ, πρὸς τὸ τετράγωνον αὐτοῦ τούτου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν Νο, οΞ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΜΝ, Ξο, καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας Μο, αὐξηθὲν (τὸ ὀρθογώνιον) κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν Νο, οΞ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΝΜ, ΜΞ· εἶναι ἄρα ὁ λόγος ΜΞ : Ξο μεγαλύτερος τοῦ λόγου $(\text{ΝΜ} + \text{ΜΞ})^2 : (\text{Νο} + \text{οΞ})^2$. Εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα ΜΞ : Ξο = ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ : ΓΝ x Ξο· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ : ΓΝ x Ξο εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $(\text{ΜΝ} + \text{ΜΞ})^2 : (\text{Νο} + \text{οΞ})^2$, καὶ ἐναλλάξ

(Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος ΓΝ x ΜΞ : (ΜΝ + ΜΞ)^2 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x Ξο : (Νο + οΞ)^2. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ (θ. 17), καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x Ξο εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν Νο, οΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΔΕ τῆς τομῆς (θ. 17)· ὁ λόγος ἄρα τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου του πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΔΕ. Εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΔΕ.

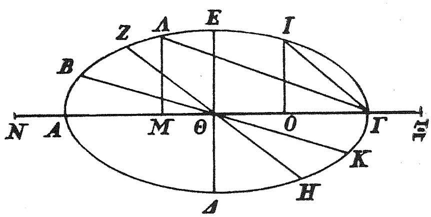
Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν Νο, οΞ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευράς, τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν Νο, ΞΠ, καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας ΞΠ, ἀποδεικνύεται, ὡς προηγουμένως, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΔΕ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ, καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευράς, τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΝΠ, ΞΑ, καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας ΑΞ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΝΠ, ΠΞ, εἶναι ἐξ αἰτίας μὴ ἀνομοιότητος, ἥτις θ' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ.

Ἂς ἀχθῶσι τώρα ἄλλαι διάμετροι αἱ ΖΗ, τγ, μακρύτερον ἀπὸ τὸν ἄξονα, παρὰ ἡ διάμετρος ΚΒ, καὶ ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΓΣ, Γδ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ταύτας, καὶ ἐκ τῶν σημείων Σ, δ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΣΡ, δσ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΡΝ, ΜΞ, καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας ΜΞ, μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ· ἐὰν δὲ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευράς, τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΡΝ, ΜΞ, καὶ τὸ τετράπλευρον τῆς εὐθείας ΡΜ, [τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΡΝ, ΜΞ, καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας ΡΞ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΝΡ, ΡΞ]· καὶ διὰ τοὺς αὐτούς, ὡς ἀνωτέρω λόγους, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΖΗ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΒΚ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου τγ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΖΗ, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν σΝ, ΡΞ, καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς εὐθείας ΡΞ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΡΝ, ΞΡ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

41

Εἰς πᾶσαν ἔλλειψιν τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μεγάλου ἄξονος εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος πάσης ἄλλης διαμέτρου, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου πλησιεστέρας πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου κειμένης μακρύτερον τοῦ ἄξονος τούτου, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μικροῦ ἄξονος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ πάσης ἄλλης διαμέτρου.

Ἔστω ΑΓ ὁ μέγας ἄξων ἐλλείψεως, ΔΕ ὁ μικρὸς ἄξων καὶ ἄλλαι διάμετροι αἱ ΚΒ, ΖΗ καὶ παράλληλοι πρὸς αὐτὰς αἱ εὐθεῖαι ΓΛ, ΓΙ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΛΜ, ΙΟ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις ΓΝ : ΝΑ, καὶ εὐθεῖά τις ΑΞ : ΞΓ, ὡς ὁ ἄξων ΑΓ πρὸς τὴν παράμετρον τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος τούτου.



Θὰ εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον εὐθείας ἴσης πρὸς τὸν ἄξονα ΑΓ, αὐξηθέντα κατὰ τὴν παράμετρόν του, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΝΓ, ἢ ὡς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΓ, ΑΞ, εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΝΞ. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΔΕ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΝΓ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΞ (1, 15), διότι ἔχει δειχθῆ, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΔΕ, ὡς εἶναι ὁ ἄξων ΑΓ πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΝΓ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΞ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΓΞ, εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΞ, καὶ ἀκόμη τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΔΕ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας τῆς ἴσης πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος ΔΕ σὺν τὴν παράμετρον αὐτοῦ, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΝΞ (1, 15)· καὶ ἕνεκα τῆς ταυτότητος, τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ἄξονος ΔΕ σὺν τὴν παράμετρον αὐτοῦ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΓΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΝΞ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΑΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΝΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ σὺν τὴν παράμετρον αὐτοῦ· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸν ἄξονα ΑΓ σὺν τὴν παράμετρον αὐτοῦ, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος ΔΕ σὺν τὴν παράμετρον τοῦ ἄξονος ΔΕ. Τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μεγάλου ἄξονος ΑΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μικροῦ ἄξονος ΔΕ.

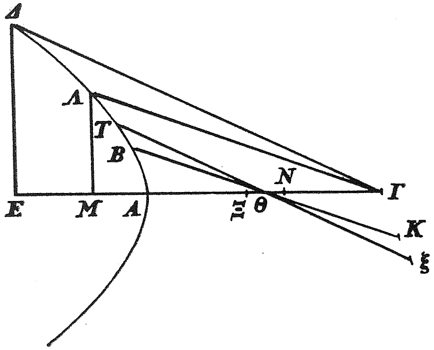
Εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{N\Gamma} \times \mathrm{M\Xi} : \mathrm{N\Xi}^2 =$ τετράγωνον ἄξονος ΑΓ : τετράγωνον, τοῦ ἀθροίσματος τῆς διαμέτρου ΚΒ σὺν τὴν παράμετρον αὐτῆς (θ. 17)· ὁ λόγος ἄρα τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος ΑΓ σὺν τὴν παράμετρον αὐτοῦ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος ΔΕ σὺν τὴν παράμετρον αὐτοῦ, καὶ ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{N\Gamma} \times \mathrm{M\Xi} : \mathrm{N\Xi}^2 =$ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ : τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῆς διαμέτρου ΚΒ σὺν τὴν παράμετρον αὐτῆς, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΞΟ : ΝΞ^2 = τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ : τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῆς διαμέτρου ΖΗ σὺν τὴν παράμετρον αὐτῆς (θ. 17), ὁ λόγος τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς διαμέτρου ΚΒ σὺν τὴν παράμετρον αὐτῆς, θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς διαμέτρου ΖΗ σὺν τὴν παράμετρον αὐτῆς· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΖΗ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΟ : ΝΞ^2 = τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῆς διαμέτρου ΖΗ σὺν τὴν παράμετρον αὐτῆς, καὶ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα πρότερον, τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΓΞ : ΝΞ^2 = τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ μικροῦ ἄξονος ΔΕ σὺν τὴν παράμετρον αὐτοῦ, ὁ λόγος τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς διαμέτρου ΖΗ σὺν τὴν παράμετρον αὐτῆς, θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος ΔΕ σὺν τὴν παράμετρον αὐτοῦ. Εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΖΗ μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΔΕ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42

Εἰς πᾶσαν ὑπερβολὴν τὸ σχῆμα τοῦ ἄξονος εἶναι μικρότερον τοῦ σχήματος πάσης ἄλλης διαμέτρου, καὶ τὰ σχήματα τῶν διαμέτρων τῶν πλησιεστέρων πρὸς τὸν ἄξονα εἶναι μικρότερα τῶν σχημάτων τῶν διαμέτρων τῶν μακρύτερον τοῦ ἄξονος.

Ἔστω ΑΓ ὁ ἄξων ὑπερβολῆς καὶ αἱ ΚΒ, ξΤ ἄλλαι διάμετροι τυχοῦσαι). Λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μικρότερον τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ πάσης ἄλλης διαμέτρου, καὶ ὅτι τὸ σχῆμα τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΓΛ, ΓΔ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ΚΒ, ξΤ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΛΜ, ΔΕ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις ἡ ΓΝ πρὸς εὐθεῖαν τὴν ΝΑ, ὡς ὁ ἄξων ΑΓ πρὸς τὴν παράμετρον τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΝ πρὸς τὴν ΝΑ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ σχῆμα τῆς τομῆς τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΓΝ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΝΜ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ σχῆμα τῆς διαμέτρου ΚΒ (θ. 18). Ἀλλὰ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΓΝ : ΝΑ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ταύτης ΓΝ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΝΜ· εἶναι ἄρα ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ σχῆμα τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ σχῆμα τὸ κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΚΒ· ὥστε τὸ σχῆμα τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μικρότερον τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ. Εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα ΓΝ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΝΕ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ σχῆμα τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ξΤ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΝ : ΝΜ εἶναι ὡς τὸ



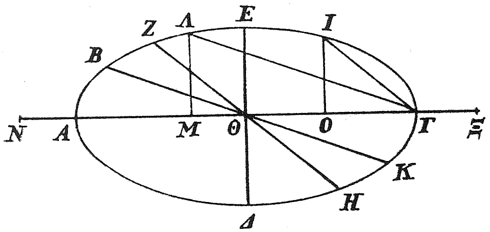
τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ σχῆμα τῆς διαμέτρου ΚΒ, ὁ δὲ λόγος τῆς εὐθείας ΓΝ : ΝΜ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς αὐτῆς εὐθείας ΓΝ : ΝΕ (θ. 18)· εἶναι ἄρα ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ σχῆμα τῆς διαμέτρου ΚΒ μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ σχῆμα τῆς διαμέτρου ξΤ, καὶ ἄρα τὸ σχῆμα τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ξΤ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

43

Εἰς τὴν ἔλλειψιν τὸ σχῆμα τοῦ μεγάλου ἄξονος εἶναι μικρότερον τοῦ σχήματος πάσης ἄλλης διαμέτρου καὶ μέγιστον σχῆμα εἶναι τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος, τὸ σχῆμα δὲ διαμέτρου πλησιεστέρας πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα εἶναι μικρότερον τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου εὑρισκομένης μακρύτερον τοῦ ἄξονος τούτου.

Ἔστω ΑΓ ὁ μέγας ἄξων ἐλλείψεως, ΔΕ ὁ μικρὸς ἄξων, καὶ ΚΒ, ΖΗ ἄλλαι διάμετροι. Λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μικρότερον τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ ὅτι τὸ σχῆμα τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΖΗ, καὶ ὅτι τὸ σχῆμα τὸ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΖΗ εἶναι μικρότερον τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος ΔΕ.

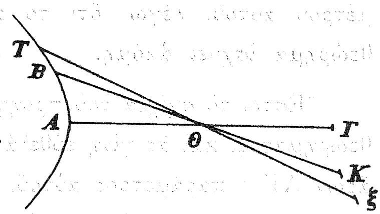
Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΓΛ, ΓΙ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ΚΒ, ΖΗ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΛΜ, ΙΟ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις ΓΝ πρὸς εὐθεῖαν ΝΑ, ὡς ὁ μέγας ἄξων ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ σχῆμα τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου, ὡς ἡ εὐθεῖα ΓΝ : ΝΑ (1, 15). Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σχῆμα τοῦ μικροῦ ἄξονος ΔΕ· τὸ σχῆμα λοιπὸν τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μικρότερον τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος ΔΕ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΓΝ : ΝΜ = τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ σχῆμα τῆς διαμέτρου ΚΒ (θ. 18), καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΝ : ΝΟ = τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ σχῆμα τῆς διαμέτρου ΖΗ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΝ : ΝΓ = τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ σχῆμα τοῦ ἄξονος ΔΕ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΝ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΝΜ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΝΜ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΝΟ, καὶ ἡ ΝΟ εἶναι μικροτέρα τῆς ΝΓ θὰ εἶναι ἄρα τὸ σχῆμα τοῦ ἄξονος ΑΓ μικρότερον τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ τὸ σχῆμα τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΚΒ, μικρότερον τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΖΗ, καὶ τὸ σχῆμα τῆς διαμέτρου ΖΗ μικρότερον τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΔΕ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



44

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἡ πλαγία πλευρὰ τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου αὐτοῦ (τοῦ ἄξονος), ἡ εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου του, χωρὶς τὸ τετράγωνον αὐτῆς νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τετραγώνου τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ ἄλλης (τυχούσης) διαμέτρου τῆς τομῆς.

Ἔστω ΑΓ ὁ ἄξων ὑπερβολῆς, καὶ ΚΒ, ξΤ ἄλλαι διάμετροι, καὶ ὁ ἄξων ΑΓ νὰ μὴ εἶναι μικρότερος τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, ἢ ἐὰν εἶναι μικρότερος τῆς παραμέτρου του, τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ νὰ μὴ εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τετραγώνου τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ ἄξονος τούτου καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ. Λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος



τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ.

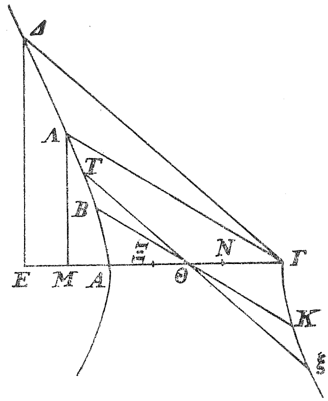
Ἔστω πρότερον ὁ ἄξων ΑΓ οὐχὶ μικρότερος τῆς παραμέτρου αὐτοῦ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ΚΒ μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου τοῦ ἄξονος ΑΓ, καὶ ἡ παράμετρος τῆς διαμέτρου ξΤ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ΚΒ, ὁ δὲ ἄξων ΑΓ εἶναι μικρότερος τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ ἡ διάμετρος ΚΒ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου ξΤ (θ. 33)· εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ, μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος ξΤ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

45

Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων δὲν εἶναι μικρότερος τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, χωρὶς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τετραγώνου τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, λέγω, ὅτι τὸ ἀποδειχθὲν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα ἰσχύει ἀκόμη.

Ἔστω τὸ σχῆμα τοῦ προηγουμένου τεσσαρακοστοῦ δευτέρου θεωρήματος, καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις ἡ ΓΝ : ΝΑ = ΑΞ : ΞΓ = ἄξων ΑΓ : παράμετρος αὐτοῦ. Τὸ διπλάσιον ἄρα τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΑΞ δὲν θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΝΞ, διότι ἡ εὐθεῖα ΑΞ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΝ, καὶ ὁ ἄξων ΑΓ : παράμετρος αὐτοῦ = εὐθεῖα ΑΞ : ΞΓ, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τετραγώνου τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ. Ἂς ἀχθῶσιν αἱ διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΚΒ, ξΤ καὶ αἱ παράλληλοι πρὸς αὐτὰς ΓΔ, ΓΛ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΛΜ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ ὡς ἡ εὐθεῖα ΓΝ : ΝΑ, καὶ ὡς ἡ εὐθεῖα ΑΞ :

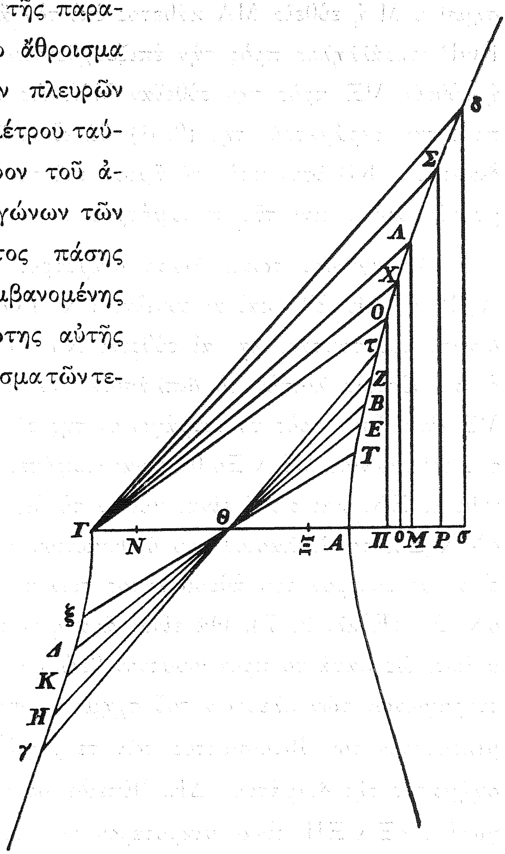
ΞΓ, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΞ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΞΝ, τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΜΞ x ΑΞ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΞΝ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΝΑ x ΑΞ, ὅτε τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου (ΜΝ + ΑΞ) x ΑΞ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου ΝΑ x ΑΞ αὐξηθέντος κατὰ τὸ ΞΝ^2, τουτέστι θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΑ, ΑΞ. Ὁ λόγος ἄρα τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου (ΝΜ + ΑΞ) x ΜΑ : 2(ΝΜ + ΑΞ) x ΞΑ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου 2(ΝΜ + ΑΞ) x ΜΑ : ΝΑ^2 + ΑΞ^2. Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου (ΜΝ + ΑΞ) x ΑΜ εἶναι πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου (ΜΝ + ΑΞ) x ΑΞ = ΑΜ : ΑΞ· εἶναι λοιπὸν ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΑΜ : ΑΞ μικρότερος τοῦ λόγου 2(ΜΝ + ΑΞ) x ΜΑ : (ΝΑ + ΑΞ)^2. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα ΝΜ^2 + ΜΞ^2 εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ΝΑ^2+ΑΞ^2, αὐξηθὲν κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου (ΝΜ + ΑΞ) x ΑΜ. Θὰ εἶναι ἄρα ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΜΞ : ΞΑ μικρότερος τοῦ λόγου (ΝΜ^2 + ΜΞ^2) : (ΝΑ^2 + ΑΞ^2). Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΜΞ : ΞΑ = ΓΝ x ΜΞ : ΓΝ x ΑΞ· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ : ΓΝ x ΑΞ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου (ΝΜ^2 + ΜΞ^2) : (ΝΑ^2 + ΑΞ^2), καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ : (ΝΜ^2 + ΜΞ^2) εἶναι



μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΑΞ : ($ΝΑ^2$ + $ΑΞ^2$). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ : ($ΝΜ^2$ + $ΜΞ^2$) = τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ : ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΑ : ($ΝΑ^2$ + $ΑΞ^2$) = τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ : τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ (θ. 19), ὡς τοῦτο συνάγεται φανερῶς ἐκ τῶν προηγουμένων θεωρημάτων· ὁ λόγος ἄρα τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ : τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου του (τοῦ $ΑΓ^2$) πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ. Τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος. Ἐπειδὴ δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΜΞ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $ΞΝ^2$, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΕΞ x ΞΜ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $ΝΞ^2$, ἀποδεικνύεται, ὡς προηγουμένως, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

46

Ἐὰν δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πλαγίου ἄξονος εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τετραγώνου τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, εὑρίσκεται εἰς ἀμφότερα τὰ μέρη τοῦ ἄξονος διάμετρος, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς διαμέτρου ταύτης καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ταύτης θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος πάσης ἄλλης διαμέτρου λαμβανομένης ἀμφοτέρωθεν τῆς πρώτης αὐτῆς διαμέτρου, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου, πλησιεστέρας πρὸς τὴν πρώτην αὐτὴν διάμετρον, θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου εὑρισκομένης μακρύτερον.



Ἔστω εὐθεῖα ΓΝ : ΝΑ = ΑΞ : ΞΓ, εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, εἰς ὃν εἶναι ὁ ἄξων ΑΓ πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΑΞ ἔστω μικρότερον τοῦ

$N\Xi^2$. Ἂς γίνῃ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου εὐθείας τινὸς ΜΞ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΝΞ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Μ ἡ εὐθεῖα ΜΛ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἡ διάμετρος ΚΘΒ παράλληλος πρὸς τὴν ἐπιζευχθεῖσαν ΓΛ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΜΞ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ, ὡς ἡ διάμετρος ΚΒ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρόν της (θ. 6)· θὰ εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΚΒ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τῆς διαφορᾶς μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς παραμέτρου της.

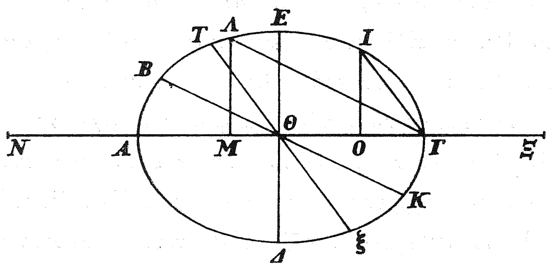
Ἂς ἀχθῶσι τώρα ἄλλαι διάμετροι μεταξὺ τῶν σημείων Α, Β, αἱ ΔΕ, ξΤ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΧ, ΓΟ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ταύτας, καὶ αἱ εὐθεῖαι Χο, ΟΠ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΜΞ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΞΝ, τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΜΞ x Ξο θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΞΝ, καὶ ἀφοῦ εἶναι κοινὸν τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου οΝ x Ξο, τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου (ΜΝ + Ξο) x Ξο θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν οΝ, Ξο (Εὐκλ. 2, 7). Θὰ εἶναι ἄρα φανερόν, ἐὰν σκεφθῶμεν ὁμοίως, ὡς κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΔΕ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου οΞ x ΞΠ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΞΝ, ἐὰν θεωρηθῇ ὡς κοινὸν τὸ ὀρθογώνιον ΝΠ x ΠΞ, τὸ [διπλάσιον] τοῦ ὀρθογωνίου (οΝ + ΞΠ) x ΞΠ, θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΠ, ΠΞ· ὥστε κατὰ τὰ προηγούμενα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΔΕ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΠΞ x ΞΑ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΞΝ, ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ.

Ἐὰν ληφθῶσιν ἄλλαι διάμετροι, ὡς αἱ ΖΗ, τγ μακρύτερον τοῦ ἄξονος, παρὰ ἡ διάμετρος ΚΒ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΣ, Γδ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους αὐτάς, ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΣΡ, δσ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ [διπλάσιον] τοῦ ὀρθογωνίου ΡΞ x ΞΜ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΞΝ, θὰ εἶναι φανερόν, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΖΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ [διπλάσιον] τοῦ ὀρθογωνίου σΞ x ΞΡ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΞΝ, ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου τγ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΖΗ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

47

Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν τὸ τετράγωνον τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ σχήματος τοῦ μεγάλου ἄξονος δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος τούτου, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μεγάλου ἄξονος θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος ἄλλης τινὸς διαμέτρου, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου πλησιεστέρας πρὸς τὸν ἄξονα θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου εὑρισκομένης μακρύτερον, τὸ δὲ μέγιστον ἄθροισμα τῶν τετραγώνων θὰ σχηματίζηται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μικροῦ ἄξονος.

Ἔστω ΑΓ ὁ μέγας ἄξων ἐλλείψεως, ΔΕ ὁ μικρὸς ἄξων, καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ



ἡμίσεος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος τούτου, καὶ ἄλλαι διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΚΒ, ξΤ πρὸς τὰς ὁποίας ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι αἱ ΓΛ, ΓΙ, καὶ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ ΛΜ, ΙΟ. Ἂς γίνῃ δὲ εὐθεῖά τις ἡ ΓΝ : ΝΑ = εὐθεῖά τις ἡ ΑΞ : ΞΓ = ἄξων ΑΓ : παράμετρος αὐτοῦ. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΑΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ΝΓ, ΓΞ, ὡς εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΓ. Εἶναι δὲ ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος τοῦ μικροῦ ἄξονος ΔΕ πρὸς τὸν ἄξονα ΔΕ, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΝ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΞ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΝ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΞ, ὡς ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρόν του, καὶ ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρόν του, ὡς ἡ παράμετρος τοῦ ἄξονος ΔΕ εἶναι πρὸς τὸν ἄξονα ΔΕ (1, 15), ἡ δὲ παράμετρος τοῦ ἄξονος ΔΕ εἶναι πρὸς τὸν ἄξονα ΔΕ ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΔΕ (1, 15), καὶ ἡ εὐθεῖα ΝΓ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΞ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΓΞ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΞ· θὰ εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΓΞ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΔΕ. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΓΞ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΓΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΔΕ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ⟨τῶν πλευρῶν⟩ τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΔΕ· ὅθεν ἐκ τῆς ταυτότητος, τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΓΞ θὰ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ΝΓ x ΓΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΔΕ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΑΞ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΓΞ, ὡς εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ· τὸ τετράγωνον δὲ τοῦ ἄξονος ΑΓ δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ· τὸ διπλάσιον ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου ΝΓ x ΑΞ δὲν θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΝΞ, καὶ ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΝΓ x ΜΞ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΝΞ. Ἐὰν ἄρα ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΝΜ x ΜΞ, τὸ ὑπόλοιπον ὀρθογώνιον ΜΓ x ΜΞ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΜ, ΜΞ. Θὰ εἶναι ἄρα ὁ λόγος τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου ΑΜ x ΜΓ πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΜΓ x ΜΞ, ἢ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΑΜ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΞ, μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου ΑΜ x ΜΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ΝΜ, ΜΞ. Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΜ x ΜΓ αὐξηθὲν κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΜ, ΜΞ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΓΞ, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΝ, ΓΞ εἶναι ἴσαι μεταξύ των· καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΑΞ : ΞΜ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΓΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΜ, ΜΞ. Ὁ λόγος ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου ΝΓ x ΑΞ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΞΜ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΓΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΜ, ΜΞ, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΝΓ x ΑΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΓΞ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΝΓ, ΜΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΜ, ΜΞ, ἐδείχθη δὲ ἀνωτέρω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΑΞ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΓΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος τούτου. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΜ, ΜΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ (θ. 19)· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος τούτου εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μεγάλου ἄξονος ΑΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ.

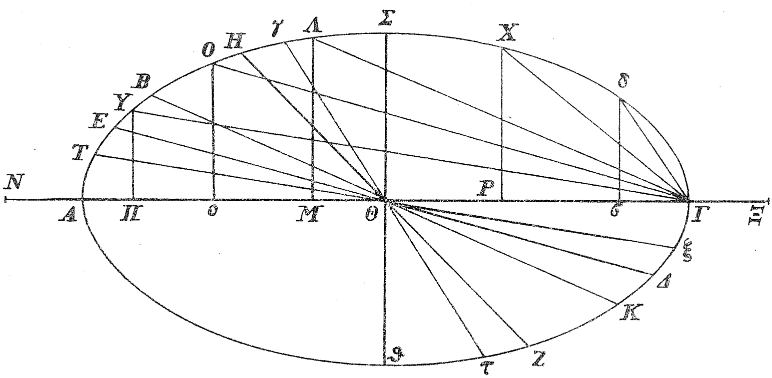
Ἡ δὲ εὐθεῖα ΜΝ θὰ εἶναι μικροτέρα, ἢ ὄχι, τῆς εὐθείας ΟΞ. Ἔστω πρότερον μικροτέρα. Τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν εὐθεῖαν ΟΞ, καὶ τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΟΞ, ΜΝ· ὁ λόγος ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν εὐθεῖαν ΜΟ καὶ τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΟΞ, ΜΝ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν εὐθεῖαν ΟΞ καὶ τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΟΞ, ΜΝ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ πρώτου τούτου ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ· ὥστε ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΜΟ : ΟΞ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν εὐθεῖαν ΜΟ καὶ τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΟΞ, ΜΝ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΘ, ΟΞ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν εὐθεῖαν ΜΟ καὶ τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΟΞ, ΜΝ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ, ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ εἶναι ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΘ καὶ ΘΟ· καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΜΞ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΞΟ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ : ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΟ = εὐθεῖα ΜΞ : ΞΟ· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ : ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΟ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΝΓ, ΜΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΝΓ x ΞΟ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΜΞ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ (θ. 19), καὶ ὁμοίως τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΞΟ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ.

Ἐὰν δὲ ἡ εὐθεῖα ΜΝ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΞΟ, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ δὲν θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ, καὶ ἄρα ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΝΓ x ΜΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΜ, ΜΞ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΝΓ x ΞΟ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ. Εἶναι ἄρα φανερόν, ἐὰν ἐνεργήσωμεν ὡς ἀνωτέρω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ. Τὰ αὐτὰ συμβαίνουσιν, ὅταν ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Ι πέσῃ μεταξὺ τῶν σημείων Θ καὶ Μ, ἐπὶ τοῦ σημείου Θ, ἢ ἀκόμη μεταξὺ τῶν σημείων Θ καὶ Γ, ὥστε τὸ τμῆμα ΜΝ νὰ εἶναι μικρότερον τῆς ἀπολαμβανομένης εὐθείας ΝΟ. Τέλος, τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΓΞ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΓΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μικροῦ ἄξονος ΔΕ, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν ἀρχῇ τοῦ θεωρήματος τούτου, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΝΓ x ΟΞ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΟ, ΟΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ (θ. 19)· ἀποδεικνύεται ἄρα, ὡς προηγουμένως, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου τινός, ὡς τῆς ξΤ, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ ἄξονος ΔΕ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

48

Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν τὸ τετράγωνον τοῦ μεγάλου ἄξονος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος, ὑπάρχει καὶ πρὸς τὸ ἓν καὶ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἄξονος διάμετρος, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματός της, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ταύτης θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος πάσης ἄλλης διαμέτρου ἀγομένης εἰς τὸ αὐτὸ τεταρτημόριον τῆς τομῆς, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου πλησιεστέρας καὶ πρὸς τὸ ἓν καὶ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς πρώτης αὐτῆς διαμέτρου, θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου εὑρισκομένης μακρύτερον.

Ἂς καταγραφῇ σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Ἀποδεικνύεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΑΞ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΝΞ. Ἄς γίνῃ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου εὐθείας τινὸς ΜΞ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΝΞ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Μ ἄς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ εὐθεῖα ΛΜ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν τομὴν εἰς τὸ σημεῖον Λ, ἄς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΛ, καὶ ἄς ἀχθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ΚΒ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΜΞ : ΞΝ = διάμετρος ΚΒ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματός της, καὶ ἄρα τὸ $ΜΞ^2 : ΞΝ^2$ = τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΚΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματός της



(θ. 7). Ἀλλὰ τὸ $ΜΞ^2$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $ΞΝ^2$· εἶναι λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΚΒ τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ταύτης.

Ἄς ἀχθῶσι τώρα αἱ διάμετροι ΔΕ, ξΤ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ αἱ εὐθεῖαι ΓΟ, ΓΥ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ταύτας, καὶ αἱ εὐθεῖαι Οο, ΥΠ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΜΞ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΞΝ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΝΞ x ΞΘ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΞΝ, τὸ ὀρθογώνιον ΝΞ x ΞΘ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΜΞ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΝΞ : ΜΞ = ΜΞ : ΞΘ, καὶ ἀφαιρεθῶσιν οἱ προηγούμενοι ὅροι τῆς ἀναλογίας ἐκ τῶν ἑπομένων, θὰ εἶναι ἡ ὑπόλοιπος εὐθεῖα ΜΝ : ὑπόλοιπον εὐθεῖαν ΜΘ = ΝΞ : ΜΞ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΝΞ x ΜΘ θὰ εἶναι ἰσοδύμανον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΜΝ x ΜΞ. Εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΝΞ x ΜΘ μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου Νο x ΜΞ, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΝΞ x ΜΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου Νο x ΜΞ· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΜΘ x ΘΞ εἶναι τέσσαρας φορὰς μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου Νο x ΜΞ. Ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τὸ διπλάσιόν τοῦ ὀρθογωνίου Μο x ΜΞ καὶ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΜΘ x ΘΞ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου Μο x ΜΞ, ὁπότε τοῦτο θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου ΜΝ x ΜΞ. Ἂς προστεθῇ ἀκόμη καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΘΜ, ὁπότε τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΜΘ x ΘΞ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου Μο, ΜΞ, καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ τετραγώνου τῆς ΘΜ, θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου ΜΝ x ΜΞ, αὐξηθέντος κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΘΜ. Ἀλλὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΜΘ x ΘΞ αὐξηθὲν κατὰ τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου Μο x ΜΞ, καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΘΜ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν Θο, ΘΜ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΞ, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΝΜ x ΜΞ αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τῆς εὐθείας ΘΜ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΜ, ΜΞ· εἶναι ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν Θο, ΘΜ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΞ, μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΜ, ΜΞ. Ὁ λόγος ἄρα τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν Θο, ΘΜ καὶ τὴν εὐθεῖαν Μο, πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν Θο, ΘΜ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΞ εἶναι μικρότερον τοῦ λόγου τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν Θο, ΘΜ καὶ τὴν εὐθεῖαν Μο, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ, τουτέστιν ὁ λόγος τῆς εὐθείας Μο πρὸς τὴν ΜΞ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν Θο, ΘΜ καὶ τὴν εὐθεῖαν Μο, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν Νο, οΞ ὑπερέχει τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν εὐθεῖαν Μο, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν Θο, ΘΜ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), ὁ λόγος τῆς εὐθείας οΞ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΞ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν Νο, οΞ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΜΝ, ΜΞ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΔΕ, καὶ ἐπειδὴ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΝΞ x οΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου ΝΠ x οΞ, ἀποδεικνύεται διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΔΕ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ.

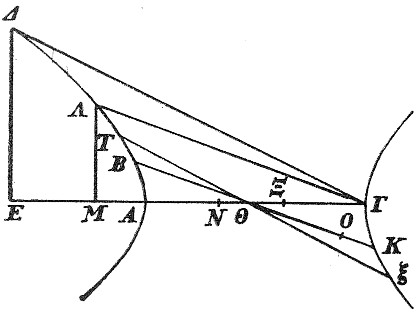
Ἐπειδὴ δὲ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΝΞ x ΠΘ εἶναι ἐπίσης μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου ΝΑ x ΠΞ, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΑΞ : ΞΠ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΑ, ΑΞ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΠ, ΠΞ, καὶ κατὰ ταῦτα, ὁμοίως εἶναι, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ.

Ἂς ἀχθῶσι τώρα εἰς τὰ αὐτὰ τεταρτημόρια τῆς ἐλλείψεως ἄλλαι διάμετροι αἱ ΖΗ, τγ μακρύτερον τοῦ μεγάλου ἄξονος παρὰ ἡ διάμετρος ΚΒ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ, αἱ εὐθεῖαι ΓΧ, Γδ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ταύτας, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΧΡ, δσ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐὰν δὲ τὰ σημεῖα Ρ, σ πίπτωσι, καὶ τὰ δύο, μεταξὺ τῶν σημείων Θ, Μ ἔστω, ὅτι τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν πίπτει εἰς τὸ κέντρον καὶ τὸ ἄλλο μεταξὺ τῶν σημείων Θ, Μ, ἢ μεταξὺ τῶν σημείων Θ, Γ, ἢ ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα (Ρ, σ) κεῖνται καὶ τὰ δύο μεταξὺ τῶν σημείων Θ, Γ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΖΗ, καὶ ὅτι τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι ἐπίσης μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου τγ. Τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματός της, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος πάσης ἄλλης διαμέτρου ἀγομένης εἰς τὰ τεταρτημόρια ΑΣ, Γθ τῆς ἐλλείψεως, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου ἀγομένης εἰς τὰ αὐτὰ τεταρτημόρια, καὶ εὑρισκομένης πλησιέστερον καὶ πρὸς τὸ ἓν καὶ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς πρώτης ταύτης διαμέτρου, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου εὑρισκομένης μακρύτερον. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μικροῦ ἄξονος Σθ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος πάσης ἄλλης διαμέτρου τῆς τομῆς. Ἅτινα ἔδει δεῖξαι.

49

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἡ πλαγία πλευρὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος ἄλλης τινὸς διαμέτρου, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου πλησιεστέρας πρὸς τὸν ἄξονα θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου εὑρισκομένης μακρύτερον τοῦ ἄξονος, ἡ δὲ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου τινὸς τῆς τομῆς, ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα μὲν τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος καὶ σχήματος τοῦ ἄξονος, μικροτέρα δὲ τοῦ διπλασίου τῆς διαφορᾶς αὐτῆς.

Ἔστω ΑΓ ὁ ἄξων ὑπερβολῆς, Θ τὸ κέντρον αὐτοῦ καὶ ὅτι ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι μεγαλύτερος τῆς ἀντιστοίχου εἰς αὐτὸν παραμέτρου. Ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις ἡ ΓΝ : ΝΑ + ΑΞ : ΞΓ = ἄξων ΑΓ : παράμετρος αὐτοῦ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ διάμετροι ΚΒ, ξΤ.



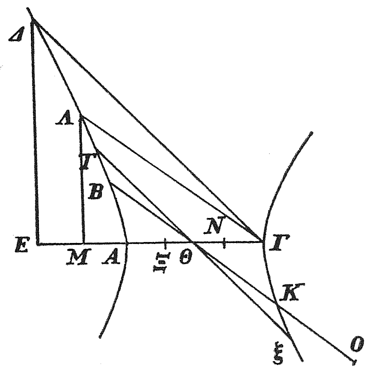
Λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου αὐτοῦ εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΚΒ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου τῆς διαμέτρου ταύτης ΚΒ, καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῆς διαμέτρου ΚΒ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῆς διαμέτρου ξΤ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΓΛ, ΓΔ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ΚΒ, ξΤ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΛΜ, ΔΕ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ἄξων ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΓΝ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΝΑ, ἢ ὡς ἡ ΑΞ εἶναι πρὸς τὴν ΞΓ, τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΑ θὰ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΑΞ, ΑΝ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ. Εἶναι δὲ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΜΞ : ΞΑ μικρότερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΜΝ : ΝΑ· ὁ λόγος ἄρα τῆς εὐθείας ΜΞ : ΞΑ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΞ, ΜΝ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΞΑ, ΑΝ, καὶ ἄρα μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΞΜ, ΜΝ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΞΝ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον (ΞΑ + ΑΝ) x ΞΝ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον (ΞΜ + ΜΝ) x ΞΝ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΜ, ΜΝ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον (ΞΑ + ΑΝ) x ΞΝ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΑ, ΑΝ· ὁ λόγος ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΑ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΜ, ΜΝ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΑ, ΑΝ (Εὐκλ. 2, 6), καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΜ, ΜΝ, θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΓΝ, ΞΑ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΑ, ΑΝ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΜΞ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΝ, ΜΝ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΑΞ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΑ, ΑΝ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτοῦ· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου (τοῦ ΑΓ) πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ. Εἶναι ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΕΞ : ΞΜ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΕΝ : ΝΜ, ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΕΞ : ΞΜ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΕΞ, ΝΕ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΞΜ, ΜΝ, καὶ ἄρα ἐδείχθη, ὡς πρότερον, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ξΤ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ. Ἐὰν δὲ ληφθῇ εὐθεῖά τις, ὡς ἡ ΒΟ ἴση πρὸς τὴν παράμετρον τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῆς διαμέτρου ΚΒ καὶ τῆς εὐθείας ΒΟ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΒΟ x ΟΚ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΟΚ, ἥτις διαφορὰ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ὀρθογωνίου ΒΚ x ΚΟ, καὶ μικροτέρα τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου τούτου. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΒΚ x ΚΟ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΒΚ καὶ τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΚ, ἡ ὁποία διαφορὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφοράν, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος τούτου (θ. 29)· ἡ διαφορὰ ἄρα μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΒΚ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου της εἶναι μεγαλυτέρα μὲν τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος τούτου, μικροτέρα δὲ τοῦ διπλασίου τῆς τελευταίας ταύτης διαφορᾶς. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

50

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἡ πλαγία πλευρὰ τοῦ σχήματος εἶναι μικροτέρα τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος ἄλλης τυχούσης διαμέτρου, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ πλησιεστέρας πρὸς τὸν ἄξονα διαμέτρου θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου κειμένης μακρύτερον, ἡ δὲ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ τετραγώνου διαμέτρου τινὸς καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου αὐτῆς θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς διαφορᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος.



Ἔστω ΑΓ ὁ ἄξων τῆς τομῆς, καὶ ἂς γίνῃ εὐθεῖά τις ἡ ΓΝ : ΝΑ, καὶ ΑΞ : ΞΓ = ἄξων ΑΓ : παράμετρος αὐτοῦ, καὶ κατὰ τὰ λοιπά, ἔστω τὸ σχῆμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΑΞ πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΑΝ, ΑΞ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος

ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τούτου καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος. Εἶναι δὲ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΜΞ : ΞΑ μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΜΝ : ΝΑ· ὥστε ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΜΞ : ΞΑ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΞ, ΜΝ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΞΑ, ΑΝ, καὶ ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΑ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν ΜΞ, ΜΝ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΞ, ΑΝ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΜΞ, ΜΝ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΞ, ΑΝ εἶναι ὡς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΜΞ, ΜΝ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΝΞ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον (ΞΑ + ΑΝ) x ΝΞ· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΜΞ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΑ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου (ΜΞ + ΜΝ) x ΝΞ : (ΞΑ + ΑΝ) x ΝΞ. Ἐκ τούτου ἀποδεικνύεται, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων, τῆς διαμέτρου ΚΒ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου αὐτοῦ, καὶ ὅτι, ὁμοίως, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῆς διαμέτρου ξΤ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ.

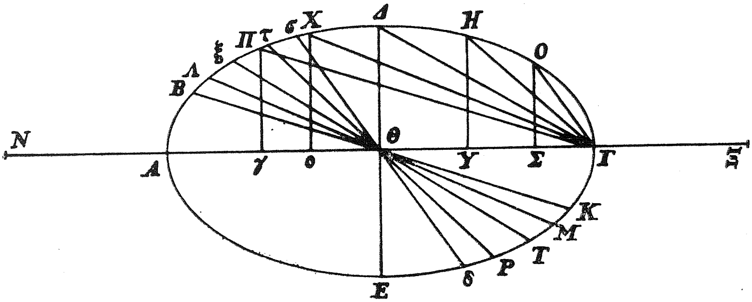
Ἂς ληφθῇ τώρα εὐθεῖά τις ἡ ΒΟ ἴση πρὸς τὴν παράμετρον τῆς διαμέτρου ΚΒ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΚ x ΚΟ ἰσοδύναμον πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος (θ. 29). Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΒΚ x ΚΟ αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΚΟ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΚ x ΚΟ· ἡ διαφορὰ ἄρα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου τινὸς ΚΒ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς διαφορᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ καὶ τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος τούτου. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

51

Εἰς ἔλλειψιν ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μεγάλου ἄξονος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος ἄλλης τινὸς διαμέτρου, μεγαλυτέρας τῆς παραμέτρου αὐτῆς, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου πλησιεστέρας πρὸς τὸν μεγάλον ἄξονα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου εὑρισκομένης μακρύτερον τοῦ ἄξονος τούτου, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μικροῦ ἄξονος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος ἄλλης τινὸς διαμέτρου μικροτέρας τῆς παραμέτρου αὐτῆς, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος διαμέτρου πλησιεστέρας πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ διαμέτρου εὑρισκομένης μακρύτερον (τοῦ μικροῦ ἄξονος).

Ἔστω ΑΓ ὁ μέγας ἄξων ἐλλείψεως, ΔΕ ὁ μικρὸς ἄξων, καὶ ξΤ μία τῶν ἴσων συζυγῶν διαμέτρων. Ἂς ἀχθῶσιν αἱ διάμετροι ΚΒ, ΛΜ μεταξὺ τῶν σημείων Α, ξ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΠ, ΓΧ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ταύτας, αἱ δὲ εὐθεῖαι Πγ, Χο κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἡ λοιπὴ κατασκευὴ ἂς γίνῃ, ὡς εἰς τὸ σχῆμα τῆς ὑπερβολῆς τοῦ τελευταίου (προηγουμένου) θεωρήματος. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου αὐτοῦ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπεροχῆς [τοῦ τετραγώνου] τῆς διαμέτρου ΚΒ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου αὐτῆς, καὶ ὅτι ἡ τελευταία αὕτη ὑπεροχὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπεροχῆς τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου ΛΜ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου αὐτῆς.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΑΞ : Ξγ εἶναι μικρότερος



τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΑΘ : Θγ, ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΑΞ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x Ξγ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου ΞΝ x ΑΘ πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΞΝ x Θγ. Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΞΝ x ΑΘ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΑ x ΑΝ, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΞΝ x Θγ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν Ξγ, γΝ· ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΑΞ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x Ξγ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΑ, ΑΝ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν Σγ, γΝ, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΑ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΑ, ΑΝ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x Ξγ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν Ξγ, γΝ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΑ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΞΑ, ΑΝ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ αὐτοῦ ἄξονος (ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΝ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΝ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΞ : ΞΓ εἰς τὸν λόγον τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὴν παράμετρον αὐτοῦ, καὶ ἄρα καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΝ, ΓΞ εἶναι αἱ καλούμεναι ὁμόλογοι εὐθεῖαι), τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΓΝ x Ξγ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν Ξγ, γΝ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῆς διαμέτρου ΚΒ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς (θ. 20)· ὁ λόγος ἄρα τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων, τῆς διαμέτρου ΚΒ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς. Ἡ διαφορὰ ἄρα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ ἄξονος ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x Ξγ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x Ξο εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν Ξγ, γΝ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν Ξο, οΝ, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x Ξγ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν Ξγ, γΝ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x Ξο πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν Ξο, οΝ. Εἶναι ἄρα φανερόν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΚΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΛΜ.

Ἂς ἀχθῶσι τώρα ἄλλαι διάμετροι αἱ σδ, τΡ μεταξὺ τῶν σημείων ξ, Δ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Γ, αἱ εὐθεῖαι ΓΗ, ΓΟ παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους ταύτας, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΗΥ, ΟΣ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα. Λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μικροῦ ἄξονος ΔΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου σδ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου αὐτῆς, καὶ ὅτι ἡ τελευταία αὕτη διαφορὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου τΡ.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΥ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΣ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΥΘ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΘΣ (ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΞΥ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΞΣ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΥΘ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΘΣ), καὶ ἡ εὐθεῖα ΥΘ εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΘΣ, ὡς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΝΞ x ΥΘ εἶναι πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΝΞ x ΘΣ, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΞΝ x ΥΘ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΥ, ΥΣ, καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΞΝ x ΘΣ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΣ, ΣΞ, ὁ λόγος ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΥ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΣ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν

ΝΥ, ΥΣ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΣ, ΣΞ, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16), ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΥ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΥ, ΥΞ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΞΣ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΝΛ, ΣΞ. Ἐκ τούτου, καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς προηγουμένως, δεικνύεται, ὅτι ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων, τῆς διαμέτρου τΡ καὶ τῆς παραμέτρου αὐτῆς, θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ ἄξονος ΑΓ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου σδ, καὶ ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου σδ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου τΡ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου αὐτῆς.

Τέλος, ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς εὐθείας ΣΞ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΞΓ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῆς εὐθείας ΣΘ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΘΓ (ἐπειδὴ ἡ ΣΞ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΞΓ, καὶ ἡ ΣΘ εἶναι μικροτέρα τῆς ΘΓ), ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΓΝ x ΣΞ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΓΝ x ΞΓ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου ΝΞ x ΣΘ πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον ΝΞ x ΘΓ, καὶ ἄρα ἐδείχθη, ὡς προηγουμένως, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τοῦ μικροῦ ἄξονος ΔΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου σδ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς παραμέτρου αὐτοῦ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

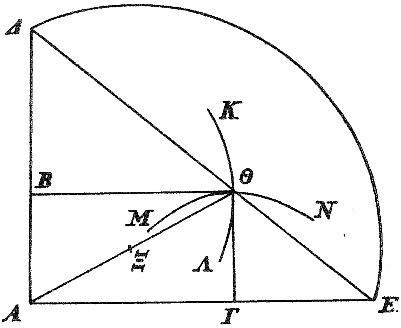
ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ (Fragmenta)

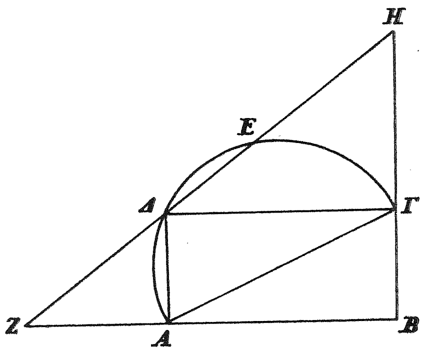
ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ (Fragmenta)

Εἰς τὰς μαρτυρίας τὰς περιεχομένας εἰς τὸν α΄ τόμον τῶν Κωνικῶν, περιελάβομεν καὶ τὰ ἀποσπάσματα (fragmenta) τὰ περιεχόμενα εἰς τὸν β΄ τόμον τῶν Κωνικῶν τῆς ἐκδόσεως Heiberg 1893, ὡς καὶ τὴν ἀρχὴν τῶν σχολίων τοῦ Εὐτοκίου, τῆς αὐτῆς ἐκδόσεως. Ἐπειδὴ τὸ πλεῖστον τῶν ἀνωτέρω ἀναφερομένων ἀποσπασμάτων προέρχεται ἐκ τοῦ Πάππου, τοῦ ὁποίου τὰ λήμματα εἰς τὰ βιβλία τῶν Κωνικῶν θὰ παρατεθῶσι κατωτέρω, ἐκρίναμεν σκόπιμον ὅπως, πρὸς εὐκολωτέραν ἐποπτείαν, προτάξωμεν τῶν λημμάτων τοῦ Πάππου τοὺς τίτλους τῶν κατὰ Heiberg ἀποσπασμάτων μετὰ τῶν σχημάτων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς μερικὰς μαρτυρίας.

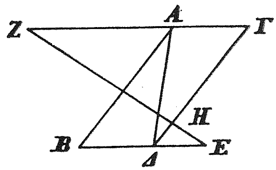
APOLLONII PERGAEI CONICA
vol. II, ed. Heiberg 1893

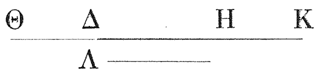
	FRAGMENTA	*Heiberg p.*
1.	*Pappus VII*, 30 *p.* 672, *ed. Hultsch*	101
2.	» *VII*, 42 *p.* 682, 21 »	103
3.	» *IV*, 59 *p.* 270 »	103


Δ
Κ
Β
Θ
Μ
Ν
Ξ
Λ
Α
Γ
Ε

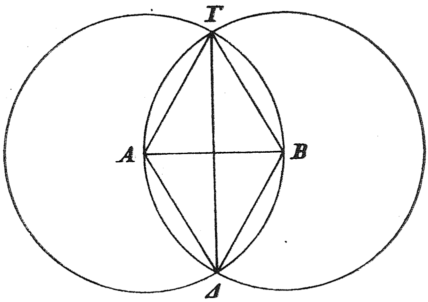

Η
Ε
Δ
Γ
Ζ
Α
Β

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ (Fragmenta)

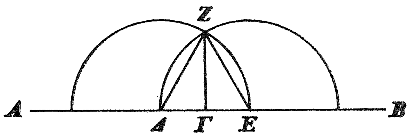




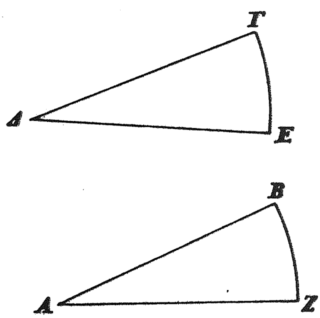
55. *Proclus in Elem. p.* 279, 16 135



56. *Proclus in Elem. p.* 282, 8 136



57. *Proclus in Elem. p.* 335, 16 136



58. *Scholium ad Euclidis Data def.* 13 - 15 137

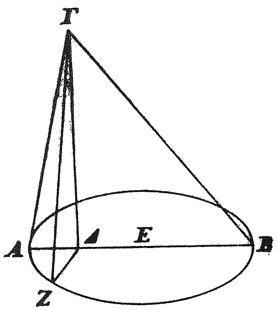
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

ΠΑΠΠΟΥ
ΛΗΜΜΑΤΑ ΕΙΣ ΤΑ ΚΩΝΙΚΑ

H143
ΠΑΠΠΟΥ
ΛΗΜΜΑΤΑ ΕΙΣ ΤΑ ΚΩΝΙΚΑ

Τοῦ α′

α′. Ἔστω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. εἰ μὲν οὖν ἰσοσκελής ἐστιν ὁ κῶνος, φανερόν, ὅτι πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒ κύκλον προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, εἰ δὲ σκαληνός, ἔστω εὑρεῖν, τίς μεγίστη καὶ τίς ἐλαχίστη.



ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος καὶ πιπτέτω πρότερον ἐντὸς τοῦ ΑΒ κύκλου καὶ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ. λέγω, ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒ προσπιπτουσῶν.

προσβεβλήσθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύ-
H144 *χθω ἡ ΔΖ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῆς ΔΖ [Eucl. III, 7]· κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, καί εἰσιν αἱ πρὸς τῷ Δ γωνίαι ὀρθαί· μείζων*

ΠΑΠΠΟΥ
ΛΗΜΜΑΤΑ ΕΙΣ ΤΑ ΚΩΝΙΚΑ

Λήμματα εἰς τὸ 1ον βιβλίον τῶν Κωνικῶν

1. Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ. Ἐὰν μὲν λοιπὸν ὁ κῶνος εἶναι ἰσοσκελής, εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλαι αἱ ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι, ἐὰν δὲ εἶναι σκαληνός, νὰ εὑρεθῇ ποία εὐθεῖα ἐξ αὐτῶν εἶναι ἡ μεγίστη καὶ ποία ἡ ἐλαχίστη.

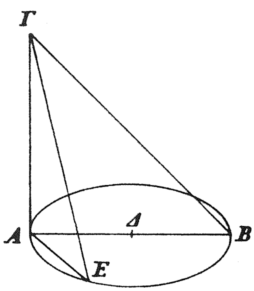
Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒ, κάθετος, καὶ ἂς πίπτῃ αὕτη πρῶτον ἐντὸς τοῦ κύκλου ΑΒ, καὶ ἔστω ἡ κάθετος ΓΔ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΕ ἂς προεκβληθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη μέχρι τῶν σημείων Α, Β καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΓΒ· λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ὅλων τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν εἶναι ἡ ΑΓ.

Διότι ἂς ληφθῇ καὶ ἄλλη τις εὐθεῖα ἡ ΓΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΖ· εἶναι ἄρα ἡ ΒΔ μεγαλυτέρα τῆς ΔΖ (Εὐκλ. 3, 7). Εἶναι δὲ ἡ ΓΔ κοινή, καὶ αἱ παρὰ τὸ σημεῖον Δ γωνίαι εἶναι ὀρθαί·

Σημ.: Ὅπου παραπλεύρως τοῦ ἀρχαίου κειμένου σημειοῦται Η, δηλοῦται ἡ σελὶς τῆς ἐκδόσεως Apollonii Pergaei, Heiberg, 1893 Λειψία.

ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΖ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΓΑ μείζων ἐστίν· ὥστε μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΓΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ.

β′. Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἡ ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἀγομένη πιπτέτω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ΑΒ κύκλου καὶ ἔστω ἡ ΓΑ, καὶ πάλιν ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. λέγω, ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ.



ὅτι μὲν οὖν μείζων ἡ ΓΒ τῆς ΓΑ, φανερὸν [Eucl. I, 19]. διήχθω δέ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ, μείζων ἐστὶν τῆς ΑΕ [Eucl. III, 15]. καὶ αὐταῖς πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ [Eucl. XI def. 3]· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῆς ΓΕ. ὁμοίως καὶ πασῶν. καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ μείζων δειχθήσεται ἡ ΕΓ τῆς ΓΑ. ὥστε μεγίστη μὲν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ τῶν ἀπὸ τοῦ Γ σημείου πρὸς τὸν ΑΒ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.

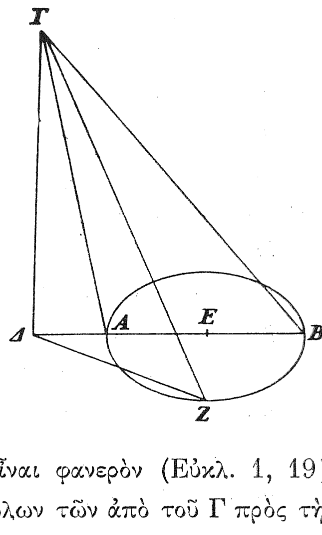
γ′. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων πιπτέτω ἡ κάθετος ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΓ. λέγω δή, ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.

ὅτι μὲν οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΑ, φανερὸν [Eucl.
H145 *I, 19]. λέγω δή, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν*

εἶναι ἄρα ἡ ΒΓ $>$ ΓΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ἡ ΓΖ$>$ΓΑ· ὥστε μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΓΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ.

2. Ἀλλὰ τώρα ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἀγομένη κάθετος ἂς πίπτῃ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΒ, καὶ ἔστω ἡ ΓΑ, καὶ εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΔ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Β, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΓ· λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ.

Ὅτι μὲν λοιπὸν ἡ ΓΒ $>$ ΓΑ εἶναι φανερὸν (Εὐκλ. 1, 19), ἂς διαχθῇ δὲ καὶ ἄλλη τις εὐθεῖα ἡ ΓΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΕ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος εἶναι αὕτη μεγαλυτέρα τῆς ΑΕ (Εὐκλ. 3, 15). Καὶ κάθετος ἐπ' αὐτὰς εἶναι ἡ ΑΓ (Εὐκλ. 11 ὁρισ. 3)· εἶναι ἄρα ἡ ΓΒ $>$ ΓΕ. Ὁμοίως δὲ εἶναι αὕτη μεγαλυτέρα ὅλων. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΕΓ $>$ ΓΑ. Ὥστε μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ ὅλων τῶν ἀπὸ τοῦ σημείου Γ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.



3. Τῶν αὐτῶν δεδομένων, ἂς πίπτῃ ἡ κάθετος ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω αὕτη ἡ ΓΔ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ μέχρι τοῦ κέντρου Ε τοῦ κύκλου, ἡ ΔΕ, ἂς προεκβληθῇ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΒΓ. Λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ ὅλων τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.

Ὅτι μὲν λοιπὸν ἡ ΒΓ $>$ ΓΑ εἶναι φανερὸν (Εὐκλ. 1, 19). Λέγω δὲ ὅτι εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ὅλων τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν *τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν. προσπιπτέτω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ. ἐπεὶ οὖν διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΔ, μείζων ἐστὶν ἡ ΔΒ τῆς ΔΖ [Eucl. III, 8]. καὶ ἔστιν αὐταῖς ὀρθὴ ἡ ΔΓ, ἐπεὶ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ [Eucl. XI def. 3]· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΖ. ὁμοίως καὶ πασῶν. μεγίστη μὲν ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ· ὅτι δὲ καὶ ἡ ΑΓ ἐλαχίστη. ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΖ, καὶ ἔστιν αὐταῖς ὀρθὴ ἡ ΔΖ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΖ. ὁμοίως καὶ πασῶν. ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, μεγίστη δὲ ἡ ΒΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.*

Εἰς τοὺς ⟨πρώτους⟩ κωνικοὺς ὅρους

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν [I p. 6, 2] εἰκότως ὁ Ἀπολλώνιος προστίθησιν καὶ ἐφ᾽ ἑκάτερα προσεκβληθῇ [p. 6, 4], ἐπειδήπερ τοῦ τυχόντος κώνου γένεσιν δηλοῖ. εἰ μὲν γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, περισσὸν ἦν προσεκβάλλειν διὰ τὸ τὴν φερομένην εὐθεῖαν αἰεί ποτε ψαύειν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἐπειδήπερ πάντοτε τὸ σημεῖον ἴσον ἐφέξειν ἔμελλεν τῆς τοῦ κύκλου περιφε-
H146 *ρείας. ἐπεὶ δὲ δύναται καὶ σκαληνὸς εἶναι ὁ κῶνος, ἔστι δέ, ὡς προγέγραπται, ἐν κώνῳ σκαληνῷ μεγίστη τις καὶ ἐλαχίστη πλευρά, ἀναγκαίως προστίθησιν τὸ προσεκβεβλήσθω, ἵνα αἰεὶ προσεκβληθεῖσα ἡ ἐλαχίστη ἀεὶ τῆς μεγίστης αὔξηται προσεκβαλλομένης, ἕως ἴση γένηται τῇ μεγίστῃ καὶ ψαύσῃ κατ᾽ ἐκεῖνο τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.*

δʹ. Ἔστω γραμμὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ θέσει ἡ ΑΓ, πᾶσαι δὲ αἱ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετοι ἀγόμεναι οὕτως περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΑΒ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. Διότι ἂς προσπέσῃ καὶ ἄλλη, ἡ ΓΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΔ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, εἶναι ἡ ΔΒ 〉 ΔΖ (Εὐκλ. 3, 8). Καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὰς ἡ ΔΓ, ἐπειδὴ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν (Εὐκλ. 11 ὁρισ. 3)· εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΖ. Ὁμοίως δὲ καὶ ὅλων. Εἶναι ἄρα μεγίστη μὲν ἡ ΓΒ· καὶ ἡ ΑΓ ἐλαχίστη. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ 〈 ΔΖ καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὰς ἡ ΔΓ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΓ 〈 ΓΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ μικροτέρα ὅλων. Εἶναι ἄρα ἐλαχίστη ἡ ΑΓ, μεγίστη δὲ ἡ ΒΓ, ὅλων τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΑΒ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.

Εἰς τοὺς 〈πρώτους〉 κωνικοὺς ὁρισμοὺς (1 σελ. 196)

«Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν» εὐλόγως ὁ Ἀπολλώνιος προσθέτει «ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ» ἐπειδὴ ἐννοεῖ τὴν γένεσιν τοῦ τυχόντος κώνου. Διότι, ἐὰν ὁ κῶνος εἶναι ἰσοσκελής, θὰ ἦτο περιττὸν νὰ προεκβάλλῃ, διότι ἡ φερομένη εὐθεῖα πάντοτε θὰ ἐφάπτηται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ἐπειδὴ βεβαίως πάντοτε τὸ σημεῖον θὰ ἔπρεπε νὰ ἀπέχῃ ἴσον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι τοῦτο δυνατὸν καὶ ὁ κῶνος εἶναι σκαληνός, εἶναι δέ, ὅπως προεγράφη, εἰς τὸν σκαληνὸν κῶνον, μεγίστη καὶ ἐλαχίστη πλευρά, κατ' ἀνάγκην προσθέτει τὸ «προσεκβεβλήσθω» ἵνα πάντοτε προεκβαλλομένη ἡ ἐλαχίστη αὐξάνεται μέχρις ὅτου γίνῃ ἴση πρὸς τὴν μεγίστην καὶ ἐφάπτηται κατ' ἐκεῖνο τὸ σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

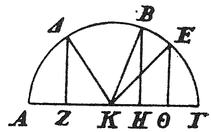
4. Ἔστω γραμμὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ κατὰ τὴν θέσιν ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ὅλαι δὲ αἱ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ ἀγόμεναι κάθετοι,

ἀγέσθωσαν, ὥστε τὸ ἀπὸ ἑκάστης αὐτῶν τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ὑφ᾽ ἑκάστης ἀποτμηθέντων. λέγω, ὅτι κύκλου περιφέρειά ἐστιν ἡ ΑΒΓ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἐστιν ἡ ΑΓ.

ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ σημείων τῶν Δ, Β, Ε κάθετοι αἱ ΔΖ, ΒΗ, ΕΘ. τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΗ τῷ ὑπὸ ΑΗΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΕΘ τῷ ὑπὸ ΑΘΓ. τετμήσθω δὴ δίχα ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΚ, ΚΒ, ΚΕ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΚ [Eucl. II, 5], ἀλλὰ τῷ ὑπὸ ΑΖΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΖ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΔΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΚ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΔΚ [Eucl. I, 47], ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΚ, ΕΚ ἴση ἐστὶ τῇ ΑΚ ἢ τῇ ΚΓ· κύκλου ἄρα περι-
H147 φέρειά ἐστιν ἡ ΑΒΓ τοῦ περὶ κέντρον τὸ Κ, τουτέστι τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ.

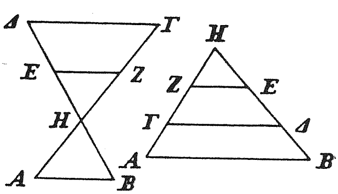
ε′. Τρεῖς παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, καὶ διήχθωσαν εἰς αὐτὰς δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΗΖΓ, ΒΗΕΔ· ὅτι γίνεται, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ τετράγωνον.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν [Eucl. VI, 4], ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΕ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ, ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ [Eucl. VI, 4]· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ἂς ἀχθῶσιν, οὕτω πως, ὥστε τὸ τετράγωνον ἑκάστης ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰ τμήματα τῆς βάσεως, τὰ τμηθέντα ὑπὸ ἑκάστης ἐξ αὐτῶν· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓ εἶναι τόξον κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΓ.



Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Δ, Β, Ε κάθετοι αἱ ΔΖ, ΒΗ, ΕΘ. Τὸ μὲν τετράγωνον ἄρα τῆς ΔΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΖ x ΖΓ (Εὐκλ. 1, 47), τὸ δὲ $ΒΗ^2 = ΑΗ \times ΗΓ$, τὸ δὲ $ΕΘ^2 = ΑΘ \times ΘΓ$. Ἂς τμηθῇ τώρα ἡ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Κ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΚ, ΚΒ, ΚΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΖ \times ΖΓ + ΖΚ^2 = ΑΚ^2$ (Εὐκλ. 2, 5), ἀλλὰ $ΑΖ\times ΖΓ = ΔΖ^2$, τὸ ἄρα $ΔΖ^2 + ΖΚ^2$ δηλ. τὸ $ΔΚ^2 = ΑΚ^2$ (Εὐκλ. 1, 47)· εἶναι ἄρα, ἡ ΑΚ = ΚΔ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΚ ΕΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΚ ἢ τὴν ΚΓ· εἶναι ἄρα ἡ γραμμὴ ΑΒΓ τόξον κύκλου, ἔχοντος κέντρον τὸ Κ, τουτέστι τοῦ ἔχοντος διάμετρον τὴν ΑΓ.

5. Ἔστωσαν τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, καὶ ἂς διαχθῶσιν εἰς αὐτὰς δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΗΖΓ, ΒΗΕΔ· λέγω, ὅτι γίνεται ὡς τὸ $ΑΒ \times ΕΖ : ΓΔ^2 = ΑΗ \times ΗΖ : ΗΓ^2$.



Διότι, ἐπειδὴ εἶναι (Εὐκλ. 6, 4) ὡς ἡ ΑΒ : ΖΕ, τουτέστιν ὡς τὸ $ΑΒ\times ΖΕ : ΖΕ^2 =$ ἡ ΑΗ:ΗΖ, τουτέστιν, ὡς τὸ $ΑΗ \times ΗΖ : ΗΖ^2$, ὡς ἄρα εἶναι τὸ $ΑΒ \times ΖΕ : ΖΕ^2 = ΑΗ \times ΗΖ : ΗΖ^2$. Ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ $ΖΕ^2 : ΓΔ^2 = ΖΗ^2 : ΗΓ^2$ (Εὐκλ. 6, 4)· διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἄρα κατὰ μέλη εἶναι ὡς τὸ ΑΒ

ΓΔ τετράγωνον, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ τετράγωνον.

ϛ΄. Ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον· ὅτι γίνεται τὸ μὲν ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΕΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΔΓ τῷ ὑπὸ ΒΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΒΓ τῷ ὑπὸ ΕΒΔ.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, συνθέντι καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων καὶ ἀναστρέψαντί ἐστιν, ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΕ τετραγώνῳ· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΔ τετράγωνον· λοιπὸν
H148 [Eucl. II, 5] ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΔΕ [Eucl. II, 3]. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΓ, ἀμφότερα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ τετραγώνου· λοιπὸν [Eucl. II, 6] ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΒΔ [Eucl. II, 2]. γίνεται ἄρα τὰ τρία.

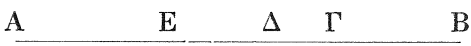
ζ΄. Τὸ Α πρὸς τὸ Β τὸν συνημμένον λόγον ἐχέτω ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β καὶ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε.

τῷ γὰρ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τοῦ Δ πρὸς τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β συνῆπται ἔκ τε τοῦ τοῦ Γ πρὸς Δ καὶ τοῦ τοῦ Ε πρὸς Ζ, τουτέστι τοῦ Δ πρὸς τὸ Η, ἀλλὰ ὁ συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Δ πρὸς τὸ Η ἐστιν ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Η, ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Η. ἐπεὶ δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Η καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Η πρὸς

$\mathrm{x ZE : Γ Δ^2 = AH x HZ : HΓ^2}$.

6. Ἔστω ὡς ἡ ΑΒ : ΒΓ = ΑΔ : ΔΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε· λέγω, ὅτι γίνεται τὸ μὲν ΒΕ x ΕΔ = $\mathrm{EΓ^2}$, τὸ δὲ ΑΔ x ΔΓ = ΒΔ x ΔΕ, τὸ δὲ ΑΒ x ΒΓ = ΕΒ x ΒΔ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ : ΒΓ = ΑΔ : ΔΓ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18), εἶναι ΑΒ + ΒΓ : ΒΓ = ΑΔ + ΔΓ : ΔΓ = ΑΓ : ΓΔ, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ + ΒΓ = ΑΓ + 2ΒΓ, καὶ ἐξ



ὑποθέσεως ΕΓ = 1/2 ΑΓ, εἶναι καὶ ΕΓ + ΓΒ:ΒΓ = ΕΓ:ΓΔ, καὶ δι' ἀναστροφῆς (Εὐκλ. 5, 19), ΒΕ:ΕΓ = ΓΕ:ΕΔ· εἶναι ἄρα τὸ ΒΕxΕΔ = $\mathrm{ΓE^2}$. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν $\mathrm{EΔ^2}$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα (Εὐκλ. 2, 5), τὸ ΑΔxΔΓ = ΒΔxΔΕ (Εὐκλ. 2, 3). Ἐπειδὴ δὲ ΒΕ x ΕΔ = $\mathrm{EΓ^2}$, ἂς ἀφαιρεθῶσι καὶ τὰ δύο ἀπὸ τοῦ $\mathrm{BE^2}$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα (Εὐκλ. 2, 6), τὸ ΑΒxΒΓ = ΕΒxΒΔ (Εὐκλ. 2, 2). Ἐπαληθεύονται ἄρα καὶ αἱ τρεῖς ὑποθέσεις.

7. Ἔστω Α : Β = (Γ : Δ) x (Ε : Ζ)· ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ ἔχει τὸν συγκείμενον λόγον (Α:Β) x (Ζ:Ε). Διότι ἂς γίνῃ Ε : Ζ = Δ : Η. Ἐπειδὴ λοιπὸν Α : Β = (Γ : Δ) x (Ε : Ζ), τουτέστι = Δ : Η, ἀλλὰ (Γ : Δ) x (Δ : Η) = Γ : Η, εἶναι ἄρα Α : Β = Γ : Η. Ἐπειδὴ δὲ Γ:Δ = (Γ : Η) x (Η : Δ), ἀλλ' ὁ λόγος Γ : Η

τὸ Δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ Γ πρὸς τὸ Η ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ὁ δὲ τοῦ Η πρὸς τὸ Δ ἐκ τοῦ ἀνάπαλιν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ Ζ πρὸς τὸ Ε, καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε.

η'. Ἔστω δύο παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΔΖ ἰσογώνια ἴσην ἔχοντα τὴν Β γωνίαν τῇ Ε γωνίᾳ· ὅτι γίνεται, H149 ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕΖ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον.

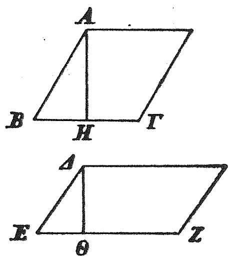
εἰ μὲν οὖν ὀρθαί εἰσιν αἱ Β, Ε γωνίαι, φανερόν· εἰ δὲ μή, ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΑΗ, ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Β γωνία τῇ Ε, ἡ δὲ Η ὀρθὴ τῇ Θ, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ [Eucl. VI, 4]· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘ, ΕΖ· ἔστιν ἄρα ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΒΓ, τουτέστι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘ, ΕΖ, τουτέστι πρὸς τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον.

θ'. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ ΒΓ τῇ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΖΑΕ· ὅτι, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΓ, ΒΖ, γίνεται παράλληλος ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ.

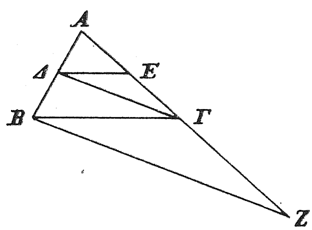
τοῦτο δέ ἐστιν φανερόν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ [Eucl. VI, H150 4], καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ· παράλἐδείχθη = Α : Β, ὁ δὲ λόγος Η : Δ, ἀνάπαλιν = Ζ : Ε, εἶναι ἄρα Γ : Δ = (Α : Β) x (Ζ : Ε).

8. Ἔστω δύο ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΔΖ ἔχοντα τὴν γωνίαν Β = γωνίαν Ε· λέγω ὅτι γίνεται ΑΒ x ΒΓ : ΔΕ x ΕΖ = παραλληλόγραμμον ΑΓ : παραλληλόγραμμον ΔΖ.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν αἱ γωνίαι Β, Ε εἶναι ὀρθαὶ τὸ πρᾶγμα εἶναι φανερόν· ἐὰν δὲ δὲν εἶναι ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΑΗ, ΔΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν γωνία Β = γωνίαν Ε, ἡ δὲ ὀρθὴ Η = ὀρθὴν Θ, τὸ τρίγωνον ΑΒΗ ἔχει τὰς γωνίας του ἴσας πρὸς τὰς τοῦ τριγώνου ΔΕΘ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ : ΑΗ = ΕΔ : ΔΘ (Εὐκλ. 6, 4). Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ : ΑΗ = ΑΒ x ΒΓ : ΑΗ x ΒΓ, ὡς δὲ ΕΔ : ΔΘ = ΔΕ x ΕΖ : ΔΘ x ΕΖ· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 12), ὡς τὸ ΑΒ x ΒΓ : ΔΕ x ΕΖ = ΑΗ x ΒΓ : ΔΘ x ΕΖ = παραλλ. ΑΓ : παραλλ. ΔΖ.



9. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, παράλληλος δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἔστω τὸ $ΓΑ^2$ = ΖΑ x ΑΕ· λέγω, ὅτι ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΓ, ΒΖ, ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ. Τοῦτο δὲ εἶναι φανερόν.



Διότι, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΖΑ : ΓΑ = ΓΑ : ΑΕ, καὶ ΓΑ : ΑΕ = αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων, ΒΑ : ΑΔ (Εὐκλ. 6, 4), καὶ ὡς ἄρα εἶναι ἡ ΖΑ : ΑΓ = ΒΑ : ΑΔ· εἶναι ἄρα παράλληλοι αἱ ΔΓ, ληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΔΓ, ΒΖ [Eucl. VI, 4].

ι'. Ἔστω τρίγωνον μὲν τὸ ΑΒΓ, τραπέζιον δὲ τὸ ΔΕΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ· ὅτι γίνεται, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ καὶ τῆς ΔΕ, οὕτως τὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΔΕΖΗ.

ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΑΘ, ΔΚ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ Θ ὀρθὴ τῇ Κ ὀρθῇ ἴση, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΚ [Eucl. VI, 4]. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ καὶ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ καὶ τῆς ΔΚ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ὑπὸ ΑΘ, ΒΓ ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ καὶ τῆς ΔΚ ἥμισυ τὸ ΔΕΖΗ τραπέζιον· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ καὶ τῆς ΔΕ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖΗ τραπέζιον.

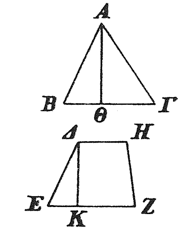
καὶ ἐὰν ᾖ δὲ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ, γίνεται, ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖΗ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ ΔΕΖ, κατὰ τὰ αὐτά. καὶ φανερὸν ἐκ τούτων, ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ,
H151 ἐὰν ᾖ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ ἴσον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ἴσον γίνεται τῷ δὶς ὑπὸ ΔΕΖ, ἐπὶ δὲ τοῦ τραπεζίου ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ καὶ τῆς ΔΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΑ διήχθω τις τυχοῦσα ἡ ΔΕ, καὶ αὐτῇ μὲν παράλληλος

ΒΖ (Εὐκλ. 6, 4).

10. Ἔστω τρίγωνον μὲν τὸ ΑΒΓ, τραπέζιον δὲ τὸ ΔΕΖΗ, ὥστε νὰ εἶναι γωνία ΑΒΓ = γωνίαν ΔΕΖ· λέγω, ὅτι γίνεται ὡς τὸ ΑΒ x ΒΓ : (ΔΗ + ΕΖ) x ΔΕ = τρίγωνον ΑΒΓ: τραπέζιον ΔΕΖΗ.

Διότι ἂς ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΑΘ, ΔΚ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ = γων. ΔΕΖ, ἡ δὲ ὀρθὴ Θ = ὀρθὴν Κ, εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΒΑ : ΑΘ = ΕΔ : ΔΚ (Εὐκλ. 6, 4). Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ : ΑΘ = = ΑΒ x ΒΓ : ΑΘ x ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ : ΔΚ = (ΔΗ + ΕΖ) x ΕΔ : (ΔΗ + ΕΖ) x ΔΚ. Καὶ εἶναι τοῦ μὲν ΑΘ x ΒΓ ἥμισυ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ δὲ (ΔΗ + ΕΖ) x ΔΚ, ἥμισυ τὸ τραπέζιον ΔΕΖΗ· εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΑΒxΒΓ : (ΔΗ + ΕΖ) x ΔΕ = τρίγωνον ΑΒΓ : τραπέζιον ΔΕΖΗ.



Καὶ ἐὰν τὸ ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον, καὶ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ, γίνεται, ὡς τὸ τρίγ. ΑΒΓ : παραλλ. ΔΕΖΗ = ΑΒxΒΓ: 2ΔΕxΕΖ, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους. Καὶ εἶναι φανερὸν ἐκ τούτων, ὅτι τὸ μὲν ΑΒxΒΓ, ἐὰν τὸ ΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, γίνεται ἴσον πρὸς τὸ 2ΔΕxΕΖ, ἐπὶ δὲ τοῦ τραπεζίου γίνεται ἴσον πρὸς τὸ (ΔΗ + ΕΖ)xΔΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ΓΑ, ἂς διαχθῇ τυχοῦσα ἡ ΔΕ, καὶ παράλληλος μὲν πρὸς αὐτὴν ἂς ἀχθῇ

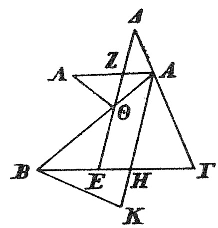
ἤχθω ἡ ΑΗ, τῇ δὲ ΒΓ ἡ ΑΖ· ὅτι γίνεται, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ τετράγωνον.

κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, τῷ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΚΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΑΛ ἐν κύκλῳ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΖΘΛ [Eucl. III, 35; III, 21], καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΒ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΖΘΛ γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία ἴση ἐστὶν τῇ πρὸς τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΚ, οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΘ [Eucl. VI, 4]. ἐπεὶ δέ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ [Eucl. VI, 4], ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἄλλη τις ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ἡγουμένην τὴν ΖΘ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ, οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΑ [Eucl. V,
H152 23]. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, τουτέστιν πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, ὡς δὲ ἡ ΛΖ πρὸς ΖΑ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΖΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΔΖΘ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ.

διὰ δὲ τοῦ συνημμένου. ἐπεὶ ὁ μὲν τῆς ΑΗ πρὸς ΗΒ λόγος ἐστὶν ὁ τῆς ΘΕ πρὸς ΕΒ, τουτέστιν ὁ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ [Eucl. VI, 4], ὁ δὲ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΗΓ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΔΕ πρὸς ΕΓ, τουτέστι τῷ τῆς ΔΖ πρὸς ΖΑ [Eucl. VI, 4], ὁ ἄρα συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ καὶ τοῦ τῆς ΔΖ πρὸς ΖΑ, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ τετράγωνον.

ἡ ΑΗ, πρὸς δὲ τὴν ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι γίνεται, ὡς τὸ $ΑΗ^2:ΒΗ \times ΗΓ = ΔΖ \times ΖΘ:ΖΑ^2$.

Ἄς ληφθῇ πρὸς μὲν τὸ $ΒΗ \times ΗΓ = ΑΗ \times ΗΚ$, πρὸς δὲ τὸ $ΔΖ \times ΖΘ = ΑΖ \times ΖΛ$, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΒΚ, ΘΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία Γ = γων. ΒΚΗ, ἡ δὲ γων. ΔΑΛ εἰς κύκλον εἶναι ἴση πρὸς τὴν γων. ΖΘΛ (Εὐκλ. 3, 21 . 3, 35) (νοεῖται ἐκ κατασκευῆς, ὅτι τὰ σημεῖα ΑΓΚΒ εὑρίσκονται ἐπὶ περιφερείας κύκλου), εἶναι ἄρα καὶ ἡ γωνία ΗΚΒ = γων. ΖΘΛ. Ἀλλὰ καὶ ἡ παρὰ τὸ Η γωνία = πρὸς τὴν παρὰ τὸ Ζ· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΒΗ : ΗΚ = ΛΖ : ΖΘ (Εὐκλ. 6, 4). Ἐπειδὴ δὲ εἶναι, ὡς ἡ ΑΗ : ΗΒ = ΘΕ : ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ:ΕΒ = ΖΘ : ΖΑ, ὡς μεταξὺ παραλλήλων, εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ:ΗΒ = ΘΖ:ΖΑ (Εὐκλ. 6, 4). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς μὲν ἡ ΑΗ:ΗΒ = ΘΖ:ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΒΗ:ΗΚ = ἄλλη τις ἡ ΛΖ: τὴν ἡγουμένην, τὴν ΖΘ, δι' ἴσου ἄρα εἰς τεταραγμένην ἀναλογίαν (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) θὰ εἶναι, ὡς ἡ ΑΗ:ΗΚ = ΛΖ:ΖΑ (Εὐκλ. 5, 23). Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΑΗ:ΗΚ = ΑΗ^2:ΑΗ \times ΗΚ = ΒΗ \times ΗΓ$, ὡς δὲ ἡ $ΛΖ:ΖΑ = ΛΖ \times ΖΑ = ΔΖ \times ΖΘ : ΖΑ^2$· εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $ΑΗ^2 : ΒΗ \times ΗΓ = ΔΖ \times ΖΘ : ΖΑ^2$.



Διὰ δὲ τοῦ γινομένου τῶν λόγων γίνεται ὡς ἑξῆς.

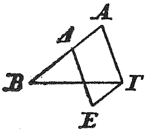
Ἐπειδὴ ὁ μὲν λόγος ΑΗ:ΗΒ = ΘΕ : ΕΒ = ΘΖ : ΖΑ (Εὐκλ. 6, 4), ὁ δὲ ΑΗ:ΗΓ = ΔΕ:ΕΓ = ΔΖ:ΖΑ (Εὐκλ. 6, 4), ὁ λόγος ἄρα $(ΑΗ:ΗΒ) \times (ΑΗ:ΗΓ) = ΑΗ^2:ΒΗ \times ΗΓ = (ΘΖ:ΖΑ) \times (ΔΖ:ΖΑ) = ΔΖ \times ΖΘ:ΖΑ^2$.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

Τοῦ β′

α′. Δύο δοθεισῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ εὐθείας τῆς ΔΕ εἰς τὰς ΑΒ, ΒΓ ἐναρμόσαι εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΔΕ καὶ παράλληλον αὐτῇ.

τοῦτο δὲ φανερόν. ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΒ παράλληλον ἀγάγωμεν τὴν ΕΓ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΓΑ, ἔσται διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ΑΓΕΔ ἡ ΑΓ ἴση τῇ ΔΕ [Eucl. I, 34] καὶ παράλληλος· καὶ ἐνήρμοσται εἰς τὰς δοθείσας εὐθείας τὰς ΑΒ, ΒΓ.



β′. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω, ὡς
H153 *ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καὶ παράλληλος ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ· ὅτι καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἐστιν παράλληλος.*

ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ καὶ συμπιπτέτω ταῖς ΔΕ, ΔΖ κατὰ τὰ Η, Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καί εἰσιν ἴσαι αἱ Β, Ε γωνίαι διὰ τὸ εἶναι δύο παρὰ δύο, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ Γ τῇ Ζ [Eucl. VI, 6], τουτέστιν τῇ Θ [Eucl. I, 29] διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΕΖ, ΗΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΘ [Eucl. I, 28].

γ′. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ μεταξὺ τῶν Γ, Δ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ.

Α Γ Ζ Ε Δ Β

τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα, ὅπως ἂν ἔχῃ ὡς πρὸς τὸ Ε σημεῖον, κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΒ [Eucl. II, 5], ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΖΔ

ΠΑΠΠΟΥ ΛΗΜΜΑΤΑ ΕΙΣ ΤΑ ΚΩΝΙΚΑ

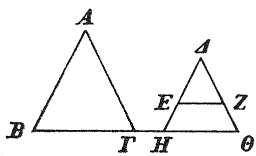
Λήμματα εἰς τὸ 2ον βιβλίον τῶν Κωνικῶν

1. Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ εὐθείας τῆς ΔΕ, νὰ ἐναρμοσθῇ εἰς τὰς ΑΒ, ΒΓ εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν ΔΕ καὶ παράλληλος πρὸς αὐτήν.

Τοῦτο δὲ εἶναι φανερόν. Διότι, ἐὰν διὰ τοῦ Ε φέρωμεν τὴν ΕΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, διὰ δὲ τοῦ Γ ἀχθῇ ἡ ΓΑ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ, θὰ εἶναι, ἐπειδὴ τὸ ΑΓΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον ἡ ΑΓ=ΔΕ (Εὐκλ. 1, 34) καὶ παράλληλος· καὶ εἶναι ἐνηρμοσμένη εἰς τὰς δοθείσας εὐθείας, τὰς ΑΒ, ΒΓ.

2. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω, ὡς ἡ ΑΒ:ΒΓ = ΔΕ:ΕΖ, καὶ παράλληλος ἡ μὲν ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΖ.

Ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΒΓ καὶ ἂς συναντήσῃ τὰς ΔΕ, ΔΖ κατὰ τὰ σημεῖα Η, Θ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς ἡ ΑΒ:ΒΓ = ΔΕ:ΕΖ καὶ αἱ δύο γωνίαι Β, Ε εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι αἱ πλευραί των εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλοι, εἶναι ἄρα καὶ ἡ γωνία Γ = γων. Ζ (Εὐκλ. 6, 6) = Θ, (Εὐκλ. 1, 29), διότι αἱ ΕΖ, ΗΘ εἶναι παράλληλοι· εἶναι ἄρα ἡ ΑΓ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΘ (Εὐκλ. 1, 28).



3. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, καὶ ἡ ΑΓ=ΔΒ, καὶ μεταξὺ τῶν Γ, Δ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω, ὅτι τὸ ΑΔxΔΒ + ΓΕ x ΕΔ = ΑΕ x ΕΒ.

Ἂς τμηθῇ ἡ ΓΔ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, ἀσχέτως πρὸς τὸ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΔ x ΔΒ + ΖΔ² = ΖΒ² (Εὐκλ. 2, 5), ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ΖΔ² = ΓΕ x ΕΔ *ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ [Eucl. II, 5], τῷ δὲ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ [Eucl. II, 5], τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τοῦ ἀπὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΑΕΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΕΒ.*

δʹ. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ
H154 *μεταξὺ τῶν Γ, Δ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΓΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ.*

τετμήσθω γὰρ ἡ ΓΔ δίχα, ὅπως ἂν ἔχῃ ὡς πρὸς τὸ Ε σημεῖον, κατὰ τὸ Ζ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ ἴση ἐστί. τὸ μὲν ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΖ [Eucl. II, 5], τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΖ [Eucl. II, 6]· ὥστε τὸ ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ καὶ τῷ ἀπὸ ΓΖ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΓΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ [Eucl. II, 5]· καὶ κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΖ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ.

εʹ. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν Γ τῇ Ζ, μείζων δὲ ἡ Β τῆς Ε· ὅτι ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ.

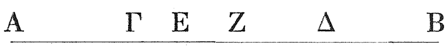
συνεστάτω τῇ Ε γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΒΗ· ἔστι δὲ καὶ ἡ Γ τῇ Ζ ἴση· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ [Eucl. VI, 4]. ἀλλὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ [Eucl. V, 8]· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ.

ϛʹ. Ἐχέτω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ μείζονα λόγον
H155 *ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, ἴση δὲ ἔστω ἡ Γ γωνία τῇ Ζ· ὅτι πάλιν*

$+ZE^2$ (Εὐκλ. 2, 5), πρὸς δὲ τὸ $ZB^2 = AE \times EB + ZE^2$ (Εὐκλ. 2, 5), εἶναι ἄρα τὸ $A\Delta \times \Delta B + \Gamma E \times E\Delta + ZE^2 = AE \times EB + ZE^2$. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ZE^2· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα, τὸ $A\Delta \times \Delta B + \Gamma E \times E\Delta = AE \times EB$.

4. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΔΒ ἴσαι μεταξύ των, καὶ μεταξὺ τῶν Γ, Δ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω, ὅτι τὸ $AE \times EB = \Gamma E \times E\Delta + \Delta A \times A\Gamma$.

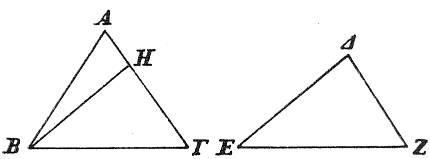
Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΓΔ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, ἀσχέτως πρὸς τὸ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $A\Gamma = ZB$.



Εἶναι ἄρα τὸ μὲν $AE \times EB + EZ^2 = AZ^2$ (Εὐκλ. 2, 5), τὸ δὲ $\Delta A \times A\Gamma + \Gamma Z^2 = AZ^2$ (Εὐκλ. 2, 6)· ὥστε τὸ $AE \times EB + EZ^2 = \Delta A \times A\Gamma + \Gamma Z^2$. Ἀλλὰ τὸ $\Gamma Z^2 = \Gamma E \times E\Delta + EZ^2$ (Εὐκλ. 2, 5) καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν EZ^2· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $AE \times EB = \Gamma E \times E\Delta + \Delta A \times A\Gamma$.

5. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω ἡ μὲν γων. $\Gamma = Z$, ἡ δὲ γων. $B > E$· λέγω, ὅτι $B\Gamma : \Gamma A < EZ : Z\Delta$.

Διότι ἂς κατασκευασθῇ πρὸς τὴν γωνίαν Ε ἴση ἡ ΓΒΗ·



εἶναι δὲ καὶ ἡ γων. $\Gamma =$ γων. Ζ· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ $B\Gamma : \Gamma H = EZ : Z\Delta$ (Εὐκλ. 6, 4). Ἀλλὰ ἡ $B\Gamma : \Gamma A < B\Gamma : \Gamma H$ (Εὐκλ. 5, 8)· καὶ ἄρα ἡ $B\Gamma : \Gamma A < EZ : Z\Delta$.

6. Ἂς εἶναι πάλιν $B\Gamma : \Gamma A > EZ : Z\Delta$, ἔστω δὲ ἡ γωνία

γίνεται ἐλάσσων ἡ Β γωνία τῆς Ε γωνίας.

ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, ἐὰν ἄρα ποιῶ, ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρός τινα, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΖΔ [Eucl. V, 10]. ἔστω πρὸς τὴν ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ [Eucl. VI, 6] ἐλάσσονι οὔσῃ τῆς Ε.

ζʹ. Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ οὕτως, ὥστε εἶναι, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ· ὅτι γίνεται ὅμοιον καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ τριγώνῳ.

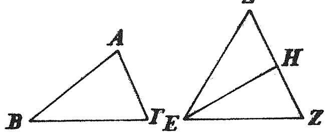
ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΔ καὶ τοῦ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΔ, ὧν ὁ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΑ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΔ [Eucl. VI, 4], διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, λοιπὸν ἄρα ὁ τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΔ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΗ τρίγωνον τῷ ΔΖΘ τριγώνῳ [Eucl. VI, 6].

H156 ηʹ. Διὰ μὲν οὖν τοῦ συνημμένου λόγου, ὡς προγέγραπται, ἔστω δὲ νῦν ἀποδεῖξαι μὴ προσχρησάμενον τῷ συνημμένῳ λόγῳ.

κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΒΓΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΓΚ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΚ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ. τῷ δὲ ὑπὸ ΕΖΘ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΔΖΛ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΕΖ

$Γ =$ γων. Ζ· λέγω, ὅτι πάλιν ἡ γωνία Β γίνεται μικροτέρα τῆς γωνίας Ε.

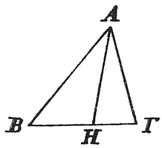
Διότι, ἐπειδὴ $ΒΓ : ΓΑ > ΕΖ : ΖΔ$, ἐὰν ἄρα κάμνω, ὡς $ΒΓ : ΓΑ = ΕΖ :$ εὐθεῖάν τινα Χ, θὰ εἶναι $Χ < ΖΔ$ (Εὐκλ. 5, 10). Ἔστω πρὸς τὴν ΖΗ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΗ. Καὶ αἱ περὶ τὰς

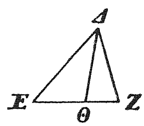


ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα ἡ γωνία $Β =$ γων. ΖΕΗ (Εὐκλ. 6, 6), ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα τῆς Ε.

7. Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἂς διαχθῶσιν αἱ ΑΗ, ΔΘ, οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι, ὡς τὸ $ΒΓ x ΓΗ : ΓΑ^2 = ΕΖ x ΖΘ : ΖΔ^2$· λέγω, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΓ γίνεται ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΘΖ τρίγωνον.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ $ΒΓ x ΓΗ : ΓΑ^2 = ΕΖ x ΖΘ : ΖΔ^2$, ἀλλ' ὁ μὲν λόγος $ΒΓ x ΓΗ : ΓΑ^2 = (ΒΓ : ΓΑ) x (ΗΓ : ΓΑ)$, ὁ δὲ $ΕΖxΖΘ:ΖΔ^2 = (ΕΖ:ΖΔ) x (ΘΖ:ΖΔ)$, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ $ΒΓ : ΓΑ = ΕΖ : ΖΔ$ (Εὐκλ. 6, 4), διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τρι-





γώνων, ὁ ὑπόλοιπος ἄρα λόγος ὁ $ΗΓ : ΓΑ = ΘΖ : ΖΔ$. Καὶ αἱ πλευραὶ εἶναι περὶ ἴσας γωνίας· εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΑΓΗ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΖΘ (Εὐκλ. 6, 6).

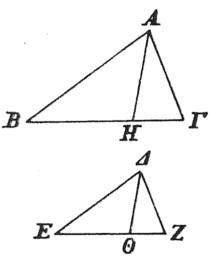
8. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἔγινε διὰ τοῦ γινομένου τῶν λόγων, ἂς γίνῃ δὲ τώρα ἡ ἀπόδειξις χωρὶς νὰ γίνῃ χρῆσις τοῦ γινομένου τῶν λόγων.

Ἂς ληφθῇ τὸ $ΒΓxΓΗ = ΑΓxΓΚ$· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ $ΒΓ: ΓΚ = ΑΓ:ΓΗ$. Ἔστω δὲ τὸ $ΕΖxΖΘ = ΔΖxΖΛ$· εἶναι ἄρα, ὡς πρὸς ΖΛ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. ὑπόκειται δέ, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΑΓΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΔΖΛ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΛΖ πρὸς ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ [Eucl. VI, 4] διὰ τὴν ὁμοιότητα· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ [Eucl. V, 22]. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἐδείχθη ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΗ τρίγωνον τῷ ΔΖΘ τριγώνῳ [Eucl. VI, 6].

ὁμοίως καὶ τὸ ΑΗΒ τῷ ΔΘΕ, ὅτι καὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΕΖ.

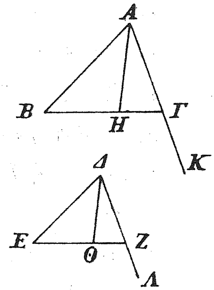
θʹ. Ἔστω ὅμοιον τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΗΒ τῷ ΔΕΘ· ὅτι γίνεται, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ.

H157 ἐπεὶ γὰρ διὰ τὴν ὁμοιότητα ἴση ἐστὶν ὅλη μὲν ἡ Α ὅλη τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΕΔΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΘΔΖ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΔ. ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἦν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ· καὶ ὁ συνημμένος ἄρα τῷ συνημμένῳ ἐστὶν ὁ αὐτός. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ.



ιʹ. Ἄλλως μὴ διὰ τοῦ συνημμένου. κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΒΓΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΓΚ, τῷ δὲ ὑπὸ ΕΖΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΔΖΛ·

ἡ ΕΖ:ΖΛ = ΔΖ:ΖΘ. Ἐλήφθη δέ, ὡς τὸ ΒΓxΓΗ τουτέστι τὸ ΑΓxΓΚ : ΑΓ^2, τουτέστιν, ὡς ἡ ΚΓ:ΓΑ = ΕΖ x ΖΘ, τουτέστι τὸ ΔΖ x ΖΛ : ΔΖ^2, τουτέστιν ἡ ΛΖ : ΖΔ. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ : ΓΑ = ΕΖ : ΖΔ (Εὐκλ. 6, 4), διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ : ΓΚ = ΕΖ : ΖΛ (Εὐκλ. 5, 22). Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΓ:ΓΚ = ἐδείχθη ἡ ΑΓ:ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ:ΖΛ=ΔΖ: ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΓ:ΓΗ=ΔΖ:ΖΘ. Καὶ εἶναι αἱ πλευραὶ περὶ ἴσας γωνίας· εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΑΓΗ πςὸς τὸ τρίγωνον ΔΖΘ (Εὐκλ. 6, 6).



Ὁμοίως εἶναι ὅμοιον καὶ τὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ΔΘΕ, καὶ τὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΔΕΖ.

9. Ἔστω τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΕΖ, τὸ δὲ ΑΗΒ ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΕΘ· λέγω, ὅτι γίνεται, ὡς τὸ ΒΓx ΓΗ:ΓΑ^2=ΕΖxΖΘ:ΖΔ^2.

Διότι, ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων εἶναι ἴση ὅλη μὲν ἡ γωνία Α πρὸς ὅλην τὴν Δ, ἡ δὲ ΒΑΗ =ΕΔΘ, ἡ ὑπόλοιπος ἄρα γωνία ΗΑΓ= ὑπόλοιπον ΘΔΖ. Ἀλλὰ εἶναι καὶ ἡ γωνία Γ=Ζ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΗΓ:ΓΑ =ΘΖ:ΖΔ. Ἀλλ' ἦτο καί, ὡς ἡ ΒΓ:ΓΑ =ΕΖ:ΖΔ. Καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν λόγων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν λόγων. Εἶναι ἄρα, ὡς τὸ ΒΓxΓΗ:ΓΑ^2= ΕΖxΖΘ:ΖΔ^2.

10. Πάλιν, ἄλλη ἀπόδειξις χωρὶς τὸ γινόμενον τῶν λόγων.

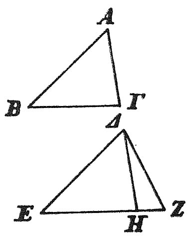
Ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὸ ΒΓxΓΗ =τὸ ΑΓxΓΚ, πρὸς δὲ τὸ *ἔσται πάλιν, ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ τῷ ἐπάνω δείξομεν, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ. ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ [Eucl. VI, 4] διὰ τὴν ὁμοιότητα· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΚΓ πρὸς ΓΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΚΓΑ, ὅ ἐστιν τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς ΖΔ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΛΖΔ, ὅ ἐστιν τὸ ὑπὸ ΕΖΘ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ὁμοίως δὴ δείξομεν, καὶ ἐὰν ᾖ, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς
H158 *τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, ὅτι καὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ ὅμοιον.*

ια'. Ἔστω δύο ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ· ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ.

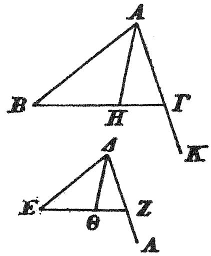
τοῦτο δὲ φανερόν, ὅτι ὅμοιον γίνεται τοῖς πρὸ αὐτοῦ.

ιβ'. Ἔστω ἴση ἡ μὲν Β γωνία τῇ Ε, ἐλάσσων δὲ ἡ Α τῆς Δ· ὅτι ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ.



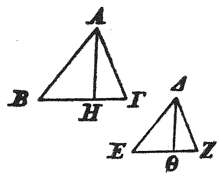
ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἡ Α γωνία τῆς Δ, συνεστάτω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΕΔ [Eucl. VI, 4]. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ πρὸς ΕΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ

ΕΖxΖΘ = τὸ ΔΖxΖΛ. Πάλιν θὰ εἶναι, ὡς μὲν ἡ ΒΓ:ΓΚ = ΑΓ:ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ : ΖΛ = ΔΖ:ΖΘ. Καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὡς ἀνωτέρω, ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶναι, ὡς ἡ ΑΓ : ΓΗ = ΖΔ : ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ : ΓΚ = ΕΖ : ΖΔ. Ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΒΓ : ΓΑ = ΕΖ : ΖΔ (Εὐκλ. 6, 4), διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι, ὡς ἡ ΚΓ:ΓΑ, τουτέστιν, ὡς τὸ ΚΓxΓΑ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ΒΓxΓΗ, πρὸς τὸ $ΑΓ^2$ = ΛΖ:ΖΔ, τουτέστι τὸ ΛΖ x ΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ΕΖxΖΘ, πρὸς τὸ $ΖΔ^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι, καὶ ἐὰν εἶναι, ὡς τὸ ΒΓxΓΗ: $ΑΓ^2$ = ΕΖxΖΘ:$ΖΔ^2$, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΘ.

11. Ἔστω δύο ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΑΗ, ΔΘ· λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ ΒΗ x ΗΓ : $ΑΗ^2$ = ΕΘ x ΘΖ : $ΘΔ^2$.



Τοῦτο δὲ εἶναι φανερόν, ὅτι ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅπως τὰ προηγούμενα.

12. Ἔστω ἡ μὲν γωνία Β = Ε, ἡ δὲ Α < Δ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΒ : ΒΑ < ΖΕ : ΕΔ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία Α < Δ, ἂς κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς αὐτὴν ἡ ΕΔΗ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΓΒ:ΒΑ = ΕΗ : ΕΔ (Εὐκλ. 6, 4). Ἀλλὰ καὶ ΕΗ : ΕΔ < ΖΕ : ΕΔ (Εὐκλ. 5, 8)· καὶ ἄρα

[Eucl. V, 8]· καὶ ἡ ΓΒ ἄρα πρὸς τὴν ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ. καὶ πάντα δὲ τὰ τοιαῦτα τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ δείξομεν.

ιγʹ. Ἔστω, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, καὶ ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΗΓ ἔστω ἴση, ἡ δὲ ΓΗ πρὸς ΗΑ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς ΘΔ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΖΘ τῆς ΘΕ.

H159 *ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΗΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως ὑπέκειτο τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ· καὶ τὸ ὑπὸ ΕΘΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΖΘ τοῦ ὑπὸ ΕΘΖ [Eucl. V, 10]· ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΖΘ τῆς ΘΕ.*

Τοῦ γʹ

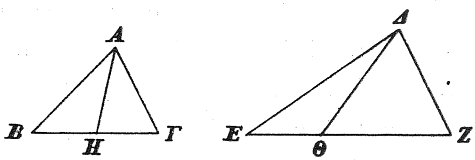
αʹ. Καταγραφὴ ἡ ΑΒΓΔΕΖΗ, ἔστω δὲ ἴση ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ· ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΒΖ, ΓΕ ἐπὶ τὰ Κ, Θ σημεῖα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΘΑ τῇ ΑΚ [Eucl. VI, 4]. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΘΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ [Eucl. VI, 4], οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΑ [Eucl. Y, 7], τουτέστιν ἡ ΓΖ πρὸς ΖΑ [Eucl. VI, 4]· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ [Eucl. VI, 2].

εἶναι ΓΒ:ΒΑ $<$ ΖΕ:ΕΔ. Καὶ τὰ παρόμοια δὲ τὰ ἀποδεικνύομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

13. Ἔστω, ὡς τὸ ΒΗxΗΓ:ΑΗ² $=$ ΕΘxΘΖ:ΔΘ², καὶ ἔστω ἡ μὲν ΒΗ $=$ ΗΓ, ἡ δὲ ΓΗ:ΗΑ $<$ ΖΘ:ΘΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΖΘ $>$ ΘΕ.

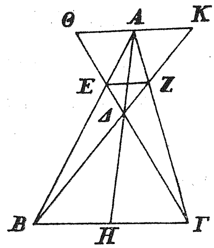
Διότι, ἐπειδὴ ΓΗ² : ΗΑ² $<$ ΖΘ² : ΘΔ², ἀλλὰ τὸ ΓΗ² $=$ ΒΗxΗΓ, τὸ ἄρα ΒΗxΗΓ:ΑΗ² $<$ ΖΘ²:ΘΔ². Ἀλλά, ὡς τὸ ΒΗx



ΗΓ : ΑΗ² $=$ ἐλήφθη τὸ ΕΘxΘΖ:ΘΔ²· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΕΘxΘΖ: ΘΔ² $<$ ΖΘ²:ΘΔ². Εἶναι ἄρα ΖΘ² $>$ ΕΘxΘΖ (Εὐκλ. 5, 10)· ὥστε ἡ ΖΘ $>$ ΘΕ.

Λήμματα εἰς τὸ 3ον βιβλίον τῶν Κωνικῶν

1. Σχῆμα τὸ ΑΒΓΔΕΖΗ, ἔστω δὲ ἡ ΒΗ $=$ ΗΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.



Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Α πρὸς τὴν ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ, καὶ ἂς προεκβληθῶσιν αἱ ΒΖ, ΓΕ μέχρι τῶν σημείων Κ, Θ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ἡ ΒΗ $=$ ΗΓ, εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΘΑ $=$ ΑΚ (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΒΓ:ΘΑ, τουτέστιν, ὡς ἡ ΒΕ:ΕΑ (Εὐκλ. 6, 4), οὕτως ἡ ΒΓ:ΚΑ (Εὐκλ. 5, 7), τουτέστιν ἡ ΓΖ:ΖΑ (Εὐκλ. 6, 4)· εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ (Εὐκλ. 6, 2).

H160 β'. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς Α, Δ γωνίας, ἴσον δὲ ἔστω τὸ ὑπὸ ΒΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ· ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον.

ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΒΗ, ΕΘ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΕΔ [Eucl. VI, 4]· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ. ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΒΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ ἥμισύ ἐστι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

φανερὸν δή, ὅτι καὶ τὰ διπλᾶ αὐτῶν παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστίν.

γ'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ παράλληλος ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ· ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον.

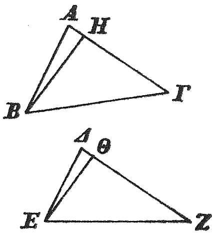
ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ [Eucl. VI, 19]. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ διπλασίονα λόγον ἔχει
H161 ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον.

δ'. Ἴσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ΔΕΑ.

τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα τῷ Ζ· τὸ Ζ ἄρα διχοτομία ἐστὶ

2. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα ἴσας τὰς γωνίας Α, Δ ἔστω δὲ τὸ ΒΑxΑΓ = ΕΔxΔΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον.

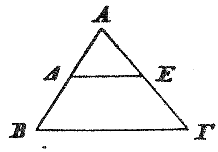
Ἄς ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΒΗ, ΕΘ· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΗΒ:ΒΑ = ΕΘ:ΕΔ (Εὐκλ. 6, 4)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΗ x ΑΓ : ΒΑ x ΑΓ = ΕΘ xΔΖ : ΕΔxΔΖ. Ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 12) εἶναι, ὡς τὸ ΒΗ x ΑΓ:ΕΘxΔΖ = ΒΑ x ΑΓ : ΕΔ x ΔΖ. Εἶναι δὲ τὸ ΒΑ x ΑΓ = ΕΔ x ΔΖ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΒΗ x ΗΓ = ΕΘ x ΔΖ. Ἀλλὰ τοῦ 1/2ΒΗ x ΑΓ = τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ 1/2 ΕΘxΔΖ = τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ = τρίγωνον ΔΕΖ.



Εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι καὶ τὰ διπλάσια αὐτῶν, τὰ παραλληλόγραμμα εἶναι ἴσα μεταξύ των.

3. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ $ΒΑ^2:ΑΔ^2$ = τρίγωνον ΑΒΓ: τρίγωνον ΑΔΕ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ (Εὐκλ. 6, 2), εἶναι ἄρα τρίγωνον ΑΒΓ : τρίγωνον ΑΔΕ = $ΒΑ^2 : ΑΔ^2$ (Εὐκλ. 6, 19). Ἀλλὰ καὶ $ΒΑ^2 : ΑΔ^2 = ΒΑ^2 : ΑΔ^2$· εἶναι ἄρα, ὡς τὸ $ΒΑ^2:ΑΔ^2$ = τρίγ. ΑΒΓ : τρίγ. ΑΔΕ.



4. Ἔστω ΑΒ = ΓΔ καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω, ὅτι τὸ ΓΕ x ΕΒ — ΔΕ x ΕΑ = ΓΑ x ΑΒ.

Ἄς τμηθῇ ἡ ΒΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ· τὸ Ζ ἄρα διχοτο-

καὶ τῆς ΑΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΓΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ [Eucl. II, 6], ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΕΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ, καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ ΑΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΑΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΖ, κοινὸν ἐκκεκρούσθω τὸ ἀπὸ ΒΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΓΑΒ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΕΑ. ὥστε τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ΔΕΑ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε′. Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον ᾖ μεταξὺ τῶν Α, Β σημείων, τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ἔλασσον ἔσται τῷ αὐτῷ χωρίῳ, οὗπέρ ἐστιν κατὰ τὰ αὐτὰ ἡ ἀπόδειξις.

ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον ᾖ μεταξὺ τῶν Β, Γ, τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΑΕΔ ἔλασσον ἔσται τῷ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ.

ς′. Ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, καὶ δύο σημεῖα τὰ Δ, Ε· ὅτι τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΕΓ καὶ δὶς τῶν ἀπὸ ΒΔ, ΒΕ τετραγώνων.

τοῦτο δὲ φανερόν· τὸ μὲν γὰρ δὶς ἀπὸ ΑΒ διὰ τῶν διχο-
H162 *τομιῶν ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΑΔΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΔΒ, τὸ δὲ δὶς ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΑΕΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΕΒ τετραγώνῳ [Eucl. II, 5].*

ζ′. Ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΕΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΔ.

τετμήσθω δίχα ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ οὖν τὸ δὶς ἀπὸ τῆς ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δίς ὑπὸ ΑΓΔ καὶ δὶς ἀπὸ ΓΖ [Eucl. II, 5], κοινοῦ προστεθέντος τοῦ δὶς ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τό τε δὶς ὑπὸ ΑΓΔ καὶ τὰ δὶς ἀπὸ τῶν ΕΖΓ τοῖς δὶς ἀπὸ τῶν μεῖ καὶ τὴν ΑΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $\Gamma E \times EB + BZ^2 = EZ^2$ (Εὐκλ. 2, 6), ἀλλὰ καὶ τὸ $\Delta E \times EA + AZ^2 = EZ^2$, καὶ εἶναι τὸ $AZ^2 =$

Ε Α Β Ζ Γ Δ

$\Gamma A \times AB + BZ^2$, ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν BZ^2· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $\Gamma E \times EB = \Gamma A \times AB + \Delta E \times EA$. Ὥστε τὸ $\Gamma E \times EB - \Delta E \times EA = \Gamma A \times AB$.

5. Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον εἶναι μεταξὺ τῶν σημείων Α, Β εἶναι κατὰ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν $\Gamma E \times EB + \Delta E \times EA = \Gamma A \times AB$.

Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον εἶναι μεταξὺ τῶν Β, Γ, τὸ $\Gamma E \times EB + AB \times B\Delta = AE \times E\Delta$ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν.

6. Ἔστω ἡ $AB = B\Gamma$ καὶ δύο σημεῖα τὰ Δ, Ε· λέγω, ὅτι $4AB^2 = 2A\Delta \times \Delta\Gamma + 2AE \times E\Gamma + 2B\Delta^2 + 2BE^2$.

Α Δ Ε Β Γ

Τοῦτο δὲ εἶναι φανερόν· διότι τὸ μὲν $2AB^2$, διὰ τῶν διχοτομιῶν εἶναι $= 2A\Delta \times \Delta\Gamma + 2\Delta B^2$, τὸ δὲ $2AB^2 = 2AE \times E\Gamma + 2EB^2$ (Εὐκλ. 2, 5).

7. Ἔστω ἡ $AB = \Gamma\Delta$ καὶ σημεῖον τὸ Ε· λέγω, ὅτι $AE^2 + E\Delta^2 = BE^2 + E\Gamma^2 + 2A\Gamma \times \Gamma\Delta$.

Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ζ. Ἐπειδὴ λοιπὸν

Ε Α Β Ζ Γ Δ

$2\Delta Z^2 = 2A\Gamma \times \Gamma\Delta + 2\Gamma Z^2$ (Εὐκλ. 2, 5), ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ κοινὸν $2EZ^2$, θὰ εἶναι $2A\Gamma \times \Gamma\Delta + 2EZ^2 + 2Z\Gamma^2 = 2\Delta Z^2 + 2ZE^2$. Ἀλλὰ $2\Delta Z^2 + 2ZE^2 = AE^2 + E\Delta^2$, *ΔΖ, ΖΕ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν δὶς ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ τετράγωνα, τοῖς δὲ δὶς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΕΓ τετράγωνα [Eucl. II, 10]· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΕΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΔ.*

η'. Ἔστω τὸ ὑπὸ ΒΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΑ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ.

κοινὸν γὰρ ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΓΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τῶν ΔΑΓ, ΑΓΔ [Eucl. II, 2; II, 3]. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΒΔ, ΑΓ [Eucl. II, 1], κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ·
H163 *λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΓΑ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΔΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

θ'. Ἔστω τὸ ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ τετραγώνῳ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ.

κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΕ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΓΔ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ [Eucl. II, 6], τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΒΓΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΓΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΓΑ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΕΒ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΔ ὅλῃ τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν.

ι'. Ἔστω πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΔ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ.

κείσθω τῇ ΔΒ ἴση ἡ ΑΕ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΒΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΕΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔ, ΑΓ [Eucl. II, 1], τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΕΑΓ, καὶ $2\Gamma Z^2 + 2ZE^2 = BE^2 + E\Gamma^2$ (Εὐκλ. 2, 10)· εἶναι ἄρα $AE^2 + E\Delta^2 = BE^2 + E\Gamma^2 + 2A\Gamma \times \Gamma\Delta$.

8. Ἔστω τὸ $BA \times A\Gamma + \Gamma\Delta^2 = \Delta A^2$· λέγω, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta = \Delta B$.

Διότι, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $\Gamma\Delta^2$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $BA \times A\Gamma = \Delta A \times A\Gamma + A\Gamma \times \Gamma\Delta$ (Εὐκλ. 2, 2· 2, 3).

Α Γ Δ Β

Ἐπειδὴ δὲ τὸ $BA \times A\Gamma = \Delta A \times A\Gamma + B\Delta \times A\Gamma$ (Εὐκλ. 2, 1), ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $\Delta A \times A\Gamma$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $A\Gamma \times \Delta B = \Delta\Gamma \times \Gamma A$. Εἶναι ἄρα ἡ $\Delta\Gamma = \Delta B$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $A\Gamma \times \Gamma B + \Gamma\Delta^2 = \Delta B^2$· λέγω, ὅτι ἡ $A\Delta = \Delta B$.

Ἂς ληφθῇ πρὸς τὴν $\Gamma\Delta = \Delta E$· εἶναι ἄρα τὸ $\Gamma B \times BE +$

Α Γ Δ Ε Β

ΔE^2, τουτέστι $\Gamma B \times BE + \Gamma\Delta^2 = \Delta B^2$ (Εὐκλ. 2, 6) $= B\Gamma \times \Gamma A + \Gamma\Delta^2$· ὥστε τὸ $\Gamma B \times BE = B\Gamma \times \Gamma A$· εἶναι ἄρα ἡ $A\Gamma = EB$. Ἀλλὰ καὶ ἡ $\Gamma\Delta = \Delta E$· ὅλη ἄρα ἡ $A\Delta =$ ὅλην τὴν ΔB.

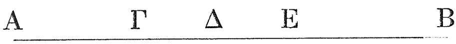
10. Ἔστω πάλιν τὸ $BA \times A\Gamma + \Delta B^2 = A\Delta^2$· λέγω, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta = \Delta B$.

Ἂς ληφθῇ πρὸς τὴν $\Delta B = AE$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $BA \times$

Ε Α Γ Δ Β

$A\Gamma + \Delta B^2$, τουτέστι $BA \times A\Gamma + EA^2 = A\Delta^2$, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $\Delta A \times A\Gamma$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα (Εὐκλ. 2, 1) τὸ $B\Delta \times A\Gamma$, τουτέστι τὸ $EA \times A\Gamma + EA^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΑ, ὅ ἐστιν τὸ ὑπὸ ΓΕΑ [Eucl. II, 3], ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔΓ [Eucl. II, 2]. ἴση ἄρα [Eucl. VI, 16; V, 18; V, 9] ἐστὶν ἡ ΕΑ, τουτέστιν ἡ ΒΔ, τῇ ΔΓ.

ια'. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἐφ' ἧς γ̄ σημεῖα τὰ Γ, Δ, Ε οὕτως, ὥστε ἴσην μὲν εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΕΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΕΔ τῷ ἀπὸ ΕΓ· ὅτι γίνεται, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ.



H164 ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΓ, ἀνάλογον [Eucl. VI, 17] καὶ ἀναστρέψαντι καὶ δὶς τὰ ἡγούμενα καὶ διελόντι· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ.

ιβ'. Ἔστω πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΕ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΒΔ.

ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΕ, ἀνάλογόν ἐστιν [Eucl. VI, 17], ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΕ, τουτέστιν

πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ, τουτέστιν ἡ ΑΓ, πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ ὅλη πρὸς ὅλην [Eucl. V, 12] καὶ ἀναστρέψαντι καὶ χωρίον χωρίῳ [Eucl. VI, 16]· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΒΔ.

φανερὸν δέ, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΔΓ· ἐὰν γὰρ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ ΓΔ κοινὸν ἀπὸ τῆς τοῦ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἰσότητος, γίνεται [Eucl. II, 3; II, 5].

τὸ ΓΕxΕΑ (Εὐκλ. 2, 3) = ΑΔxΔΓ (Εὐκλ. 2, 2)· εἶναι ἄρα ἡ ΕΑ, τουτέστιν ἡ ΒΔ = ΔΓ (Εὐκλ. 6, 16 . 5, 18 . 5, 9).

11. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶναι τὰ τρία σημεῖα Γ, Δ, Ε οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ἡ μὲν ΒΕ = ΕΓ (1), τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΑΕxΕΔ = ΕΓ²· λέγω, ὅτι γίνεται, ὡς ἡ ΒΑ:ΑΓ = ΒΔ:ΔΓ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΕxΕΔ = ΕΓ², ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ΑΕ: ΕΓ = ΕΓ:ΕΔ, καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων εἶναι ΑΕ: (ΑΕ — ΕΓ) = ΕΓ:(ΕΓ — ΕΔ), ἤτοι ΑΕ:ΑΓ = ΕΓ:ΓΔ (2) καὶ δὶς οἱ ἡγούμενοι ὅροι εἶναι 2ΑΕ:ΑΓ = 2ΕΓ:ΓΔ (3)

Ἀλλὰ 2ΑΕ = ΑΕ + ΑΓ + ΓΕ = ΑΒ + ΑΓ καὶ 2ΕΓ = ΓΒ (4) Ἐκ τῶν (1, 2, 3, 4) ἔχομεν ΑΒ + ΑΓ:ΑΓ = ΓΒ:ΓΔ, καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων [(α:β = γ:δ, διὰ διαιρέσεως τῶν λόγω', διελόντι, εἶναι (α - β):β = (γ - δ):δ)], εἶναι ΑΒ:ΑΓ = ΒΔ:ΓΔ.

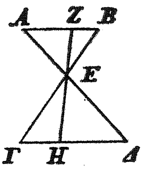
12. Ἔστω πάλιν τὸ ΒΓxΓΔ = ΓΕ², ἴση δὲ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒxΒΕ = ΓΒxΒΔ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΒΓxΓΔ = ΓΕ², ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ΒΓ: ΓΕ = ΓΕ:ΓΔ, καὶ ἐπειδὴ ΓΕ = ΑΓ, εἶναι ΒΓ:ΑΓ = ΑΓ:ΓΔ, (1), καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18) εἶναι ΒΓ + ΑΓ:ΑΓ = ΑΓ + ΓΔ:ΓΔ, καὶ ἐκ τοῦ σχήματος, ΑΒ:ΑΓ = ΑΔ:ΓΔ, (2), καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5 ὁρ. 12), ΑΒ:ΑΔ = ΑΓ:ΓΔ, καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 17), ΑΒ — ΑΔ:ΑΔ = ΑΓ — ΓΔ:ΓΔ, εἶναι ΒΔ:ΑΔ = ΔΕ:ΓΔ, καὶ ἐναλλάξ, ΒΔ:ΔΕ = ΑΔ:ΓΔ καὶ ἐκ τῆς (2), ΒΔ:ΔΕ = ΑΒ:ΑΓ, καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 19) εἶναι ΒΔ:ΒΔ—ΔΕ = ΑΒ:ΑΒ—ΑΓ, (καὶ ἐκ τοῦ σχήματος) ΒΔ: ΕΒ = ΑΒ:ΒΓ καὶ ἐκ ταύτης ΑΒxΒΕ = ΓΒxΒΔ.

Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ΑΔxΔΕ = ΒΔxΔΓ· διότι, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ΒΓxΓΔ = ΓΕ², τὸ ΓΔ², μένει ΑΔxΔΕ = ΒΔxΔΓ (Εὐκλ. 2, 3 καὶ 2, 5, καὶ ἐκ τοῦ *ιγʹ*. *Εἰς δύο παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΓΔ διά τε τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Ε τρεῖς διήχθωσαν αἱ ΑΕΔ, ΒΕΓ, ΖΕΗ· ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΔ.*

διὰ τοῦ συνημμένου φανερόν· ὡς μὲν γὰρ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΗΓ [Eucl. VI, 4], καὶ σύγκειται ἐκ τούτων τὰ χωρία· μένει ἄρα.

H165 *ἔστι δὲ καὶ οὕτως μὴ προσχρησάμενον τῷ συνημμένῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΕΓ [Eucl. VI, 4], καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. ἀλλὰ καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ [Eucl. VI, 4]· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. ἀλλὰ καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΖΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΔ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΔ.*



Τοῦ εʹ

αʹ. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι, εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΔΓ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ, γίνεται ὀρθὴ ἡ Α γωνία, εἰ δὲ μεῖζον, ἀμβλεῖα, εἰ δὲ ἔλασσον, ὀξεῖα.

Ἔστω πρότερον ἴσον· ἀνάλογον ἄρα καὶ περὶ ἴσας γω-
Hu954 *νίας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὥστε ὀρθή*

σχήματος).

13. Εἰς δύο παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΓΔ, ἃς διαχθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ε τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ΑΕΔ, ΒΕΓ, ΖΕΗ· λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ ΑΕxΕΒ:ΑΖxΖΒ=ΓΕxΕΔ:ΓΗxΗΔ.

Τοῦτο εἶναι φανερὸν διὰ τοῦ γινομένου τῶν λόγων (συνημμένος λόγος=γινόμενον λόγων)· διότι, ὡς μὲν ἡ ΑΕ:ΕΔ=ΑΖ:ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΒΕ:ΕΓ=ΖΒ:ΗΓ (Εὐκλ. 6, 4) καὶ τὸ γινόμενον τῶν λόγων εἶναι : ΑΕxΒΕ/ΕΔxΕΓ = ΑΖxΖΒ/ΗΔxΗΓ ἢ ΑΕxΒΕ/ΑΖxΖΒ = ΕΔxΕΓ/ΗΔxΗΓ· εἶναι ἄρα ὀρθόν.

Ἀποδεικνύεται δὲ καὶ ὡς ἑξῆς, χωρὶς τὴν χρῆσιν τοῦ γινομένου τῶν λόγων. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΑΕ:ΕΒ=ΕΔ:ΕΓ (Εὐκλ. 6, 4), εἶναι ἄρα καί, ὡς ΑΕxΕΒ:ΕΒ² =ΔΕxΕΓ:ΕΓ²(1). Ἀλλὰ καί, ὡς τὸ ΒΕ²:ΒΖ² = ΕΓ²:ΓΗ²(2) (Εὐκλ. 6, 4)· δι' ἴσου ἄρα (=διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν 1 καὶ 2) εἶναι ΑΕxΕΒ:ΖΒ² = ΓΕxΕΔ:ΓΗ² (3). Ἀλλὰ εἶναι καὶ ὡς τὸ ΖΒ²:ΒΖxΖΑ = ΓΗ²:ΓΗxΗΔ (4). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν 3 καὶ 4 εἶναι ΑΕxΕΒ/ΑΖxΖΒ = ΓΕxΕΔ/ΓΗxΗΔ .

Λήμματα εἰς τὸ 5ον βιβλίον τῶν Κωνικῶν

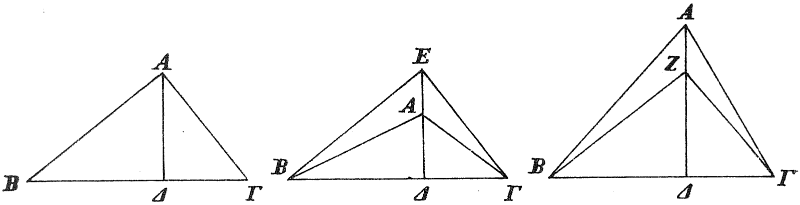
1. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἃς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι, ἐὰν μὲν εἶναι τὸ ΒΔxΔΓ=ΑΔ², ἡ γωνία Α γίνεται ὀρθή, ἐὰν δὲ ΒΔxΔΓ 〉 ΑΔ² ἡ γωνία Α γίνεται ἀμβλεῖα, ἐὰν δὲ μικρότερον, γίνεται ὀξεῖα.

Ἔστω προηγουμένως ἴσον· εἶναι ἄρα ἀνάλογοι αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί· εἶναι ἄρα ἡ γωνία Α = μὲ τὴν εἰς τὸ Δ,

---

Σημ.: Ὅπου παραπλεύρως τοῦ ἀρχαίου κειμένου σημειοῦται Hu, δηλοῦται ἡ σελὶς τῆς ἐκδόσεως Πάππου Συναγωγή, Hultsch, 1877 Βερολῖνον.

ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία. ἀλλὰ ἔστω μεῖζον, καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ ΕΓ. ἔσται ἄρα ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία. καὶ αὐτῆς μείζων ἡ Α γωνία· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία. ἀλλὰ ἔστω πά-



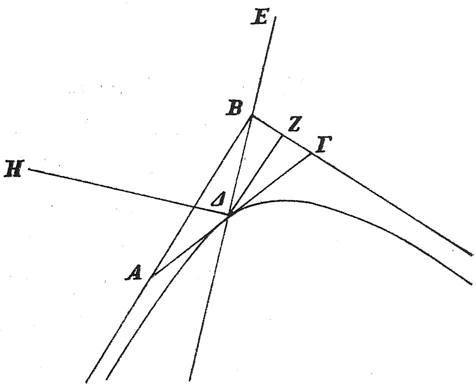
λιν ἔλασσον, καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ ΖΓ· ἔσται δὴ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνία. καὶ αὐτῆς ἐλάσσων ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία.

β'. Θέσει οὐσῶν δύο εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Δ, γράψαι διὰ τοῦ Δ ὑπερβολὴν περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ ΒΓ.

Γεγονέτω· κέντρον ἄρα αὐτῆς ἐστι τὸ Β. ἐπεζεύχθω οὖν ἡ ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθω, διάμετρος ἄρα ἐστί. κείσθω τῇ ΔΒ ἴση ἡ ΒΕ· δοθεῖσα ἄρα ἐστίν, ὥστε δοθέν ἐστι, τὸ Ε καὶ πέρας τῆς διαμέτρου. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν
Hu956 ΒΓ κάθετος ἡ ΔΖ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ. καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Γ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστί. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν· δέδοται ἄρα ἡ ΑΓ τῷ μεγέθει. καὶ ἔσται ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, διὰ τὸ καὶ τὴν ΒΖ τῇ ΖΓ ἴσην εἶναι. ἔστω δὴ ὀρθία τοῦ

ὥστε ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή. Ἔστω τώρα μεγαλύτερον καὶ ἂς ληφθῇ ΒΔxΔΓ=ΔΕ^2, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΕΓ· εἶναι ἄρα ὀρθὴ ἡ γωνία ΒΕΓ. Καὶ εἶναι γωνία Α $\rangle$ ΒΕΓ· εἶναι ἄρα ἀμβλεῖα ἡ γωνία Α. Ἀλλὰ ἔστω πάλιν μικρότερον, καὶ ἂς ληφθῇ ΒΔxΔΓ=ΔΖ^2, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΒΖ, ΖΓ· εἶναι λοιπὸν ὀρθὴ ἡ γωνία ΒΖΓ. Καὶ ἡ παρὰ τὸ Α γωνία εἶναι μικροτέρα αὐτῆς· εἶναι ἄρα ὀξεῖα ἡ γωνία Α.

2. Δίδονται ὑπό τινα γωνίαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ καὶ τὸ σημεῖον Δ, ἐντὸς τῆς γωνίας. Νὰ γραφῇ διὰ τοῦ Δ ὑπερβολὴ περὶ τὰς ἀσυμπτώτους ΑΒ, ΒΓ. Ἔστω, ὅτι ἐγράφη· εἶναι ἄρα κέντρον αὐτῆς τὸ Β. Ἂς ἐπιζευχθῇ τώρα ἡ ΔΒ καὶ ἂς ἐκβληθῇ αὕτη, εἶναι ἄρα διάμετρος. Ἂς ληφθῇ πρὸς τὴν ΔΒ=ΒΕ. Εἶναι αὕτη ἄρα δοθεῖσα, ὥστε καὶ τὸ Ε εἶναι δοθὲν καὶ πέρας τῆς διαμέτρου. Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΔΖ· εἶναι ἄρα τὸ Ζ δοθὲν (Εὐκλ. Δεδομένα 28 . 32)· Ἂς ληφθῇ ΒΖ=ΖΓ· δοθὲν ἄρα



εἶναι καὶ τὸ Γ. Καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΔ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Α· ἔχει δοθῇ ἄρα κατὰ τὴν θέσιν (ἡ ΓΔ). Ἀλλὰ ἔχει δοθῇ κατὰ τὴν θέσιν καὶ ἡ ΑΒ· εἶναι ἄρα δοθὲν τὸ Α (Εὐκλ. Δεδομένα 25). Εἶναι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν· ἔχει δοθῇ ἄρα ἡ ΑΓ κατὰ τὸ μέγεθος. Καὶ εἶναι ἡ ΑΔ= ΔΓ, διότι καὶ ἡ ΒΖ = ΖΓ. Ἔστω τώρα παράμεπρὸς τῇ ΕΔ εἴδους ἡ ΔΗ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ ΔΓ δυνάμει ἐστὶν δ′ τοῦ ὑπὸ ΕΔΗ. ἀλλὰ καὶ τοῦ ἀπὸ ΑΓ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΕΔΗ τῷ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνῳ. δοθὲν δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΗ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΕΔ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΔ, ὥστε δοθὲν τὸ Η. ἐπεὶ οὖν θέσει δεδομένων δύο εὐθειῶν ἐν ἐπιπέδῳ τῶν ΕΔ ΔΗ ὀρθῶν ἀλλήλαις κειμένων, καὶ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Δ ὑπὸ τῆς ΑΔΒ γωνίας γίνεται ὑπερβολή, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΕΔ κορυφὴ δὲ τὸ Δ, αἱ δὲ καταγόμεναι κατάγονται ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, δυνάμεναι τὰ παρὰ τὴν ΔΗ παρακείμενα, πλάτη ἔχοντα ἃ αὐταὶ ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τῆς ἐπ᾽ εὐθείας τῇ διαμέτρῳ πρὸς τῷ Δ, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΕΔΗ, θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ τομή.

Hu958 Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστωσαν αἱ τῇ θέσει δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΒ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ αὐτῇ ἴση κείσθω ἡ ΒΕ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ τῇ ΒΖ ἴση κείσθω ἡ ΖΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α, καὶ τῇ ΔΕ προσανήχθω ἡ ΔΗ, καὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΕΔΗ, καὶ γεγράφθω, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐλέγομεν, περὶ διάμετρον ΔΕ ὑπερβολή· λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

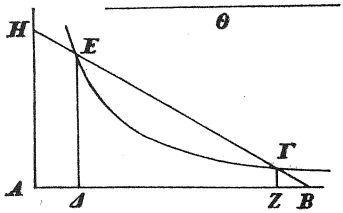
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ ΑΔ ΔΓ δ′ ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου, τουτέστι τοῦ ὑπὸ ΕΔΗ, τουτέστι τοῦ πρὸς τῇ ΕΔ διαμέτρῳ εἴδους. ἐὰν δὲ ᾖ τοῦτο, τρος τοῦ παρὰ τὴν διάμετρον (πλαγίου ἄξονος) ΕΔ σχήματος ἡ ΔΗ· εἶναι ἄρα $ΑΔ^2=ΔΓ^2 = 1/4$ ΕΔxΔΗ (Ἀπολλ. Κων. 2, 3). Ἀλλὰ εἶναι καὶ $=1/4ΑΓ^2$· εἶναι ἄρα ΕΔxΔΗ $=ΑΓ^2$. Εἶναι δὲ δοθὲν τὸ $ΑΓ^2$· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΕΔxΔΗ. Καὶ εἶναι δοθεῖσα ἡ ΕΔ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΔ, ὥστε δοθὲν καὶ τὸ Η. Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅταν ἔχωσι δοθῇ δύο εὐθεῖαι εἰς ἐπίπεδον αἱ ΕΔ, ΔΗ, κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, καὶ ἀπὸ δοθέντος σημείου τοῦ Δ, ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΔΒ γίνεται ὑπερβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν εἶναι ἡ ΕΔ κορυφὴ δὲ τὸ Δ, αἱ δὲ καταγόμεναι εὐθεῖαι κατάγονται εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν τὴν ΑΔΒ, τὰ τετράγωνα τῶν ὁποίων εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ παραβεβλημένα παρὰ τὴν ΔΗ, ἔχοντα πλάτη, ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα αἱ εὐθεῖαι αὗται ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τῆς ἐπ' εὐθείας πρὸς τὴν διάμετρον κειμένην, πρὸς τὸ Δ, ὑπερβάλλοντα (ὑπερέχοντα) κατὰ σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΔxΔΗ, κατὰ τὴν θέσιν ἄρα ἔχει δοθῇ ἡ κωνικὴ τομή.

Ἡ σύνθεσις δὲ τοῦ προβλήματος γίνεται ὡς ἑξῆς· ἔστωσαν αἱ κατὰ τὴν θέσιν δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΒ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Ε, καὶ ἂς ληφθῇ ΔΒ=ΒΕ, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς τὴν ΒΖ=ΖΓ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΔ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Α, καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΔΗ, καὶ ἔστω $ΑΓ^2=$ΕΔxΔΗ, καὶ ἂς γραφῇ, ὡς ἐλέχθη κατὰ τὴν ἀνάλυσιν, περὶ διάμετρον τὴν ΔΕ ὑπερβολή· λέγω, ὅτι αὕτη πληροῖ τὸ πρόβλημα.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΖ=ΖΓ, εἶναι ἄρα ΑΔ=ΔΓ· ἑκάτερον ἄρα τῶν $ΑΔ^2$, $ΔΓ^2 = 1/4ΑΓ^2$, τουτέστι $=1/4$ΕΔxΔΗ, τουτέστι, τοῦ σχήματος τῆς διαμέτρου ΕΔ (ὡς τοῦτο λέγεται κατὰ τὸ τέλος τῆς ἀναλύσεως). Ἐὰν δὲ τοῦτο συμβαίνῃ, ἔχει ἀποδέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ, ὅτι ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΑΒ ΒΓ τῆς ὑπερβολῆς.

γʹ. Θέσει εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ δοθὲν τὸ Γ. διήχθω ἡ ΒΓ, κείσθω δοθεῖσα ἡ ΒΔ, ὀρθὴ ἀνήχθω ἡ ΔΕ· ὅτι τὸ Ε ἅπτεται [θέσει κώνου τομῆς] ὑπερβολῆς ἐρχομένης διὰ τοῦ Γ.

Ἤχθω κάθετος ἡ ΓΖ, καὶ τῇ ΒΔ ἴση κείσθω ἡ ΖΑ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Α. ἀνήχθω ὀρθὴ ἡ ΑΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ [συμπίπτουσα τῇ ΒΓ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Η]· καὶ θέσει δοθεισῶν τῶν ΒΑ ΑΗ καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Γ ὑπερβολὴ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΗΑ ΑΒ ἐλεύσεται ἄρα
Hu960 καὶ διὰ τοῦ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΗ (ἐπεὶ καὶ ὅλη ἡ ΒΕ τῇ ΗΓ). καὶ ἔσται διὰ τὸ προγεγραμμένον.



Συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω ἡ μὲν τῇ θέσει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ Γ, ἡ δὲ διηγμένη ἡ ΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἡ Θ, καὶ αὐτῇ ἴση ἔστω, καθέτου ἀχθείσης τῆς ΓΖ, ἡ ΖΑ, καὶ ὀρθὴ ἀνήχθω ἡ ΑΗ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΒΓ κατὰ τὸ Η, καὶ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΗΑ ΑΒ διὰ δοθέντος τοῦ Γ γεγράφθω ὑπερβολή· λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν ὅτι, ἂν κάθετος ἀχθῇ ἡ ΕΔ, ἴση γίνεται ἡ ΒΔ τῇ Θ. τοῦτο δὲ φανερὸν διὰ τὰς ἀσυμπτώτους· ἴση γὰρ ἡ ΕΗ τῇ ΓΒ, ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΖΒ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΖ, τουτέστιν ἡ Θ, ἴση ἐστὶ τῇ ΒΔ.

δʹ. Ἔστω ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ· ὅτι τῶν ΒΑ ΑΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΑΔ.

δειχθῇ εἰς τὸ β′ βιβλίον τῶν Κωνικῶν, ὅτι αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς.

3. Ἔστω δοθεῖσα κατὰ τὴν θέσιν ἡ εὐθεῖα ΑΒ, καὶ τὸ σημεῖον Γ. Ἂς διαχθῇ ἡ ΒΓ καὶ ἂς ληφθῇ δοθεῖσα ἡ ΒΔ, καὶ ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι τὸ Ε κεῖται ἐπὶ [δοθείσης κωνικῆς τομῆς] ὑπερβολῆς διερχομένης διὰ τοῦ Γ.

Ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΓΖ καὶ ἂς ληφθῇ ΒΔ=ΖΑ· εἶναι ἄρα δοθὲν τὸ Α. Ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἡ ΑΗ· ἔχει δοθῇ ἄρα κατὰ τὴν θέσιν ἡ ΑΗ [συμπίπτουσα πρὸς τὴν ΒΓ ἐκβληθεῖσαν μέχρι τοῦ Η]· καὶ ἀφοῦ ἔχωσι δοθῇ αἱ ΒΑ, ΑΗ καὶ τὸ σημεῖον Γ, θὰ διέλθῃ ἄρα ὑπερβολὴ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΗΑ, ΑΒ καὶ διὰ τοῦ Ε, διότι εἶναι ΒΓ=ΕΗ (ἐπειδὴ καὶ ὅλη ἡ ΒΕ=ΗΓ). Καὶ εἶναι ἀληθὲς κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προηγουμένου 2ου λήμματος.

Θὰ συντεθῇ δὲ τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα κατὰ τὴν θέσιν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, ἡ δὲ διαχθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἡ Θ καὶ ἔστω ἴση πρὸς αὐτήν, ἀφοῦ ἀχθῇ κάθετος ἡ ΓΖ, ἡ ΖΑ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ κάθετος ἡ ΑΗ καὶ ἂς συναντᾷ αὕτη τὴν ΒΓ κατὰ τὸ Η, καὶ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΗΑ, ΑΒ, διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ ἂς γραφῇ ὑπερβολή· λέγω, ὅτι αὕτη πληροῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν, ὅτι ἂν ἀχθῇ κάθετος ἡ ΕΔ, γίνεται ΒΔ=Θ. Τοῦτο δὲ εἶναι φανερὸν διὰ τὰς ἀσυμπτώτους· διότι ἡ ΕΗ=ΓΒ, ὥστε καὶ ἡ ΑΔ=ΖΒ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΖ, τουτέστιν ἡ Θ=ΒΔ.

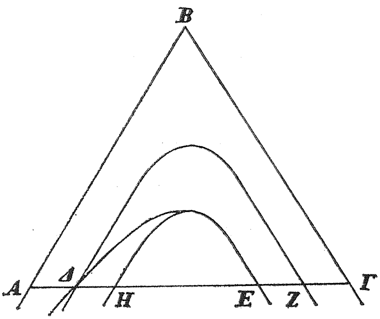
4. Ἔστω ἡ ΒΑ:ΑΓ=ΒΔ²:ΔΓ²(1), λέγω, ὅτι τῶν ΒΑ, ΑΓ μέση ἀνάλογος εἶναι ἡ ΑΔ.

Κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· κατὰ διαίρεσιν ἄρα γίνεται ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΓΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓ ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΓ ΕΒ τῷ ἀπὸ ΔΕ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΓΔΕ. ἀνάλογον καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ· ὅλη ἄρα πρὸς ὅλην ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΓ, ὥστε τῶν ΒΑ ΑΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΑΔ.

ε'. Ἔστω τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον τῷ δὶς ἀπὸ ΑΓ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ.

Κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ· ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΔΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ παρὰ τὴν αὐτήν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ, τουτέστιν ἡ ΑΓ, τῇ ΓΒ.

Hu962 *ϛ'. Περὶ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ ΒΓ ὑπερβολαὶ γεγράφθωσαν αἱ ΔΖ ΗΕ· λέγω ὅτι οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις.*



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω εἰς τομὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔΕΖΓ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τῆς ΔΖ τομῆς ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΖΓ, διὰ δὲ τῆς ΔΕ τομῆς ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ, ὥστε ἡ ΓΖ τῇ ΓΕ ἴση ἐστίν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα συμβάλλουσιν αἱ τομαὶ ἀλλήλαις.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὐξόμεναι ἔγγιον προσ-

Ἂς ληφθῇ ΓΔ = ΔΕ. Ἐκ τῆς (1) διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 17) εἶναι $ΒΑ - ΑΓ : ΓΑ = ΒΔ^2 - ΔΓ^2 : (ΔΓ^2 = ΔΕ^2)$, ἢ (ἐκ τοῦ σχήματος) $ΒΓ : ΑΓ = ΓΒ x ΒΕ : ΕΔ^2$ (Εὐκλ. 2, 6), τουτέστιν, ὡς τὸ $ΓΒ x ΒΕ : ΑΓ x ΕΒ = ΓΒ x ΒΕ : ΕΔ^2$· εἶναι ἄρα ΑΓx

Α Γ Δ Ε Β

$ΕΒ = ΔΕ^2$, τουτέστι = ΓΔxΔΕ. Ἐκ τούτου εἶναι ΕΒ:ΔΕ = ΔΓ:ΑΓ, καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18) εἶναι ΒΔ:ΔΕ = ΔΑ: ΑΓ ἢ ΒΔ:ΔΓ = ΔΑ:ΑΓ· εἶναι ἄρα ΒΔ + ΑΔ:ΔΓ + ΑΓ = ΑΔ:ΑΓ, τουτέστι ΒΑ:ΑΔ = ΑΔ:ΑΓ, ὥστε τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι μέση ἀνάλογος ἡ ΑΔ.

5. Ἔστω τὸ $ΑΒ x ΒΓ = 2ΑΓ^2$· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ = ΓΒ. Ἂς ληφθῇ ΑΓ = ΑΔ· θὰ εἶναι ἄρα τὸ ΓΔxΔΑ = ΑΒxΒΓ.

Δ Α Γ Β

Καὶ διὰ προσθέσεως εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ ΔΑxΒΓ, ἔχομεν ΔΑxΒΔ = ΒΓxΒΔ, τουτέστιν ἡ ΔΑ = ΓΒ, τουτέστιν ἡ ΑΓ = ΓΒ.

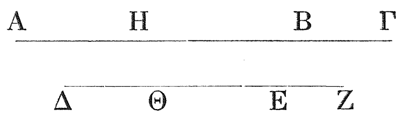
6. Περὶ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ, ΒΓ ἂς γραφῶσιν ὑπερβολαὶ αἱ ΔΖ, ΗΕ· λέγω, ὅτι αὗται δὲν συναντῶνται μεταξύ των.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς διαχθῇ εἰς τὰς κωνικὰς τομὰς ἡ εὐθεῖα ΑΔΕΖΓ· θὰ εἶναι λοιπὸν διὰ μὲν τῆς τομῆς ΔΖ, ἡ ΑΔ = ΖΓ, διὰ δὲ τῆς τομῆς ΔΕ, ἡ ΑΔ = ΕΓ, ὥστε εἶναι ΓΖ = ΓΕ, ὅπερ ἀδύνατον· δὲν θὰ συναντῶνται ἄρα αἱ τομαὶ μεταξύ των.

Λέγω τώρα, ὅτι αὐξανόμεναι ἐπ᾽ ἄπειρον αἱ τομαὶ πλησιάἄγουσιν ἑαυταῖς καὶ αἰεὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα.

Ἤχθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΘΚ, καὶ ἔστω ἡ διάμετρος . . . ἧς πέρας ἔστω τὸ Μ . . . . ἔσται ἄρα ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ, οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ, οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ, καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΜΛΝ τοῦ ὑπὸ ΗΟΠ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΖ τῆς ΘΣ. καὶ ἔστι διὰ τὰς τομὰς ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΞΛ τῷ ὑπὸ ΣΘΡ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΛ τῆς ΘΡ, ὥστε
Hu964 αἰεὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα. [ἀλλὰ καὶ παράκεινται· εἰ γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἔγγιον προσάγει, δηλονότι καὶ ἑαυταῖς].|

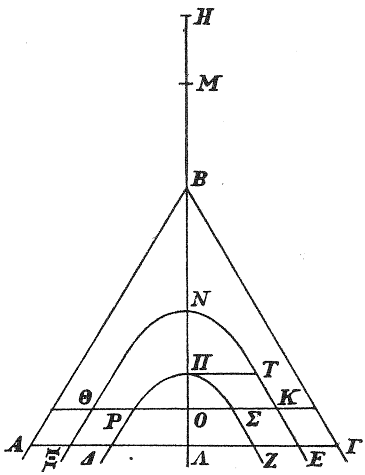
ζ'. Ἔστω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ στερεὸν



τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος μετὰ τοῦ λόγου ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον μετὰ τοῦ λόγου ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ.

ζουσι μεταξύ των καὶ πάντοτε ἡ μεταξύ των ἀπόστασις συνεχῶς ἐλαττοῦται.

Διότι ἂς ἀχθῇ καὶ ἄλλη τις εὐθεῖα ἡ ΘΚ, καὶ ἔστω διάμετρος... τῆς ὁποίας πέρας ἔστω τὸ Μ... θὰ εἶναι ἄρα ὡς μὲν τὸ ΜΛxΛΝ: $ΛΞ^2$ = ὁ πλάγιος ἄξων : παράμετρος, ὡς δὲ ΗΟxΟΠ:$ΟΡ^2$ = πλάγιος ἄξων : παράμετρος· ὥστε εἶναι, ὡς τὸ ΜΛxΛΝ : $ΛΞ^2$ = ΗΟ xΟΠ:$ΟΡ^2$, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 12) ΜΛxΛΝ : ΗΟxΠΟ = $ΛΞ^2$: $ΟΡ^2$. Εἶναι δὲ ΜΛ x ΛΝ 〉 ΗΟxΟΠ· εἶναι ἄρα ΛΞ 〉 ΟΡ καὶ ΞΖ 〉 ΘΣ. Καὶ ἕνεκα τῶν τομῶν εἶναι ΖΞxΞΔ = ΣΘxΘΡ· εἶναι ἄρα ἡ ΞΔ 〈 ΘΡ, ὥστε πάντοτε ἡ μεταξύ των ἀπόστασις ἐλαττοῦται. [Ἀλλὰ καὶ πλησιάζουσιν· διότι ἐὰν ἑκατέρα αὐτῶν πλησιάζῃ πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους, εἶναι φανερόν, ὅτι πλησιάζουσι καὶ μεταξύ των].



7. Ἔστω ὡς μὲν ἡ ΑΒ:ΒΓ = ΔΕ:ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΑ:ΑΗ = ΕΔ:ΔΘ· λέγω, ὅτι γίνεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ, ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τῆς ΔΖ, ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ κύβος τῆς ΑΗ σὺν τὸν κύβον τὸν ἔχοντα λόγον πρὸς τὸν κύβον τῆς ΗΒ, ὃν ἔχει τὸ $ΑΓ^2$:$ΓΒ^2$, πρὸς τὸν κύβον τῆς ΔΘ σὺν τὸν κύβον τὸν ἔχοντα λόγον πρὸς τὸν κύβον τῆς ΘΕ, ὃν ἔχει τὸ $ΔΖ^2$:

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ (κοινὸν ὕψος ἡ ΑΒ), οὕτως τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ (κοινὸν ὕψος ἡ ΔΕ), οὕτως τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κύβον· καὶ ταῦτα ἄρα ἀνάλογον καὶ ἐναλλάξ ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κύβον, οὕτως ὅ τε ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον, καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον. ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον, οὕτως τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν
Hu966 *ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ.*

η'. Ἔστω τὸ Α μετὰ τοῦ Β ἴσον τῷ Γ μετὰ τοῦ Δ· ὅτι ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β.

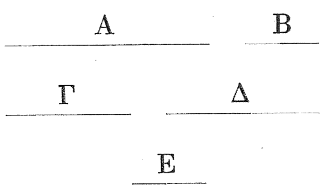
$Z E^2$. δηλαδὴ :

$$\frac{A\Gamma^2 \text{ x } AB}{\Delta Z^2 \text{ x } \Delta E} = \frac{AH^3 + HB^3 \text{ x } A\Gamma^2 : \Gamma B^2}{\Delta\Theta^3 + \Theta E^3 \text{ x } \Delta Z^2 : ZE^2}$$

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ $\Gamma A : AB = Z\Delta : \Delta E$, καὶ ὡς ἄρα τὸ $\Gamma A^2 : AB^2 = Z\Delta^2 : \Delta E^2$. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $\Gamma A^2 : AB^2$ (κοινὸν ὕψος ἡ AB) $=$ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ $A\Gamma^2$, ὕψος δὲ τὴν AB, πρὸς τὸν AB^3, ὡς δὲ τὸ $Z\Delta^2 : \Delta E^2$ (κοινὸν ὕψος ἡ ΔE) $=$ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ΔZ^2, ὕψος δὲ τὴν ΔE, πρὸς τὸν ΔE^3· καὶ ἡ ἀναλογία τούτων καὶ ἐναλλάξ. Εἶναι δὲ καὶ ὡς ὁ $AB^3 : \Delta E^3 = AH^3 : \Delta\Theta^3$, καὶ ὁ $HB^3 : \Theta E^3$. Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ $HB^3 : \Theta E^3 =$ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν HB^3, ὃν ἔχει τὸ $A\Gamma^2 : \Gamma B^2$, πρὸς τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ΘE^3, ὃν ἔχει τὸ $\Delta Z^2 : ZE^2$· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα (δηλ. ἐὰν $\alpha/\beta = \gamma/\delta = \varepsilon/\zeta$ ἕπεται $\alpha+\gamma+\varepsilon/\beta+\delta+\zeta = \alpha/\beta = \gamma/\delta = \varepsilon/\zeta$, Εὐκλ. 5, 12)· εἶναι ἄρα

$$\frac{A\Gamma^2 \text{x} AB}{\Delta Z^2 \text{x} \Delta E} = \frac{AH^3}{\Delta\Theta^3} = \frac{HB^3 \text{x} A\Gamma^2 : \Gamma B^2}{\Theta E^3 \text{x} \Delta Z^2 : ZE^2} = \frac{AH^3 + HB^3 \text{x} A\Gamma^2 : \Gamma B^2}{\Delta\Theta^3 + \Theta E^3 \text{x} \Delta Z^2 : ZE^2}$$

8. Ἔστω $A + B = \Gamma + \Delta$· λέγω, ὅτι $A - \Gamma = \Delta - B$.



Διότι ἔστω $A - \Gamma = E$·(1) εἶναι ἄρα $A = \Gamma + E$. Ἂς προσ-

Ἔστω γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τὸ Ε· τὸ Α ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ΓΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ Β· τὰ Α Β ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ Ε Β. ἀλλὰ τὰ Α Β τοῖς Γ Δ ἴσα ὑπόκειται· καὶ τὰ Γ Δ ἄρα τοῖς Γ Ε Β ἴσα. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Γ· λοιπὸν ἄρα τὸ Δ ἴσον τοῖς Β Ε, ὥστε τὸ Δ τοῦ Β ὑπερέχει τῷ Ε· ᾧ ἄρα ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν [ὅτι], ἐάν, ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχῃ καὶ τὸ Δ τοῦ Β, ὅτι τὰ Α Β ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ Δ.

θ′. Ἔστω δύο μεγέθη τὰ ΑΒ ΒΓ· ὅτι [ᾧ ὑπερέχει τὸ ΒΑ τοῦ ΑΓ τούτῳ] ὑπερέχει [καὶ] τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ΓΒ τὸν αὐτόν.

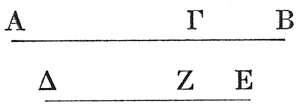
Ἔστω γὰρ τὸ μὲν πρὸς τὸ ΑΒ λόγον τινὰ ἔχον τὸ ΔΕ, τὸ δὲ πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχον τὸ ΔΖ· λοιπὸν, ἄρα τὸ ΕΖ πρὸς τὸ ΒΓ λόγον ἔχει τὸν αὐτόν. καὶ ἔστι τὸ ΕΖ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει τὸ ΔΕ τοῦ ΔΖ, τουτέστι τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτόν.

Hu968 *ι′. Τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερεχέτω ἤπερ τὸ Δ τοῦ Β· ὅτι τὰ Α Β ἐλάσσονά ἐστι τῶν Γ Δ.*

Ἔστω γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τὸ Ε, τὰ Α Β ἄρα ἴσα ἐστὶν τοῖς Γ Ε Β. ἐπεὶ δὲ τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερέχει ἤπερ τὸ Δ τοῦ Β, τὸ δὲ Α τοῦ Γ ὑπερέχει τῷ Ε, τὸ Ε ἄρα ἔλασσόν ἐστι τῆς τῶν Δ Β ὑπεροχῆς, ὥστε τὰ Ε Β ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Δ. κοινὸν προσκείσθω τὸ Γ· τὰ Γ τεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ Β· εἶναι ἄρα $Α+Β=Γ+Ε+Β$. Ἀλλὰ ὑπετέθη $Α+Β=Γ+Δ$· εἶναι ἄρα καὶ $Γ+Δ=Γ+Ε+Β$. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ Γ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $Δ=Β+Ε$, ὥστε τὸ $Δ-Β=Ε$. Καὶ ἐκ τῆς (1) $Α-Γ=Ε=Δ-Β$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, [ὅτι], ἐὰν $Α-Γ=Χ=Δ-Β$, εἶναι $Α+Β=Γ+Δ$.

9. Ἔστω δύο μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ (κατὰ τὸν Hultsch ΑΓ, ΓΒ)· λέγω, ὅτι, [ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ΒΑ τοῦ ΑΓ κατὰ τοῦτο] ὑπερέχει



[καὶ] τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ ἐκείνου τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτόν, πρὸς τὸ ἔχον τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ ΓΒ. (Δηλ. : Ἐὰν τεθῇ $χ:ΑΒ=ψ:ΑΓ=ζ:ΓΒ$, θὰ εἶναι $χ-ψ=ζ$).

Διότι ἔστω τὸ μὲν ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ λόγον τινὰ τὸ ΔΕ, τὸ δὲ πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχον τὸ ΔΖ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΕΖ πρὸς τὸ ΒΓ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον. Καὶ εἶναι τὸ ΕΖ ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ΔΕ τοῦ ΔΖ, τουτέστι τὸν λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν λόγον.

$$\left(\frac{ΔΕ}{ΑΒ}=\frac{ΔΖ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ-ΔΖ}{ΑΒ-ΑΓ},\ \text{τουτέστι}\ \frac{ΖΕ}{ΓΒ}\right).\ \text{(Hultsch)}.$$

10. Ἔστω $Α-Γ<Δ-Β$· λέγω, ὅτι $Α+Β<Γ+Δ$.

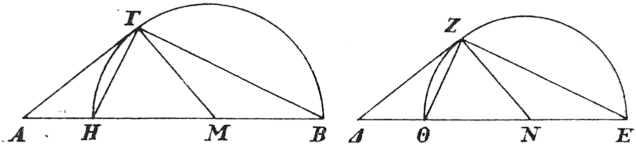
Διότι, ἔστω $Α-Γ=Ε$, ὁπότε $Α+Β=Γ+Ε+Β$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ $Α-Γ<Δ-Β$, καὶ $Α-Γ=Ε$, εἶναι ἄρα $Ε<Δ-Β$, ὥστε $Ε+Β<Δ$. Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ Γ·

Ε Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τῶν Γ Δ. ἀλλὰ τὰ Γ Ε Β ἴσα ἐδείχθη τοῖς Α Β· τὰ Α Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τῶν Γ Δ.

Ὁμοίως καὶ τὸ ἀναστρόφιον. καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ὁμοίως.

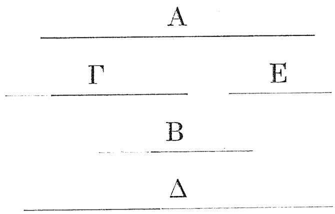
Τοῦ ϛ'

α'. Ἔστω δύο τρίγωνα ἀμβλυγώνια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, ἀμβλείας ἔχοντα τὰς Γ Ζ γωνίας, καὶ ἴσας τὰς Α Δ ὀξείας, ὀρθαὶ ταῖς ΒΓ ΕΖ ἤχθωσαν αἱ ΓΗ ΖΘ, ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ὅτι ὅμοιόν ἐστιν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.



Γεγράφθω γὰρ ἐπὶ τῶν ΗΒ ΕΘ ἡμικύκλια· ἐλεύσεται δὴ καὶ διὰ τῶν Γ Ζ [ἐρχέσθω, καὶ ἔστω τὰ ΗΓΒ ΕΖΘ]· ἤτοι δὴ ἐφάπτονται αἱ ΑΓ ΔΖ τῶν ἡμικυκλίων ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν ἐφάπτονται, φανερὸν ὅτι γίνεται ὅμοια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τρίγωνα. ἐὰν γὰρ λάβω τὰ κέντρα τὰ Μ Ν, καὶ ἐπιζεύξω τὰς ΜΓ ΝΖ, ἔχονται ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΜΓΑ ΝΖΔ γωνίαι· καὶ εἰσὶν αἱ Α Δ γωνίαι ἴσαι· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΓ ἄρα
Hu970 *τῇ ὑπὸ ΔΝΖ γωνίᾳ. καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ Β ἄρα γωνία τῇ Ε ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ Α τῇ Δ· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα.*

εἶναι ἄρα $\Gamma+E+B < \Gamma+\Delta$. Ἀλλ' ἐδείχθη $\Gamma+E+B = A+B$· εἶναι ἄρα $A+B < \Gamma+\Delta$.



Ὁμοίως καὶ τὸ ἀντίστροφον (ἤτοι ἐὰν $A+B < \Gamma+\Delta$ εἶναι $A-\Gamma < \Delta-B$. Ὁμοίως καὶ ἂν $A < \Gamma$.

Λήμματα εἰς τὸ 6ον βιβλίον τῶν Κωνικῶν

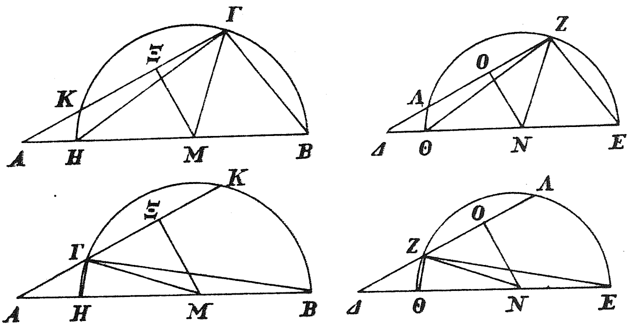
1. Ἔστω δύο τρίγωνα ἀμβλυγώνια τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἔχοντα ἀμβλείας γωνίας τὰς Γ, Ζ, καὶ ἴσας τὰς ὀξείας γωνίας Α, Δ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΕΖ κάθετοι αἱ ΓΗ, ΖΘ, ἔστω δέ, ὡς τὸ $BA \times AH : A\Gamma^2 = E\Delta \times \Delta\Theta : \Delta Z^2$· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Διότι, ἂς γραφῶσιν ἐπὶ τῶν ΗΒ, ΕΘ ἡμικύκλια· ταῦτα θὰ διέλθωσι διὰ τῶν Γ, Ζ· [ἂς διέρχωνται, καὶ ἔστω τὰ ἡμικύκλια ΗΓΒ, ΕΖΘ]· αἱ ΑΓ, ΔΖ ἢ θὰ ἐφάπτωνται τῶν ἡμικυκλίων ἢ ὄχι. Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἐφάπτωνται, εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ γίνονται ὅμοια. Διότι, ἐὰν λάβω τὰ κέντρα τὰ Μ, Ν, καὶ φέρω τὰς ΜΓ, ΝΖ, αἱ γωνίαι ΜΓΑ, ΝΖΔ θὰ εἶναι ὀρθαί· εἶναι δὲ ἴσαι αἱ γωνίαι Α, Δ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ γωνία $AM\Gamma = \Delta NZ$. Καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν εἶναι ἴσα· εἶναι ἄρα καὶ ἡ γωνία $B = E$. Ἀλλ' εἶναι καὶ ἡ $A = \Delta$· εἶναι ἄρα ὅμοια τὰ τρίγωνα.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἐφαπτέσθωσαν, ἀλλὰ τεμνέτωσαν τὰ ἡμικύκλια κατά τινα σημεῖα τὰ Κ Λ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΜΞ ΝΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΚΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΛΟ τῇ ΟΖ. ὅμοιον δὲ τὸ ΑΜΞ τῷ ΔΝΟ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΜ, οὕτως ἡ ΟΔ πρὸς ΔΝ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΛΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΛΔ πρὸς ΔΖ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΟΔ πρὸς ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΟΔ πρὸς ΔΝ [διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων]· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΜ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς ΔΝ. καὶ παρὰ ἴσας γωνίας τὰς Α Δ ἀνάλογόν εἰσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΜΓ τῇ ὑπὸ τῶν ΔΝΖ γωνίᾳ. καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ Β ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Ε. ἀλλὰ καὶ ἡ Α τῇ Δ καθ' ὑπόθεσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Συμφανὲς δὲ τὸ ἀντίστροφον αὐτῷ· ὄντος ὁμοίου τοῦ ΑΒΓ τῷ ΔΕΖ, καὶ ὀρθῶν τῶν ὑπὸ ΒΓΗ ΕΖΘ, δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· ἔστι γὰρ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν Hu972 *τριγώνων ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ὡς δὲ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΘΔ πρὸς ΔΖ· καὶ ὁ συνημμένος.*

β'. Ἔστω δύο ὅμοια τμήματα μείζονα ἡμικυκλίου τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ ΓΔ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΕΖΗ ΘΚΛ, Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ ἐφάπτωνται τὰ ἡμικύκλια, ἀλλ᾽ ἂς τέμνωνται κατά τινα σημεῖα τὰ Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΜΞ, ΝΟ. Εἶναι ἄρα ἡ μὲν ΚΞ = ΞΓ, ἡ δὲ ΛΟ = ΟΖ. Εἶναι δὲ τὸ τρίγωνον ΑΜΞ ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΝΟ· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΞΑ: ΑΜ = ΟΔ:ΔΝ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι, ὡς τὸ ΒΑxΑΗ:ΑΓ^2 = ΕΔxΔΘ: ΔΖ^2, καὶ ὡς ἄρα ΚΑxΑΓ:ΑΓ^2, τουτέστιν, ὡς ἡ ΚΑ:ΑΓ = ΛΔxΔΖ : ΔΖ^2, τουτέστιν ἡ ΛΔ:ΔΖ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΞΑ:ΑΓ = ΟΔ : ΖΔ. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΞΑ:ΑΜ = ΟΔ:ΔΝ [διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων]· δι᾽ ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ



κατὰ μέλη) εἶναι, ὡς ἡ ΓΑ:ΑΜ = ΖΔ:ΔΝ. Καὶ παρὰ τὰς ἴσας γωνίας τὰς Α, Δ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΜΓ = ΔΝΖ. Καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν εἶναι ἴσα· εἶναι ἄρα καὶ ἡ γωνία Β = Ε. Ἀλλὰ καθ᾽ ὑπόθεσιν εἶναι καὶ γωνία Α = Δ· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

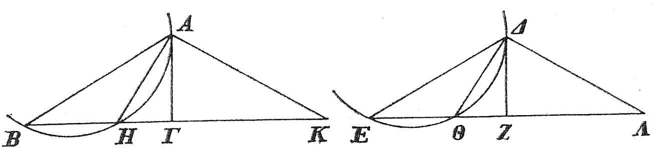
Εἶναι φανερὸν δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον πρὸς αὐτό· ἐὰν δηλ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ αἱ γωνίαι ΒΓΗ, ΕΖΘ εἶναι ὀρθαί, νὰ δειχθῇ, ὅτι γίνεται, ὡς τὸ ΒΑxΑΗ:ΑΓ^2 = ΕΔxΔΘ:ΔΖ^2· διότι διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων εἶναι, ὡς μὲν ἡ ΒΑ:ΑΓ = ΕΔ:ΔΖ, ὡς δὲ ἡ ΗΑ:ΑΓ = ΘΔ:ΔΖ· καὶ τὰ γινόμενα τῶν λόγων εἶναι ἴσα.

2. Ἔστω δύο ὅμοια τμήματα μεγαλύτερα ἡμικυκλίου τὰ ἐπὶ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΕΖΗ, ΘΚΛ,

ἔστω δὲ ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ· δεικτέον ὅτι ὁμοία ἐστὶν ἡ ΒΖ περιφέρεια τῇ ΔΚ περιφερείᾳ.

Εἰλήφθω τὰ κέντρα τὰ Μ Ν, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΜΞ ΜΟ ΝΠ ΝΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΒ ΝΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΟΜΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΡΝΔ γωνίᾳ (ἴσαι γάρ εἰσιν αἱ ἐν τοῖς τμήμασιν, ὥστε καὶ ἡμίσειαι). καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ Ο Ρ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΜΒΟ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΔΡ γωνίᾳ. ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ ΓΔ παράλληλοι αἱ ΖΣ ΚΤ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΖ ΝΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΜΣΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΤΚ γωνίᾳ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΞΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΠΛ πρὸς ΛΚ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΗΞ πρὸς ΞΖ, τουτέστιν ἡ ΜΒ πρὸς ΜΣ, τουτέστιν [ὡς] ἡ ΖΜ πρὸς ΜΣ, οὕτως ἡ ΛΠ πρὸς ΚΠ, τουτέστιν ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ, τουτέστιν ἡ ΚΝ πρὸς ΝΤ. καί εἰσιν αἱ μὲν ὑπὸ ΜΣΖ ΝΤΚ ἴσαι, αἱ δὲ ὑπὸ ΜΖΣ ΝΚΤ ὀξεῖαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΣΜΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΤΝΚ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ περιφέρεια τῇ ΔΚ περιφερείᾳ.

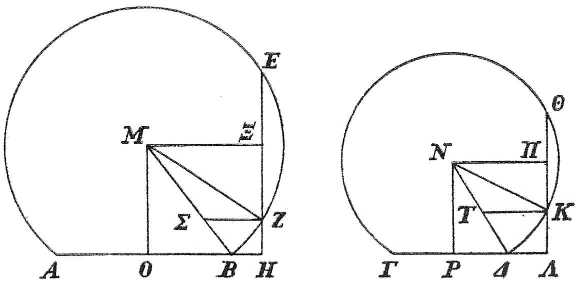
γʹ. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Γ Ζ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ ἐν ἴσαις γω-



νίαις ταῖς ὑπὸ ΒΑΗ ΕΔΘ, ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΗ
Hu974 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ· ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

ἔστω δέ, ὡς ἡ ΕΗ:ΗΖ = ΘΛ:ΛΚ· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τόξον ΒΖ = τόξον ΔΚ.

Ἂς ληφθῶσι τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Μ, Ν, καὶ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΜΞ, ΜΟ, ΝΠ, ΝΡ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΜΒ, ΝΔ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΟΜΒ = ΡΝΔ (διότι εἶναι ἴσαι αἱ



εἰς τὰ τμήματα, ὥστε καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν εἶναι ἴσα). Καὶ αἱ γωνίαι Ο, Ρ εἶναι ὀρθαί· εἶναι ἄρα καὶ ἡ γωνία ΜΒΟ = ΝΔΡ. Ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὰς ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΖΣ, ΚΤ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΜΝ, ΝΚ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ γωνία ΜΣΖ = ΝΤΚ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι, ὡς ἡ ΕΗ:ΗΖ = ΘΛ:ΛΚ, εἶναι ἄρα καί, ὡς ἡ ΞΗ : ΗΖ = ΠΛ : ΛΚ, ὥστε καί, ὡς ἡ ΗΞ:ΞΖ, τουτέστιν ἡ ΜΒ:ΜΣ, τουτέστιν, [ὡς] ἡ ΖΜ:ΜΣ = ΛΠ : ΚΠ, τουτέστιν ἡ ΔΝ:ΝΤ, τουτέστιν ἡ ΚΝ:ΝΤ. Καὶ εἶναι αἱ μὲν γωνίαι ΜΣΖ, ΝΤΚ ἴσαι, αἱ δὲ ΜΖΣ, ΝΚΤ ὀξεῖαι· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΣΜΖ = ΤΝΚ· εἶναι ἄρα τὸ τόξον ΒΖ ὅμοιον πρὸς τὸ τόξον ΔΚ.

3. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὰς γωνίας Γ, Ζ ὀρθάς, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΗ, ΔΘ σχηματίζουσαι ἴσας γωνίας τὰς ΒΑΗ, ΕΔΘ, καὶ ἔστω, ὡς τὸ ΒΓxΓΗ:ΑΓ^2 = ΕΖx ΖΘ : ΖΔ^2· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

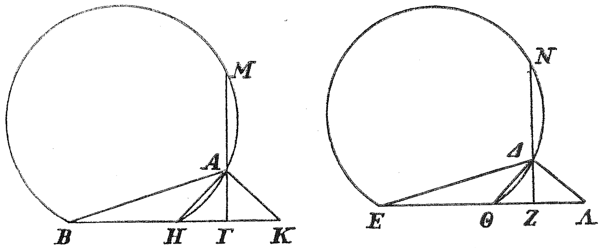
Γεγράφθω γὰρ περὶ τὰ ΑΒΗ ΔΕΘ τρίγωνα τμήματα κύκλων τὰ ΒΗΑ ΕΘΔ [ὅμοια ἄρα ἐστίν]· ἤτοι δὴ ἐφάπτονται αἱ ΑΓ ΔΖ τῶν τμημάτων ἢ οὔ. ἐφαπτέσθωσαν πρότερον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ μὲν ὑπὸ ΒΓΗ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν, ἐὰν πρὸς ὀρθὰς ἀγάγω τῇ ΑΗ τὴν ΑΚ, τῷ ὑπὸ τῶν ΗΓΚ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΖΘ τῷ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν, ἐὰν ὀρθὴν ἀγάγω τὴν ΔΛ τῇ ΔΘ, τῷ ὑπὸ ΘΖΛ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΖΛ. καὶ ὀρθαὶ αἱ ΑΓ ΔΖ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ὑπὸ ΒΑΚ ΕΔΛ (ἴση γάρ ἐστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΕΔΘ, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΗΑΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΘΔΛ)· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΕΔΖ ἄρα ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ ὀρθαὶ αἱ Γ Ζ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, ὅπερ: ~.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΓ ΔΖ, ἀλλὰ τεμνέτωσαν κατὰ τὰ Μ Ν σημεῖα. ἔστιν οὖν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΝΖ πρὸς ΖΔ.
Hu976 *καὶ ἔστιν ὅμοια μείζονα τμήματα τὰ ΒΑΗ ΕΔΘ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ περιφέρεια τῇ ΔΘ περιφερείᾳ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ Β γωνία τῇ Ε· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.*

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

δʹ. Ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθὰς ἔχοντα τὰς ΓΖ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΒΑΗ

Διότι ἂς γραφῶσι περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΗ, ΔΕΘ τμήματα κύκλων τὰ ΒΗΑ, ΕΘΔ [εἶναι ἄρα ὅμοια]· αἱ ΑΓ, ΔΖ ἢ ἐφάπτονται τῶν τμημάτων ἢ ὄχι. Πρῶτον ἂς ἐφάπτωνται· εἶναι ἄρα τὸ μὲν ΒΓxΓΗ = ΑΓ², τουτέστιν, ἐὰν φέρω τὴν ΑΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΗ, τὸ ΑΓ² = ΗΓxΓΚ, τὸ δὲ ΕΖxΖΘ = ΔΖ², τουτέστιν, ἐὰν φέρω τὴν ΔΛ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΘ, τὸ ΔΖ² = ΘΖx ΖΛ· ὥστε εἶναι ἡ μὲν ΒΓ = ΓΚ, ἡ δὲ ΕΖ = ΖΛ. Καὶ εἶναι κάθετοι αἱ ΑΓ, ΔΖ· εἶναι ἄρα ἡ μὲν γωνία ΒΑΚ διπλασία τῆς γωνίας



ΒΑΓ, ἡ δὲ γωνία ΕΔΛ διπλασία τῆς ΕΔΖ. Καὶ εἶναι ἴσαι αἱ γωνίαι ΒΑΚ, ΕΔΛ (διότι ἡ μὲν ΒΑΗ = ΕΔΘ, εἶναι δὲ ὀρθαὶ αἱ ΗΑΚ, ΘΔΛ)· εἶναι ἄρα καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴσαι. Καὶ αἱ Γ, Ζ εἶναι ὀρθαί· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

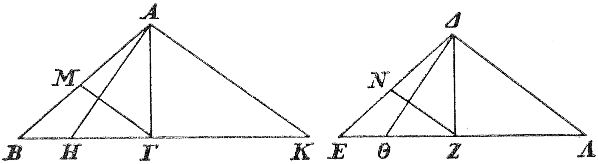
Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ ἐφάπτωνται αἱ ΑΓ, ΔΖ, ἀλλὰ ἂς τέμνωνται κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Ν. Εἶναι λοιπόν, ὡς τὸ ΑΓxΓΜ:ΑΓ², τουτέστιν, ὡς ἡ ΜΓ:ΓΑ = ΔΖxΖΝ:ΔΖ², τουτέστιν = ΝΖ:ΖΔ. Καὶ εἶναι ὅμοια τὰ μεγαλύτερα κυκλικὰ τμήματα ΒΑΗ, ΕΔΘ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ τόξον ΑΗ ὅμοιον πρὸς τὸ τόξον ΔΘ· ὥστε εἶναι ἡ γωνία Β = Ε· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἄλλη ἀπόδειξις τοῦ ἰδίου

4. Ἔστω δύο τρίγωνα ἔχοντα ὀρθὰς τὰς γωνίας Γ, Ζ, καὶ ἂς διαχθῶσιν αἱ ΑΗ, ΔΘ καί, εἰς τὰς ἴσας γωνίας ΒΑΗ,

ΕΔΘ, ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· ὅτι ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἤχθωσαν ταῖς ΑΗ ΔΘ ὀρθαὶ αἱ ΑΚ ΔΛ· ἴσον ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ ΑΓ τῷ ὑπὸ ΗΓΚ, τὸ δὲ ἀπὸ ΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΖΛ· ἔστιν οὖν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΚ, τουτέστιν



ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΛ, τουτέστιν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ. ἤχθωσαν ταῖς ΑΚ ΔΛ παράλληλοι αἱ ΓΜ ΖΝ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ, οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΔ. καί εἰσιν ὀρθαὶ μὲν αἱ πρὸς τοῖς ΓΖ σημείοις, ἴσαι δὲ αἱ πρὸς τοῖς Μ Ν γωνίαι ταῖς ὑπὸ ΒΑΚ ΕΔΛ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

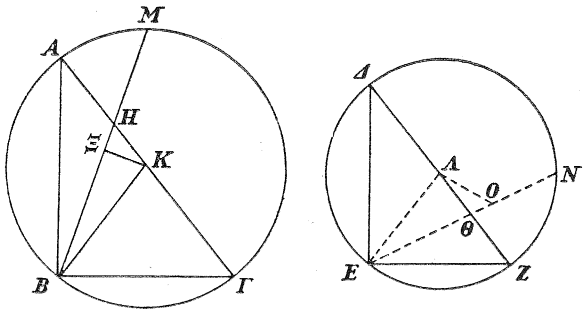
ε΄. Ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Β Ε σημείοις γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΒΗ ΕΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΑΗΒ ΔΘΕ, ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ· δεικτέον ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Hu978 *Περιγεγράφθωσαν κύκλοι, καὶ εἰλήφθω αὐτῶν τὰ κέντρα τὰ Κ Λ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν Η Θ σημείων εἰσίν. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ μὲν Κ μεταξὺ τῶν*

ΕΔΘ, ἔστω ὡς τὸ $ΒΓ \times ΓΗ : ΑΓ^2 = ΕΖ \times ΖΘ : ΔΖ^2$· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΚ, ΔΛ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΗ, ΔΘ· εἶναι ἄρα τὸ μὲν $ΑΓ^2 = ΗΓ \times ΓΚ$, τὸ δὲ $ΔΖ^2 = ΘΖ \times ΖΛ$· εἶναι λοιπόν, ὡς τὸ $ΒΓ \times ΓΗ : ΗΓ \times ΓΚ = ΒΓ : ΓΚ = ΕΖ \times ΖΘ : ΘΖ \times ΖΛ = ΕΖ : ΖΛ$. Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΜ, ΖΝ παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΚ, ΔΛ· εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ $ΒΜ : ΜΑ = ΕΝ : ΝΔ$. Καὶ εἶναι ὀρθαὶ μὲν αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Γ, Ζ γωνίαι, ἴσαι δὲ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Μ, Ν γωνίαι, πρὸς τὰς ΒΑΚ, ΕΔΛ· καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

5. Ἔστω δύο τρίγωνα ἔχοντα ὀρθὰς τὰς παρὰ τὰ σημεῖα Β, Ε γωνίας, καὶ ἂς διαχθῶσιν αἱ ΒΗ, ΕΘ εἰς τὰς ἴσας γωνίας

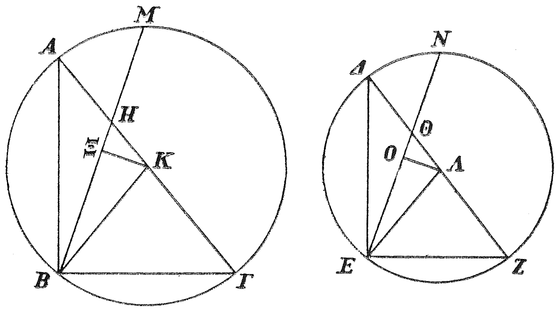


ΑΗΒ, ΔΘΕ, καὶ ἔστω τὸ $ΑΗ \times ΗΓ : ΗΒ^2 = ΔΘ \times ΘΖ : ΘΕ^2$· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἂς περιγραφῶσι περὶ τὰ τρίγωνα κύκλοι, καὶ ἂς ληφθῶσιν αὐτῶν τὰ κέντρα τὰ Κ, Λ· εἶναι φανερὸν λοιπὸν ὅτι ταῦτα εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ὅπου εἶναι τὰ σημεῖα Η, Θ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω τὸ μὲν Κ μεταξὺ τῶν σημείων Γ, Η, τὸ δὲ Λ μεταξὺ

Γ Η σημείων, τὸ δὲ Λ μεταξὺ τῶν Δ Θ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΒΗ ΕΘ ἐπὶ τὰ Μ Ν σημεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΜΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΞ· πεσεῖται ἄρα μεταξὺ τῶν Η Β, ἀμβλεῖά τε γίνεται ἡ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία καὶ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΔΘΕ· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΔΘΕ γωνία· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΘΝ, ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΕΝ κάθετος ἀγομένη πίπτει μεταξὺ τῶν Θ Ν. πιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΛΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΕ, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΝΟ τῆς ΘΕ· πολλῷ ἄρα ἡ ΝΘ τῆς ΘΕ ἐστι μείζων, καὶ τὸ ὑπὸ ΝΘΕ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΔΘΖ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΕΘ τετραγώνου. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· ἔστι γὰρ καὶ ἔλασσον, ἐπειδήπερ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΜΗ τῆς ΗΒ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΗΒ τοῦ ἀπὸ ΗΒ· οὐκ ἄρα τοῦ Κ κέντρου ὄντος μεταξὺ τῶν Η Γ, τὸ Λ ἔσται μεταξὺ τῶν Δ Θ. ἔστω οὖν μεταξὺ τῶν Θ Ζ, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ Hu980 ἤχθω ἡ ΛΟ κάθετος. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΗΒ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, τουτέστιν ὡς ἡ ΜΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΝΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, τουτέστιν ἡ ΝΘ πρὸς ΘΕ, καὶ τέτμηνται αἱ ΒΜ ΝΕ δίχα τοῖς Ξ Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΞ πρὸς ΞΗ, οὕτως ἡ ΕΟ πρὸς ΟΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΗΞ πρὸς ΞΚ, οὕτως ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΛ (ὀρθαὶ μὲν γὰρ αἱ Ξ Ο, ἴσαι δὲ αἱ πρὸς τοῖς Η Θ σημείοις γωνίαι)· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΞ πρὸς ΞΚ, οὕτως ἡ ΕΟ πρὸς ΟΛ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΞ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΛΟ γωνίᾳ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΞΚΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΛΘ ἴση·

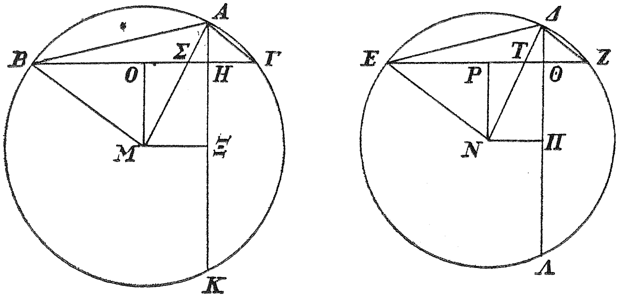
τῶν Δ, Θ, καὶ ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ ΒΗ, ΕΘ μέχρι τῶν σημείων Μ, Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΜΒ κάθετος ἡ ΚΞ· θὰ πέσῃ ἄρα μεταξὺ τῶν Η, Β, καὶ γίνεται ἀμβλεῖα ἡ γωνία ΑΗΒ καὶ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΘΕ· εἶναι ἄρα ἀμβλεῖα καὶ ἡ γωνία ΔΘΕ· εἶναι ἄρα ὀξεῖα ἡ ΔΘΝ, ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΕΝ ἀγομένη κάθετος πίπτει μεταξὺ τῶν Θ, Ν. Ἂς πίπτῃ καὶ ἔστω ἡ ΛΟ· εἶναι ἄρα ἡ ΝΟ = ΟΕ, ὥστε ἡ ΝΟ $>$ ΘΕ· κατὰ μείζονα λόγον ἄρα ἡ ΝΘ $>$ ΘΕ, καὶ τὸ ΝΘxΘΕ = ΔΘxΘΖ $>$ ΕΘ². Καὶ εἶναι, ὡς τὸ ΔΘ x ΘΖ : ΘΕ² = ΑΗ x ΗΓ : ΗΒ², ὅπερ εἶναι ἄτοπον· διότι εἶναι καὶ μικρότερον, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ ΜΗ $<$ ΗΒ καὶ τὸ ΜΗ x ΗΒ $<$ ΗΒ²· ἐνῷ λοιπὸν τὸ κέντρον Κ εἶναι μεταξὺ τῶν Η, Γ, τὸ Λ δὲν θὰ εἶναι μεταξὺ τῶν Δ, Θ. Ἔστω λοιπόν, ὅτι εἶναι μεταξὺ τῶν ΘΖ, καὶ ὁμοίως ἂς ἀχθῇ ἡ ΛΟ κάθετος. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς τὸ ΑΗxΗΓ = ΜΗxΗΒ:ΗΒ², τουτέστιν, ὡς ἡ ΜΗ: ΗΒ = ΔΘxΘΖ, τουτέστι τὸ ΝΘxΘΕ:ΘΕ², τουτέστιν ἡ ΝΘ:ΘΕ, καὶ αἱ ΒΜ, ΝΕ τέμνονται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα Ξ, Ο, εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΒΞ:ΞΗ = ΕΟ:ΟΘ. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΗΞ:ΞΚ = ΘΟ:ΟΛ (διότι αἱ μὲν γωνίαι Ξ, Ο εἶναι ὀρθαί, ἴσαι δὲ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Η, Θ)· δι᾿ ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι, ὡς ἡ ΒΞ:ΞΚ = ΕΟ:ΟΛ. Καὶ εἶναι αἱ πλευραὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΒΚΞ = ΕΛΟ, εἶναι δὲ καὶ



ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΚΗ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΕΛΘ ἐστιν ἴση. καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΔΖΕ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ Β Ε γωνίαι· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

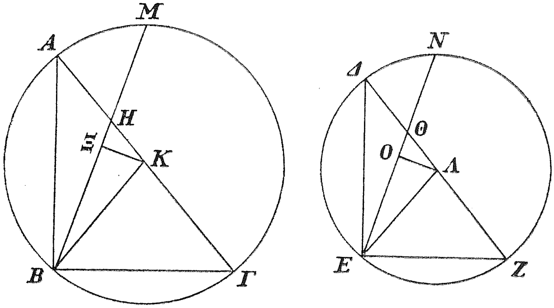
Φανερὸν δὲ καὶ τὸ τούτῳ ἀναστρόφιον, ἐὰν ᾖ ὅμοιον τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΗΒΓ τῷ ΘΕΖ, ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ [διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων].

ϛ'. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, ἴσας ἔχοντα τὰς Α Δ γωνίας μὴ ὀρθὰς δέ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ, ἔστω τε τὸ ὑπὸ τῶν ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΘ, καὶ ἔστω τῶν ΒΓ



ΕΖ εὐθειῶν μείζονα τμήματα τὰ ΒΗ ΕΘ· λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ, τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ.

Hu982 Περιγεγράφθωσαν κύκλοι, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ ἐπὶ τὰ Κ Λ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Μ Ν, καὶ ἀπὸ αὐτῶν ἐπὶ τὰς ΑΚ ΒΓ ΔΛ ΕΖ κάθετοι αἱ ΜΞ ΜΟ ΝΠ ΝΡ. ἔστι δὴ κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἡ γωνία ΞΚΗ = ΟΛΘ· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚΗ = ὅλην τὴν ΕΛΘ. Καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν εἶναι ἴσα· καὶ ἡ γωνία ἄρα ΑΓΒ = ΔΖΕ. Καὶ



αἱ γωνίαι Β, Ε εἶναι ὀρθαί· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Εἶναι δὲ φανερὸν καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου, ἤτοι, ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, τὸ δὲ ΗΒΓ ὅμοιον πρὸς τὸ ΘΕΖ, ὅτι γίνεται, ὡς τὸ ΑΗxΗΓ:$ΗΒ^2$=ΔΘx ΘΖ:$ΘΕ^2$ [διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων].

6. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα ἴσας τὰς γωνίας Α, Δ, ἀλλὰ μὴ ὀρθάς, καὶ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΑΗ, ΔΘ, καὶ ἔστω, ὡς τὸ ΒΗxΗΓ:$ΑΗ^2$=ΕΘxΘΖ:$ΔΘ^2$, καὶ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΕΖ ἔστω μεγαλύτερα τμήματα τὰ ΒΗ, ΕΘ· λέγω, ὅτι τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΕΘ, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον.

Ἂς περιγραφῶσι κύκλοι, καὶ ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ ΑΗ, ΔΘ μέχρι τῶν σημείων Κ, Λ, καὶ ἂς ληφθῶσι τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Μ, Ν, καὶ ἐξ αὐτῶν ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΚ, ΒΓ, ΔΛ, ΕΖ, αἱ ΜΞ, ΜΟ, ΝΠ, ΝΡ. Εἶναι λοιπόν, κατὰ τὰ προαποδειπρογεγραμμένοις ὡς ἡ ΚΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως ἡ ΛΘ πρὸς ΘΔ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΗ, οὕτως ἡ ΔΠ πρὸς ΠΘ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΜ ΔΝ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΞ πρὸς ΞΗ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΣ, ὡς δὲ ἡ ΔΠ πρὸς ΠΘ, οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς ΜΣ, οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ΒΜ ΕΝ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚΓ τμῆμα λοιπῷ τῷ ΕΛΖ τμήματι ὅμοιόν ἐστιν· αἱ ἄρα ἐν αὐτοῖς γωνίαι ἴσαι εἰσίν, καί εἰσιν αὐτῶν καὶ ἡμίσειαι ἴσαι· αἱ ὑπὸ τῶν ΒΜΟ ΕΝΡ ἄρα γωνίαι ἴσαι εἰσὶν [ἐπὶ τῆς πρώτης δυάδος τῶν πτώσεων, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐκ παρακειμένου δηλονότι ἐστὶν ἴση ἡ ὑπὸ τῶν ΒΜΟ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΝΡ· καὶ γὰρ αἱ ἐν τοῖς ΒΑΓ ΕΔΖ τμήμασιν γωνίαι]. γίνεται οὖν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς ΜΟ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΟ, οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΔΝ πρὸς ΝΡ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΣ, οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΜΟ πρὸς ΜΣ, οὕτως ἡ ΡΝ πρὸς ΝΤ. καί εἰσιν ὀρθαὶ μὲν αἱ Ο Ρ γωνίαι, ὀξεῖα δὲ ἑκατέρα τῶν Σ Τ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΟΜΣ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΡΝΤ γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΜΟ τῇ ὑπὸ ΕΝΡ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΜΣ ἄρα τῇ ὑπὸ τῶν ΕΝΤ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ Γ γωνία τῇ Ζ ἐστιν ἴση· ὅμοια ἄρα ἐστὶ πάντα πᾶσιν.

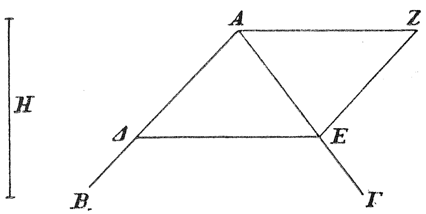
Hu984 ζ'. Δυνατὸν δὲ καί, τῆς μιᾶς πτώσεως [ἢ τῶν ἀμβλειῶν ἢ ὀξειῶν] προγεγραμμένης τῆς δείξεως, τὸ λοιπὸν ἀποδοῦναι οὕτως. ὑποκείσθω γὰρ ἀποδεδεῖχθαι οὐσῶν ἴσων ἀμβλειῶν τῶν γωνιῶν τὸ πρότερον κατὰ τὸν προγεγραμμένον τρόπον, καὶ ἔστω, δυοῖν ὀξειῶν οὐσῶν ἴσων τῶν ὑπὸ ΒΑΓ ΕΔΖ, δεῖξαι ὅτι ὅμοια τὰ τρίγωνα. καὶ πάλιν περιγεγράφθωσαν οἱ κύκλοι καὶ ἐκβεβλημένων τῶν ΑΗ ΔΘ ἐπὶ τὰ Κ Λ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ ΚΓ ΕΛ ΛΖ· ἴσαι ἄρα χθέντα, ὡς ἡ ΚΗ:ΗΛ=ΛΘ:ΘΔ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΑΞ:ΞΗ=ΔΠ:ΠΘ. Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΜ, ΔΝ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΞ : ΞΗ = ΑΜ:ΜΣ, ὡς δὲ ἡ ΔΠ:ΠΘ=ΔΝ:ΝΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ:ΜΣ= ΔΝ:ΝΤ. Ἂς ἐπιζευχθῶσι τώρα αἱ ΒΜ, ΕΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τμῆμα ΒΑΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΕΔΖ, καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ τμῆμα ΒΚΓ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα ΕΛΖ εἶναι ὅμοιον· εἶναι ἄρα αἱ εἰς αὐτὰ γωνίαι ἴσαι, καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν εἶναι ἴσα· αἱ γωνίαι ἄρα ΒΜΟ, ΕΝΡ εἶναι ἴσαι [ἐπὶ τῆς πρώτης δυάδος τῶν περιπτώσεων, ἐπὶ τῆς δευτέρας δυάδος δὲ ἐκ τοῦ σχετικοῦ πρὸς ταῦτα, δηλαδὴ εἶναι ἡ γωνία ΒΜΟ=ΕΝΡ· διότι καὶ αἱ εἰς τὰ τμήματα ΒΑΓ, ΕΔΖ γωνίαι εἶναι ἴσαι]· γίνεται λοιπὸν ὡς ἡ ΒΜ:ΜΟ, τουτέστιν, ὡς ἡ ΑΜ:ΜΟ=ΕΝ:ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΔΝ:ΝΡ. Εἶναι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΜ:ΜΣ=ΔΝ:ΝΤ· δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλ/σμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι ὡς ἡ ΜΟ:ΜΣ=ΡΝ:ΝΤ. Καὶ εἶναι ὀρθαὶ μὲν αἱ γωνίαι Ο, Ρ, ὀξεῖα δὲ ἑκατέρα τῶν Σ, Τ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΟΜΣ=ΡΝΤ. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΒΜΟ= ΕΝΡ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΒΜΣ=ΕΝΤ, ὥστε καὶ ἡ γωνία Γ=Ζ· ὅλα λοιπὸν εἶναι ὅμοια πρὸς ὅλα.

7. Εἶναι δὲ δυνατόν, ἐνῷ ἡ μία περίπτωσις [ἢ τῶν ἀμβλειῶν ἢ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν] ἔχει προαποδειχθῇ καὶ ἡ ἄλλη περίπτωσις ν' ἀποδειχθῇ ὡς ἑξῆς. Ἔστω, ὅτι προηγουμένως ἔχει ἀποδειχθῆ ἡ περίπτωσις τῶν ἀμβλειῶν γωνιῶν, καθ' ὃν τρόπον ἀνεφέρθη προηγουμένως, καὶ ἔστω τώρα, ὅτι, ἐνῷ ὑπάρχουσι δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἴσαι αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια. Ἂς περιγραφῶσι καὶ πάλιν οἱ κύκλοι, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῶσιν αἱ ΑΗ, ΔΘ μέχρι τῶν Κ, Λ σημείων, ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ· εἶναι ἄρα ἴσαι καὶ αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι ΒΚΓ,

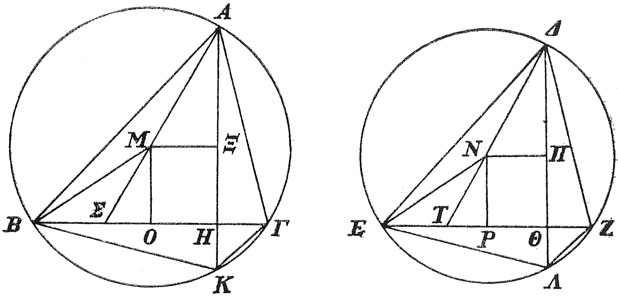
εἰσὶν καὶ αἱ ὑπὸ ΒΚΓ ΕΛΖ γωνίαι ἀμβλεῖαι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΚΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΔΘΛ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, τουτέστιν ἡ ΛΘ πρὸς ΘΔ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, οὕ-
Hu986 *τως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ. καί εἰσιν ἴσαι ἀμβλεῖαι αἱ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ ΕΛΖ γωνίαι, καὶ κάθετοι αἱ ΚΗ ΛΘ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον, ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν ΒΚΗ τρίγωνον τῷ ΕΛΘ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΓΚΗ τῷ ΖΛΘ, ὥστε καὶ τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ ἐστὶν ὅμοιον, τὸ δὲ ΑΗΓ τῷ ΔΘΖ, ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ ὅλῳ τῷ ΔΕΖ ἐστιν ὅμοιον.*

η'. Θέσει δεδομένων τῶν ΑΒ ΑΓ, ἀγαγεῖν παρὰ θέσει τὴν ΔΕ καὶ ποιεῖν δοθεῖσαν τὴν ΔΕ.

Γεγονέτω, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ· παρὰ θέσει ἄρα ἐστίν· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ. διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΔΕ. καὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΑΖ. ἀλλὰ καὶ θέσει καὶ δοθέν ἐστι τὸ Α· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Ζ. διὰ δὴ δεδομένου τοῦ Ζ



ΕΛΖ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ ΒΗ x ΗΓ, τουτέστι τὸ ΑΗxΗΚ: $ΑΗ^2 = ΚΗ:ΗΑ = ΕΘxΘΖ = ΔΘxΘΛ:ΔΘ^2$, τουτέστιν ἡ ΛΘ πρὸς ΘΔ, καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΑΗ^2:ΗΚ^2 = ΔΘ^2:ΘΛ^2$. Εἶναι δὲ καὶ ὡς τὸ $ΒΗxΗΓ:ΑΗ^2 = ΕΘxΘΖ:ΔΘ^2$· δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλ/σμοῦ



κατὰ μέλη) εἶναι ὡς τὸ $ΒΗxΗΓ:ΗΚ^2 = ΕΘxΘΖ:ΘΛ^2$. Καὶ εἶναι ἴσαι αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι ΒΚΓ, ΕΛΖ, καὶ αἱ ΚΗ, ΛΘ εἶναι κάθετοι· διὰ τὸ προαποδειχθὲν λοιπόν, τὸ μὲν τρίγωνον ΒΚΗ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΛΘ, τὸ δὲ ΓΚΗ πρὸς τὸ ΖΛΘ, ὥστε καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΘ, τὸ δὲ ΑΗΓ πρὸς τὸ ΔΘΖ, ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ ΔΕΖ.

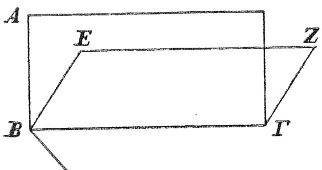
8. Δεδομένων κατὰ τὴν θέσιν τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ ν' ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ καὶ νὰ γίνῃ ἡ ΔΕ δοθεῖσα.

Ἔστω ὅτι ἔγινε, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ ἡ ΑΖ· ἔχει δοθῇ ἄρα κατὰ τὴν θέσιν. Καὶ εἶναι δοθὲν τὸ Α· ἡ ΑΖ ἄρα εἶναι δεδομένη κατὰ τὴν θέσιν. Ἂς ἀχθῇ δὲ διὰ τοῦ Ε παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΕΖ· εἶναι ἄρα ἡ ΑΖ = ΔΕ. Καὶ ἡ ΔΕ εἶναι δοθεῖσα· δοθεῖσα ἄρα εἶναι καὶ ἡ ΑΖ. Ἀλλὰ εἶναι δοθεῖσα καὶ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ Α εἶναι δοθέν· εἶναι παρὰ θέσει τῇ ΑΒ ἦκται ἡ ΖΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ε. καὶ διὰ αὐτοῦ παρὰ θέσει ἦκται ἡ ΔΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν τῇ θέσει δεδομέναι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα τῷ μεγέθει ἔστω ἡ Η, παρ᾽ ἣν δὲ ἄγεται ἔστω ἡ ΑΖ, καὶ τῇ Η ἴση κείσθω ἡ ΑΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΕ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΑΖ τῇ Η ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ δοθείσῃ, καὶ ἡ ΔΕ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ Η τῇ δοθείσῃ· ἡ ΔΕ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. καὶ φανερὸν ὅτι μόνη· αἰεὶ γὰρ ἡ ἔγγιον τοῦ Α τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων.

Hu988 θʹ. Ἔστω δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΒΓ ΕΒΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΒΓ ἐφεστῶτα, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ ὀρθά· λέγω ὅτι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ ΒΕ ΒΓ εὐθεῖαι.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἡ ΗΒ· καὶ τῷ ΕΒΖ ἄρα ἐπιπέδῳ ἔσται ὀρθὴ ἡ ΗΒ, ὥστε καὶ τῇ ΒΕ ἐστιν ὀρθή. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τῇ ΑΒ. ἔστι δὲ καὶ τῇ ΒΓ εὐθείᾳ ἡ ΒΗ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΑΒ ΒΕ ΒΓ ὀρθὴ ἐπὶ τῆς ἁφῆς τῆς Β, ἐφέστηκεν· διὰ ἄρα τὸ ιαʹ στοιχείων ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ αἱ ΑΒ ΒΕ ΒΓ εὐθεῖαι.

ἄρα δοθὲν καὶ τὸ Ζ. Διότι διὰ τοῦ δεδομένου Ζ ἤχθη πρὸς τὴν κατὰ τὴν θέσιν δοθεῖσαν τὴν ΑΒ, παράλληλος ἡ ΖΕ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΖΕ δοθεῖσα κατὰ τὴν θέσιν. Εἶναι δὲ κατὰ τὴν θέσιν δοθεῖσα καὶ ἡ ΑΓ· εἶναι ἄρα δοθὲν τὸ Ε. Καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθη παράλληλος κατὰ τὴν θέσιν ἡ ΔΕ· ἔχει ἄρα δοθῆ κατὰ τὴν θέσιν ἡ ΔΕ.

Τὸ πρόβλημα δὲ θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς. Ἔστωσαν αἱ μὲν κατὰ τὴν θέσιν δεδομέναι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα κατὰ τὸ μέγεθος ἔστω ἡ Η, ἡ παράλληλος δὲ ἔστω ἡ ΑΖ καὶ ἔστω ΑΖ = Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΖΕ, διὰ δὲ τοῦ Ε πρὸς τὴν ΑΖ παράλληλος ἡ ΕΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ πληροῖ τὸ πρόβλημα.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ἡ ΔΕ = ΑΖ, ἀλλὰ ΑΖ = Η, τουτέστι πρὸς τὴν δοθεῖσαν, καὶ ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν Η· ἡ ΔΕ ἄρα λύει τὸ πρόβλημα. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι μόνον αὕτη· διότι πάντοτε ἡ πλησιέστερον τοῦ Α εἶναι μικροτέρα τῆς μακρύτερον εὑρισκομένης.

9. Ἔστω δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΒΓ, ΕΒΖ κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΒΓ· λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΕ, ΒΓ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἡ ΗΒ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΗΒ κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΒΖ, ὥστε εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΕ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ εὐθεῖαν ἡ ΒΗ κάθετος· ἡ ΒΗ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΒ, ΒΕ, ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον τομῆς των τὸ Β· εἶναι ἄρα κατὰ τὸ 11ον βιβλίον τῶν Στοιχείων (Εὐκλ. 11, 5) αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΕ, ΒΓ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

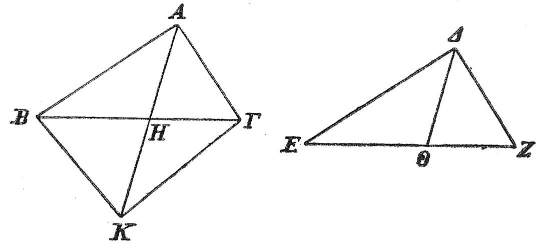
ι΄. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Α Δ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΑΗΒ ΔΘΕ, ἔστω δὲ ὡς ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ· ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΗΓ τῷ ΔΘΖ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΗ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ ΚΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΕΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΚΗ γωνίᾳ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΕ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ ὡς ἡ ΒΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΗ γωνία τῇ Ζ γωνίᾳ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΚΗ γωνία ἴση τῇ Ε, καί εἰσιν αἱ Ε Ζ ὀρθῇ ἴσαι· ἡ ἄρα Hu990 ὑπὸ ΒΚΓ γωνία ἐστὶν ὀρθή. ἀλλὰ καθ᾽ ὑπόθεσιν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὀρθή· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ Α Β Γ Κ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΓ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΔΕΘ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία καθ᾽ ὑπόθεσιν ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΔΘΕ γωνίᾳ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ ἐστιν ὅμοιον.

Ἄλλως ἄμεινον

ια΄. Τετμήσθωσαν δίχα τοῖς Κ Λ σημείοις αἱ ΒΓ ΕΖ,

10. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὰς γωνίας Α, Δ ὀρθάς, καὶ ἂς διαχθῶσιν αἱ ΑΗ, ΔΘ εἰς ἴσας γωνίας τὰς ΑΗΒ, ΔΘΕ, ἔστω δὲ ὡς ἡ ΒΗ : ΗΓ = ΕΘ:ΘΖ· λέγω, ὅτι τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΘ, τὸ δὲ ΑΗΓ πρὸς τὸ ΔΘΖ.



Ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΑΗ, καὶ ἂς γίνῃ ὡς ἡ ΔΘ : ΘΕ = ΓΗ : ΗΚ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΒΚ, ΚΓ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΔΕΘ =ΓΚΗ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ὡς μὲν ἡ ΒΗ:ΗΓ=ΕΘ:ΘΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΗ:ΗΚ= ΔΘ : ΘΕ, διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἄρα κατὰ μέλη εἰς τεταραγμένην ἀναλογίαν (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 18) εἶναι ὡς ἡ ΒΗ:ΗΚ=ΔΘ : ΘΖ. Καὶ εἶναι αἱ πλευραὶ περὶ ἴσας γωνίας. Εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΒΚΗ =γωνίαν Ζ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γωνία ΓΚΗ =γωνίαν Ε, καὶ εἶναι αἱ γωνίαι Ε, Ζ ὀρθαί. Ἡ γωνία ἄρα ΒΚΓ εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή· τὰ σημεῖα ἄρα Α, Β, Γ, Κ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου· εἶναι ἄρα ἴση καὶ ἡ γωνία ΑΚΓ, τουτέστιν ἡ ΔΕΘ πρὸς τὴν ΑΒΓ. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΑΗΒ εἶναι καθ' ὑπόθεσιν ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΘΕ· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΗ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΘ· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΘΖ.

Καλλίτερον κατ' ἄλλον τρόπον

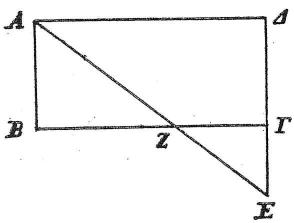
11. Ἂς τμηθῶσιν εἰς τὸ μέσον αἱ ΒΓ, ΕΖ διὰ τῶν σημείων

καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ ΔΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΖ, συνθέντι καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων καὶ ἀναστρέψαντι γίνεται ὡς ἡ ΓΚ, τουτέστιν ἡ ΑΚ, πρὸς ΚΗ, οὕτως ἡ ΛΖ, τουτέστιν ἡ ΔΛ, πρὸς ΛΘ. καί εἰσιν ἴσαι μὲν αἱ πρὸς τοῖς Η Θ σημείοις γωνίαι, αἱ δὲ ὑπὸ ΚΑΗ ΛΔΘ ἑκατέρα ἅμα ὀξεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΛΘ γωνίᾳ. καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ Β ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Ε. ἀλλὰ καὶ ἡ Η γωνία τῇ Θ ἴση ἐστίν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ τριγώνῳ ἐστὶν ὅμοιον.

Τοῦ ζʹ ηʹ

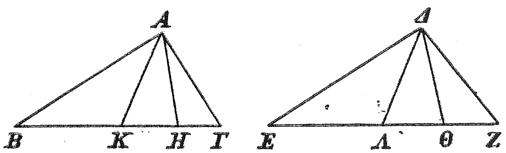
αʹ. Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΑ· ὅτι τὸ ὑπὸ ΕΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΖΒΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΕΔΓ.

Hu992 *Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΓ ΓΖ, ὧν τὰ ἀπὸ τῶν ΕΑ ΑΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ ΔΑ, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ ΓΒ, καὶ τοῖς*



ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΖ, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ ΒΖ τετραγώνοις, λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΕΔ ΔΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΖΒ ΒΓ· καὶ τὸ ἅπαξ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΕΔΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΖΒΓ, ὅπερ : ~

Κ,Λ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΚ, ΔΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς ἡ ΒΗ:ΗΓ=ΕΘ:ΘΖ, διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18) εἶναι ΒΗ+ΗΓ/ΗΓ = ΕΘ+ΘΖ/ΘΖ ἢ (ἐκ τοῦ σχήματος) ΒΓ/ΗΓ= ΕΖ/ΘΖ, καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἀριθμητῶν, ΓΚ:ΗΓ=ΖΛ:ΘΖ, καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων ($\alpha/\beta = \gamma/\delta$, ἀναστροφὴ εἶναι $\alpha/\alpha - \beta = \gamma/\gamma - \delta$) (ΓΚ=ΑΚ)/ΚΗ = (ΛΖ=ΔΛ)/ΛΘ.



Καὶ εἶναι ἴσαι μὲν αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Η, Θ γωνίαι, ἑκατέρα δὲ τῶν ΚΑΗ, ΛΔΘ εἶναι συγχρόνως καὶ ὀξεῖα· εἶναι ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΚΗ=ΔΛΘ. Καὶ τὰ ἡμίση τούτων εἶναι ἴσα· καὶ ἡ γωνία ἄρα Β=Ε. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία Η=Θ· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΗ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΘ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΘΖ.

Λήμματα εἰς τὰ βιβλία 7ον καὶ 8ον τῶν Κωνικῶν

1. Ἔστω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓ, καὶ ἂς διαχθῇ ἡ ΕΖΑ· λέγω, ὅτι τὸ ΕΑ xΑΖ = ΖΒ x ΒΓ + ΕΔ x ΔΓ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΕΖ² = ΕΓ² + ΓΖ², καὶ ΕΑ² + ΑΖ² = ΕΔ² + ΔΑ² + ΑΒ² + ΒΖ² = ΕΔ² + ΓΒ²+ ΓΔ²+ΒΖ², τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ 2ΕΑxΑΖ = 2ΕΔxΔΓ+2ΖΒxΒΓ· ἐπομένως ΕΑ x ΑΖ = ΕΔxΔΓ+ΖΒxΒΓ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′. Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΑΖ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΔ ΔΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΓ ΓΖ, ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΑ ΑΖ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ ΔΓ ΓΒ ΒΖ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΔΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒΖ, ὥστε καὶ τὸ ἅπαξ τῷ ἅπαξ.

γ′. Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΓΖΔ, καὶ ἔστω μείζω τμήματα τὰ ΑΕ ΓΖ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΕ τῆς ΓΖ.

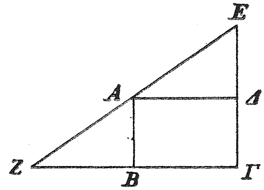
Τετμήσθωσαν ὅλαι αἱ ΑΒ ΓΔ δίχα τοῖς Η Θ Hu994 *σημείοις· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ τῆς ΔΘ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΗΒ μεῖζον τοῦ ἀπὸ ΔΘ τετραγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΖΔ· καὶ τὸ ἀπὸ ΗΕ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΘΖ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕ τῆς ΘΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΗ μείζων τῆς ΓΘ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλης τῆς ΓΖ μείζων ἐστίν.*

δ′. Ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΓΖΔ, ἴσων οὐσῶν τῶν ΑΒ ΓΔ· ὅτι τὰ μείζονα τμήματα τὰ ΑΕ ΓΖ ἴσα ἐστί. (τὸ δ᾽ ἐφεξῆς· τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ ΓΔ δίχα τοῖς ΗΘ:~).

ε′. Ἔστω μὲν μείζων ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΕ τῆς ΔΖ, οὔσης μείζονος τῆς μὲν ΑΒ τῆς ΒΕ, τῆς δὲ ΓΔ τῆς ΔΖ· ὅτι ἡ τῶν ΑΒ ΒΕ ὑπεροχὴ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν ΓΔ ΔΖ ὑπεροχῆς.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, καὶ ἡ τῶν ΑΒ ΒΕ ὑπεροχὴ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς τῶν ΓΔ ΕΒ ὑπεροχῆς.

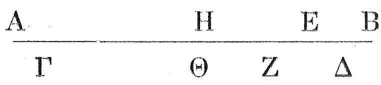
2. Ἔστω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓ καὶ ἂς διαχθῇ ἡ ΕΑΖ· λέγω, ὅτι τὸ $ΕΔ \times ΔΓ + ΓΒ \times ΒΖ = ΕΑ \times ΑΖ$.



Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΕΖ^2 = ΕΓ^2 \times ΓΖ^2$, εἶναι δὲ καὶ $ΕΑ^2 + ΑΖ^2 = ΕΔ^2 + ΔΓ^2 + ΓΒ^2 + ΒΖ^2$, εἶναι ἄρα καὶ τὸ $2ΕΑ \times ΑΖ = 2ΕΔ \times ΔΓ + 2ΓΒ \times ΒΖ$, ὥστε εἶναι καὶ $ΕΑ \times ΑΖ = ΕΔ \times ΔΓ + ΓΒ \times ΒΖ$.

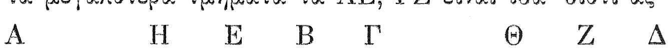
3. Ἔστω ἡ $ΑΒ > ΓΔ$, καὶ τὸ $ΑΕ \times ΕΒ = ΓΖ \times ΖΔ$, καὶ ἔστω μεγαλύτερα τμήματα τὰ ΑΕ, ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ $ΑΕ > ΓΖ$.

Ἂς τμηθῶσιν ὅλαι αἱ ΑΒ, ΓΔ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα



Η, Θ· εἶναι ἄρα ἡ $ΗΒ > ΔΘ$, ὥστε καὶ τὸ $ΗΒ^2 > ΔΘ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $ΑΕ \times ΕΒ = ΓΖ \times ΖΔ$· εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΗΕ^2 > ΘΖ^2$· εἶναι ἄρα ἡ $ΗΕ > ΘΖ$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ $ΑΗ > ΓΘ$· ὅλη ἄρα ἡ $ΑΕ >$ ὅλης τῆς ΓΖ.

4. Ἔστω τὸ $ΑΕ \times ΕΒ = ΓΖ \times ΖΔ$, ἐνῷ εἶναι $ΑΒ = ΓΔ$· λέγω, ὅτι τὰ μεγαλύτερα τμήματα τὰ ΑΕ, ΓΖ εἶναι ἴσα· διότι ἂς τμη-



θῶσιν αἱ ΑΒ, ΓΔ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα Η, Θ κ.λπ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5. Ἔστω μὲν ἡ $ΑΒ > ΓΔ$, ἡ δὲ $ΒΕ < ΔΖ$, καὶ $ΑΒ > ΒΕ$, $ΓΔ > ΔΖ$· λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ $ΑΒ - ΒΕ > ΓΔ - ΔΖ$.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $ΑΒ > ΓΔ$, εἶναι ἄρα καὶ $ΑΒ - ΒΕ > ΓΔ - ΕΒ$. Ἀλλὰ $ΓΔ - ΕΒ > ΓΔ - ΔΖ$ (διότι $ΕΒ < ΔΖ$), ὥστε ἀλλὰ ἡ τῶν ΓΔ ΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν ΓΔ ΔΖ ὑπεροχῆς (ἐλάσσων γάρ ἐστιν ἡ ΕΒ τῆς ΔΖ), ὥστε ἡ τῶν ΑΒ ΒΕ ὑπεροχὴ πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν ΓΔ ΔΖ ὑπεροχῆς.

ς′. Ἔστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ ΔΖ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ ΔΕ.

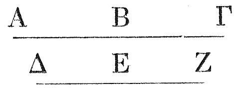
Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΓΑ τῆς ΑΒ, κοινὸν ὕψος ἡ ΔΕ τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΑ ΔΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ ΔΕ. πάλιν ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ, κοινὸν ὕψος ἡ ΑΓ τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ ΔΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΓ ΔΕ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΑΓ ΔΕ τοῦ ὑπὸ ΑΒ ΔΕ διπλάσιόν ἐστι· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ ΔΖ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ ΔΕ.

ζ′. Ἔστω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘΖ.

Hu996 Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, ἀναστρέψαντί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕΘ. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς ΔΕ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς ΔΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΔΘ, καὶ

$AB - BE$ κατὰ μείζονα λόγον εἶναι $> \Gamma\Delta - \Delta Z$.

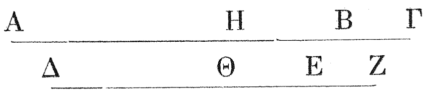
6. Ἔστω $AB = B\Gamma$ καὶ $\Delta E = EZ$· λέγω, ὅτι $A\Gamma \times \Delta Z = 4AB \times \Delta E$. Διότι, ἐπειδὴ $\Gamma A = 2AB$, καὶ κοινὸν ὕψος τὸ ΔE,



εἶναι ἄρα τὸ $\Gamma A \times \Delta E = 2AB \times \Delta E$. Πάλιν, ἐπειδὴ $\Delta Z = 2\Delta E$, καὶ κοινὸν ὕψος ἡ $A\Gamma$, εἶναι ἄρα $A\Gamma \times \Delta Z = 2A\Gamma \times \Delta E$. Ἀλλὰ $A\Gamma \times \Delta E = 2AB \times \Delta E$· εἶναι ἄρα τὸ $A\Gamma \times \Delta Z = 4AB \times \Delta E$.

7. Ἔστω ὡς μὲν $AB:B\Gamma = \Delta E:EZ$, ὡς δὲ $AB:BH = \Delta E:E\Theta$· λέγω, ὅτι γίνεται ὡς τὸ $AB \times BH : AH \times H\Gamma = \Delta E \times E\Theta : \Delta\Theta \times \Theta Z$.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ $AB:BH = \Delta E:E\Theta$, δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων εἶναι $BA:(AB - BH) = E\Delta:(\Delta E - E\Theta)$, (ἐκ τοῦ σχήματος), $BA:AH = E\Delta:\Delta\Theta$· ὥστε καὶ ὡς $BA:AH = \Delta E^2:\Delta\Theta^2$. Ἀλλὰ καὶ ὡς $AB^2:AB \times BH = \Delta E^2:\Delta E \times E\Theta$· καὶ ὡς ἄρα $AH^2:AB \times BH = \Delta\Theta^2:\Delta E \times E\Theta$. Ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη $AB:B\Gamma =$



$\Delta E:EZ$, ἀνάπαλιν εἶναι $B\Gamma:AB = EZ:\Delta E$, καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι $(B\Gamma + AB):AB = (EZ + \Delta E):\Delta E$, (καὶ ἐκ τοῦ σχήματος), $\Gamma A:AB = Z\Delta:\Delta E$. Εἶναι δὲ καὶ ὡς $BA:AH = E\Delta:\Delta\Theta$· διὰ πολλ/σμοῦ ἄρα κατὰ μέλη εἶναι ὡς $\Gamma A:AH = Z\Delta:\Delta\Theta$· καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 17), εἶναι $(\Gamma A - AH)/AH = (Z\Delta - \Delta\Theta)/\Delta\Theta$, (ἐκ τοῦ σχήματος), $\Gamma H:HA = \Theta Z:\Delta\Theta$. Πολλαπλασιάζοντες ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ πρώτου λόγου ἐπὶ AH καὶ τοῦ δευτέρου λόγου ἐπὶ $\Delta\Theta$ λαμβάνομεν $H\Gamma \times AH : AH^2 = \Theta Z \times \Delta\Theta : \Delta\Theta^2$ (τὸ ὑπὸ διὰ τοῦ ἀπὸ = ὑπὸ διὰ τοῦ ἀπό) ὡς τὸ ὑπὸ πρὸς τὸ ἀπό, οὕτως τὸ ὑπὸ πρὸς τὸ ἀπό. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘΖ.

η′. Ἔστω δοθέντα συναμφότερα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ δοθεῖσα ἡ τῶν ἀπὸ ΑΒ ΒΓ ὑπεροχή· ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΒΓ.

Κείσθω γὰρ τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΔ (ὑπεροχὴ γάρ ἐστιν τῶν ἀπὸ ΑΒ ΒΓ τετραγώνων). ἀλλὰ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑΔ δοθέν ἐστιν (ἐπεὶ καὶ τὸ ὑπὸ ΓΑΔ δοθέν ἐστιν)· δοθὲν ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑ ΑΔ, ὥστε δοθεῖσά ἐστι συν-
Hu998 αμφότερος ἡ ΓΑ ΑΔ. καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἡ ΒΑ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ, ὥστε καὶ ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστιν.

θ′. Ἔστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἔτι δὲ ἔστω ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ.

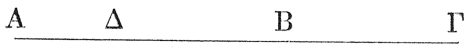
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΘ, ἔσται ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘΕ. ἀλλὰ καὶ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ· ἔσται ἄρα δι᾿ ἴσου ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ.

ι′. Ἔστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΔ

Ἀλλὰ καὶ ὡς ΑΗ^2:ΑΒxΒΗ = ΔΘ^2:ΔΕxΕΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒxΒΗ:ΑΗxΗΓ = ΔΕxΕΘ:ΔΘxΘΖ.

8. Ἔστω δοθέντα τὰ ΑΒ^2 + ΒΓ^2 καὶ ΑΒ^2 - ΒΓ^2· λέγω, ὅτι δοθεῖσα εἶναι καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.

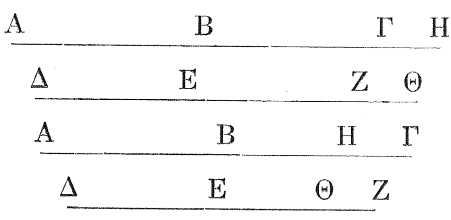
Διότι ἂς ληφθῇ ΓΒ = ΒΔ· εἶναι ἄρα δοθὲν τὸ ΓΑxΑΔ (διότι τοῦτο εἶναι = ΑΒ^2 - ΒΓ^2). Ἀλλὰ καὶ τὸ 2ΓΑxΑΔ εἶναι



δοθὲν (ἐπειδὴ καὶ τὸ ΓΑxΑΔ εἶναι δοθέν)· εἶναι ἄρα δοθὲν καὶ τὸ ΓΑ^2+ΑΔ^2, ὥστε εἶναι δοθὲν καὶ τὸ ΓΑ+ΑΔ. Καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τούτου εἶναι ἡ ΒΑ· εἶναι ἄρα δοθεῖσα ἡ ΒΑ, ὥστε καὶ ἡ ΒΓ εἶναι δοθεῖσα.

9. Ἔστω ΑΒ = ΒΓ, ΔΕ = ΕΖ, καὶ ὡς ΓΒ:ΒΗ = ΖΕ : ΕΘ· λέγω, ὅτι γίνεται ὡς τὸ ΑΗxΗΒ:ΒΓxΓΗ = ΔΘxΘΕ:ΕΖxΖΘ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΓΒ:ΒΑ = ΖΕ:ΕΔ, ἀλλὰ καὶ ὡς



ἡ ΓΒ:ΒΗ = ΖΕ:ΕΘ, θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὡς ΑΗ^2:ΑΗxΗΒ = ΔΘ^2:ΔΘxΘΕ. Ἀλλὰ καὶ ὡς μὲν τὸ ΑΗ^2:ΒΓ^2 = ΔΘ^2:ΕΖ^2, ὡς δὲ τὸ ΒΓ^2:ΒΓxΓΗ = ΕΖ^2:ΕΖxΖΘ· θὰ εἶναι διὰ πολλ/σμοῦ κατὰ μέλη, ὡς τὸ ΑΗxΗΒ:ΒΓxΓΗ = ΔΘxΘΕ:ΕΖxΖΘ.

10. Ἔστω ΑΒ = ΒΓ, ΒΔ $<$ ΒΕ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΔxΔΒ:ΒΓx

τῆς ΒΕ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΕ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση μέν ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΕ, ἡ ΓΔ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΑΕ, ὥστε καὶ ἡ ΓΕ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΔ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ τοῦ ὑπὸ ΓΕΒ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ τοῦ ὑπὸ ΒΑΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΓΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΕ.

Hu1000 ια'. Ἔστω δὲ νῦν τὸ τοῖς προηγουμένοις ἀναστρόφιον δεῖξαι. οὔσης ἴσης τῆς μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, τῆς δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἔστω ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ· δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΘ.

Κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΑΗΒ ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΗ ΑΚ, τῷ δὲ ὑπὸ ΔΘΕ ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΘ ΔΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΚ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ΑΚ πρὸς ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΛ ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ, τουτέστιν ἡ ΔΛ πρὸς ΕΖ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ· αἱ ΑΚ ΒΓ ΒΚ ἄρα ταῖς ΔΛ ΕΖ ΕΛ ὁμοταγεῖς εἰσιν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ [τουτέστιν ὡς ἡ ΚΓ πρὸς ΓΒ, οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς ΖΕ]. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚ ΓΗ, ἀμφότερον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΚ ΗΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚ ΒΓ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΚ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ. διὰ ταὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΛ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΚ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΛ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ διὰ τὴν ἀναλογίαν τῶν ὁμοταγῶν τμημάτων· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ

ΓΔ < ΓΕxΕΒ:ΒΑxΑΕ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ = ΒΓ, ΒΔ < ΒΕ, εἶναι ἄρα ἡ ΓΔ >

Α Ε Β Δ Γ

ΑΕ, ὥστε καὶ ἡ ΓΕ > ΑΔ. Εἶναι ἄρα ΑΔxΔΒ < ΓΕxΕΒ καὶ ΒΓxΓΔ > ΒΑxΑΕ· Εἶναι ἄρα ΑΔxΔΒ:ΒΓxΓΔ < ΓΕxΕΒ: ΒΑxΑΕ.

11. Ἔστω τώρα ν' ἀποδειχθῇ τὸ ἀντίστροφον τῶν προηγουμένων. Ἔστω ΑΒ = ΒΓ, ΔΕ = ΕΖ καὶ ΑΗxΗΒ:ΒΓxΓΗ = ΔΘxΘΕ:ΕΖxΖΘ· νὰ δειχθῇ ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΓΒ:ΒΗ = ΖΕ:ΕΘ.

Ἄς ληφθῇ ΑΗxΗΒ=ΓΗxΑΚ, ΔΘxΘΕ=ΖΘxΔΛ· εἶναι ἄρα ὡς ΑΚxΓΗ:ΒΓxΓΗ, τουτέστιν ἡ ΑΚ:ΒΓ=ΔΛxΖΘ:ΕΖxΖΘ, τουτέστιν =ΔΛ:ΕΖ. Ἀλλὰ καὶ ὡς ΓΒ:ΒΑ=ΖΕ:ΕΔ· εἶναι ἄρα αἱ ΑΚ, ΒΓ, ΒΚ πρὸς τὰς ΔΛ, ΕΖ, ΕΛ ὁμοταγεῖς εἰς τὸν

Α Β Γ Η Κ

Δ Ε Ζ Θ Λ

αὐτὸν λόγον [τουτέστιν ὡς ἡ ΚΓ:ΓΒ=ΛΖ:ΖΕ]. (ὁμοταγεῖς, ΑΚ:ΒΓ:ΒΚ = ΔΛ:ΕΖ:ΕΚΛ). Ἐπειδὴ δὲ ΑΗxΗΒ = ΑΚxΓΗ, ἂς ἀφαιρεθῇ ἕκαστον τούτων ἀπὸ τοῦ ΑΚxΗΒ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΒΗxΗΚ=ΑΚxΒΓ· εἶναι ἄρα ὡς ΑΚxΒΓ:ΒΚ^2=ΒΗx ΗΚ:ΒΚ^2. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι ὡς ΔΛxΕΖ:ΕΛ^2= ΕΘxΘΛ:ΕΛ^2. Καὶ εἶναι ὡς τὸ ΑΚxΒΓ:ΒΚ^2=ΔΛxΕΖ:ΕΛ^2 διὰ τὴν ἀναλογίαν τῶν ὁμοταγῶν τμημάτων· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΗxΗΚ:ΒΚ^2=ΕΘxΘΛ:ΕΛ^2. Καὶ εἶναι τὰ αὐτὰ τμήματα τὰ

Hu1002 *ΕΛ. καὶ ἔστιν τὰ αὐτὰ τμήματα τὰ ΒΗ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἡ ΛΕ πρὸς ΕΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΖΕ πρὸς ΕΘ.*

ιβ′. Ἔστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἔτι δὲ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ· ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως καὶ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσω.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΘ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΘ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζω· ὥστε καὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΕ πρὸς ΕΘ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζω· καὶ ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΔ πρὸς ΔΕ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσω. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσω.

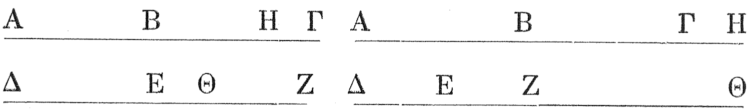
ιγ′. Ἔστω πάλιν ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἔτι δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ· ὅτι καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ.

Ἐπεὶ γὰρ κατὰ ἀναστροφὴν καὶ διαίρεσιν ἡ ΗΒ πρὸς
Hu1004 *τὴν ΒΑ, τουτέστιν τὴν ΒΓ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΔ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΕΖ, ἀναστρέψαντι*

ΒΗ, ΕΘ (δηλ. ΒΗ = ΒΚ - ΗΚ, ΕΘ = ΕΛ - ΘΛ, τουτέστι ΗΚ = ΒΚ - ΒΗ καὶ ΘΛ = ΕΛ - ΕΘ, ΒΗ (ΒΚ - ΒΗ) / ΒΚ^{2} = ΕΘ (ΕΛ - ΕΘ) / ΕΛ^{2}, ΒΚ / ΒΗ = ΕΛ / ΕΘ, Hultsch)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΚΒ:ΒΗ = ΛΕ:ΕΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ:ΒΗ = ΖΕ : ΕΘ.

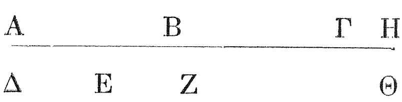
12. Ἔστω ΑΒ = ΒΓ, ΔΕ = ΕΖ, ΒΓ:ΓΗ > ΕΖ : ΖΘ· λέγω, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης περιπτώσεως καὶ ἡ ΑΗ:ΒΓ > ΔΘ:ΕΖ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ΑΗ:ΒΓ < ΔΘ : ΕΖ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΓ:ΓΗ > ΕΖ:ΖΘ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης περιπτώσεως ἡ ΓΒ:ΒΗ < ΖΕ:ΕΘ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ΓΒ:



ΒΗ > ΖΕ:ΕΘ· ὥστε καὶ ἡ ΑΒ:ΒΗ < ΔΕ : ΕΘ ἐπὶ τῆς πρώτης περιπτώσεως, καὶ ΑΒ:ΒΗ > ΔΕ:ΕΘ ἐπὶ τῆς δευτέρας περιπτώσεως· καὶ ἡ ΗΑ:ΑΒ > ΘΔ : ΔΕ ἐπὶ τῆς πρώτης περιπτώσεως, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ΗΑ:ΑΒ < ΘΔ:ΔΕ. Καὶ εἶναι ΑΒ: ΒΓ = ΔΕ:ΕΖ· διὰ πολλ/σμοῦ κατὰ μέλη ἄρα εἶναι ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης περιπτώσεως ΑΗ:ΒΓ > ΔΘ:ΕΖ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ΑΗ:ΒΓ < ΔΘ : ΕΖ.

13. Ἔστω πάλιν ΑΒ = ΒΓ, ΔΕ = ΕΖ, ΑΗ:ΗΒ > ΔΘ:ΘΕ· λέγω, ὅτι καὶ ΒΓ : ΓΗ > ΕΖ : ΖΘ.



Διότι, ἐπειδὴ κατ' ἀντιστροφὴν καὶ κατὰ διαίρεσιν τῶν λόγων ἡ ΗΒ:ΒΑ, τουτέστιν ἡ ΗΒ:ΒΓ < ΘΕ:ΕΔ, τουτέστιν καὶ διελόντι ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ.

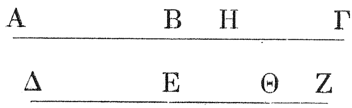
ιδʹ. Ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ· ὅτι ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ.

Ἐπεὶ γὰρ κατὰ διαίρεσιν ἡ ΑΒ, τουτέστιν ἡ ΒΓ, πρὸς τὴν ΒΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΕ, τουτέστιν ἡ ΕΖ, πρὸς τὴν ΕΘ, ἀναστρέψαντι καὶ κατὰ διαίρεσιν ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ.

$<$ ΘΕ:ΕΖ, δι' ἀναστροφῆς καὶ διαιρέσεως τῶν λόγων εἶναι ΒΓ: ΓΗ $>$ ΕΖ : ΖΘ.

14. Ἡ ΑΒ $=$ ΒΓ, ΔΕ $=$ ΕΖ, καὶ ΑΗ:ΗΒ $>$ ΔΘ:ΘΕ· λέγω, ὅτι ΒΗ:ΗΓ $<$ ΕΘ : ΘΖ.

Διότι, ἐπειδὴ κατὰ τὴν διαίρεσιν τῶν λόγων ἡ ΑΒ, του-



τέστιν ἡ ΒΓ:ΒΗ $>$ ΔΕ, τουτέστιν ΕΖ:ΕΘ, δι' ἀναστροφῆς καὶ διαιρέσεως τῶν λόγων θὰ εἶναι ΒΗ:ΗΓ $<$ ΕΘ : ΘΖ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ
ΣΧΟΛΙΑ ΕΙΣ ΤΑ ΚΩΝΙΚΑ

H168

ΕΥΤΟΚΙΟΥ
ΣΧΟΛΙΑ ΕΙΣ ΤΑ ΚΩΝΙΚΑ

Εἰς τὸ πρῶτον

Ἀπολλώνιος ὁ γεωμέτρης, ὦ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε, γέγονε μὲν ἐκ Πέργης τῆς ἐν Παμφυλίᾳ ἐν χρόνοις τοῦ Εὐεργέτου Πτολεμαίου, ὡς ἱστορεῖ Ἡράκλειος ὁ τὸν βίον Ἀρχιμήδους γράφων, ὅς καί φησι τὰ κωνικὰ θεωρήματα ἐπινοῆσαι μὲν πρῶτον τὸν Ἀρχιμήδη, τὸν δὲ Ἀπολλώνιον αὐτὰ εὑρόντα ὑπὸ Ἀρχιμήδους μὴ ἐκδοθέντα ἰδιοποιήσασθαι, οὐκ ἀληθεύων κατά γε τὴν ἐμήν. ὅ τε γὰρ Ἀρχιμήδης ἐν πολλοῖς φαίνεται ὡς παλαιοτέρας τῆς στοιχειώσεως τῶν κωνικῶν μεμνημένος, καὶ ὁ Ἀπολλώνιος οὐχ ὡς ἰδίας ἐπινοίας γράφει· οὐ γὰρ ἂν ἔφη ἐπὶ πλέον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργάσθαι ταῦτα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα. ἀλλ' ὅπερ φησὶν ὁ Γεμῖνος ἀληθές ἐστιν, ὅτι οἱ παλαιοὶ κῶνον ὁριζόμενοι τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου περιφορὰν μενούσης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν εἰκότως καὶ τοὺς κώνους πάντας ὀρθοὺς ὑπελάμβανον γίνεσθαι καὶ μίαν τομὴν H170 *ἐν ἑκάστῳ, ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τὴν νῦν καλουμένην παραβολήν, ἐν δὲ τῷ ἀμβλυγωνίῳ τὴν ὑπερβολήν, ἐν δὲ τῷ ὀξυγωνίῳ τὴν ἔλλειψιν· καὶ ἔστι παρ' αὐτοῖς εὑρεῖν οὕτως ὀνομαζομένας*

Σημ.: Ὅπου παραπλεύρως τοῦ ἀρχαίου κειμένου σημειοῦται Η, δηλοῦται ἡ σελὶς τῆς ἐκδόσεως Apollonii Pergaei, Heiberg, 1893 Λειψία.

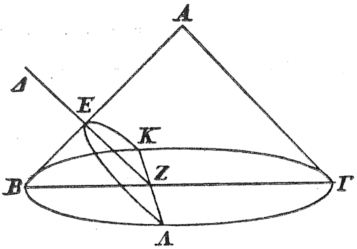
ΕΥΤΟΚΙΟΥ
ΣΧΟΛΙΑ ΕΙΣ ΤΑ ΚΩΝΙΚΑ

Εἰς τὸ βιβλίον 1

Ὁ Ἀπολλώνιος ὁ γεωμέτρης, ὦ φίλε συνάδελφε Ἀνθέμιε, ἐγεννήθη μὲν εἰς τὴν Πέργην τῆς Παμφυλίας κατὰ τοὺς χρόνους τοῦ Πτολεμαίου τοῦ Εὐεργέτου (ἐβασίλευσεν ἀπὸ 286 - 222), ὅπως γράφει ὁ Ἡρακλείδης ὁ βιογράφος τοῦ Ἀρχιμήδους, ὁ ὁποῖος καὶ λέγει, ὅτι τὰ θεωρήματα τῶν Κωνικῶν τομῶν τὰ ἐπενόησε μὲν πρῶτον ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Ἀπολλώνιος δὲ ἀνευρὼν αὐτὰ μὴ ἐκδοθέντα ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰ ἰδιοποιήθη, μὴ λέγων τὴν ἀλήθειαν κατὰ τὴν γνώμην μου. Διότι καὶ ὁ Ἀρχιμήδης φαίνεται, ὅτι εἰς πολλὰ χρησιμοποιεῖ παλαιοτέρας γνώσεις περὶ τῶν στοιχείων τῶν Κωνικῶν τομῶν, καὶ ὁ Ἀπολλώνιος δὲν γράφει, ὅτι τὰ Στοιχεῖα τῶν Κωνικῶν εἶναι ἰδική του ἐπινόησις· διότι δὲν θὰ ἔλεγεν, ὅτι ἐπεξειργάσθη ταῦτα περισσότερον καὶ γενικώτερον, ἐν σχέσει μὲ τοὺς προγενεστέρους του. Ἀλλ' ἀληθὲς εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον λέγει ὁ Γεμῖνος (ἀκμὴ 2ον ἥμισυ τοῦ 1ου αἰῶνος π.Χ.), ὅτι οἱ παλαιοί, ὁρίζοντες τὸν κῶνον προερχόμενον ἐκ περιφορᾶς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐνῷ ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἔμενεν ἀκίνητος, εὐλόγως ἐνόμιζον, ὅτι ὅλοι οἱ κῶνοι γίνονται ὀρθοὶ (ὀρθογώνιοι) καὶ ἐλάμβανον μίαν τομὴν εἰς ἕκαστον, εἰς μὲν τὸν ὀρθογώνιον κῶνον τὴν τώρα λεγομένην παραβολήν, εἰς δὲ τὸν ἀμβλυγώνιον τὴν ὑπερβολήν, εἰς δὲ τὸν ὀξυγώνιον τὴν ἔλλειψιν· καὶ δύναταί τις εἰς αὐτοὺς τὰς τομάς. ὥσπερ οὖν τῶν ἀρχαίων ἐπὶ ἑνὸς ἑκάστου εἴδους τριγώνου θεωρησάντων τὰς δύο ὀρθὰς πρότερον ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ καὶ πάλιν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ καὶ ὕστερον ἐν τῷ σκαληνῷ οἱ μεταγενέστεροι καθολικὸν θεώρημα ἀπέδειξαν τοιοῦτο· παντὸς τριγώνου αἱ ἐντὸς τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· οὕτως καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν· τὴν μὲν γὰρ λεγομένην ὀρθογωνίου κώνου τομὴν ἐν ὀρθογωνίῳ μόνον κώνῳ ἐθεώρουν τεμνομένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, τὴν δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομὴν ἐν ἀμβλυγωνίῳ γινομένην κώνῳ ἀπεδείκνυσαν, τὴν δὲ τοῦ ὀξυγωνίου ἐν ὀξυγωνίῳ, ὁμοίως ἐπὶ πάντων τῶν κώνων ἄγοντες τὰ ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου· δηλοῖ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ἀρχαῖα ὀνόματα τῶν γραμμῶν. ὕστερον δὲ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος καθόλου τι ἐθεώρησεν, ὅτι ἐν παντὶ κώνῳ καὶ ὀρθῷ καὶ σκαληνῷ πᾶσαι αἱ τομαί εἰσι κατὰ διάφορον τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸν κῶνον προσβολήν· ὃν καὶ θαυμάσαντες οἱ κατ' αὐτὸν γενόμενοι διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ' αὐτοῦ δεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων μέγαν γεωμέτρην ἐκάλουν. ταῦτα μὲν οὖν ὁ Γεμῖνος ἐν τῷ ἕκτῳ φησὶ τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας. ὃ δὲ λέγει, σαφὲς ποιήσομεν ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν.

H172 ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ καὶ ἤχθω τῇ AB ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ E πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔE, καὶ τὸ διὰ τῆς ΔE ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν AB τεμνέτω τὸν κῶνον· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $AE\Delta$, AEZ γωνιῶν. ὀρθογωνίου μὲν ὄντος τοῦ κώνου νὰ εὕρῃ τὰς ὀνομασίας αὐτὰς τῶν τομῶν. Ἐνῷ λοιπὸν οἱ ἀρχαῖοι ἐθεώρουν τὰς δύο ὀρθὰς γωνίας (τοῦ τριγώνου) εἰς ἕκαστον εἶδος τριγώνου, πρῶτον εἰς τὸ ἰσόπλευρον, κατόπιν εἰς τὸ ἰσοσκελὲς καὶ ἔπειτα εἰς τὸ σκαληνόν, οἱ μεταγενέστεροι ἀπέδειξαν τὸ ἑξῆς καθολικώτερον θεώρημα· παντὸς τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς· τὸ αὐτὸ συνέβη καὶ μὲ τὰς κωνικὰς τομάς· διότι τὴν μὲν λεγομένην ὀρθογωνίου κώνου τομὴν ἐνόμιζον, ὅτι γίνεται μόνον κατὰ τὴν τομὴν ὀρθογωνίου κώνου, τεμνομένου δι' ἐπιπέδου καθέτως ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, τὴν δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομήν, γινομένην εἰς ἀμβλυγώνιον κῶνον ἀπεδείκνυον, τὴν δὲ ὀξυγωνίου γινομένην εἰς ὀξυγώνιον, φέροντες ἐπὶ ὅλων τῶν κώνων ὁμοίως τὰ ἐπίπεδα καθέτως ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου· τοῦτο δὲ σημαίνεται καὶ ἐξ αὐτῶν τῶν ἀρχαίων ὀνομάτων τῶν γραμμῶν. Ὕστερα δὲ ὁ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐσκέφθη κάτι τὸ γενικώτερον, ὅτι εἰς πάντα κῶνον καὶ ὀρθὸν καὶ σκαληνὸν ὅλαι αἱ τομαὶ γίνονται ἀναλόγως τῆς διαφόρου φορᾶς τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸν κῶνον· τὸν ὁποῖον οἱ σύγχρονοί του θαυμάσαντες διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ' αὐτοῦ ἀποδεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων ὠνόμαζον μέγαν γεωμέτρην. Ταῦτα μὲν λοιπὸν ὁ Γεμῖνος ἀναφέρει εἰς τὸ ἕκτον βιβλίον του τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν. Ἐκεῖνο δέ, τὸ ὁποῖον λέγει θὰ τὸ κάμωμεν σαφὲς διὰ τῶν κατωτέρω σχημάτων.

Ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε ἡ ΔΕ καὶ τὸ διὰ τῆς ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐπίπεδον προεκβληθὲν ἂς τέμνῃ τὸν κῶνον· εἶναι ἄρα ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΑΕΔ, ΑΕΖ. Ἐνῷ λοιπὸν εἶναι ὀρθογώνιος ὁ κῶνος καὶ ἡ γωκαὶ ὀρθῆς δηλονότι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς δύο ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ

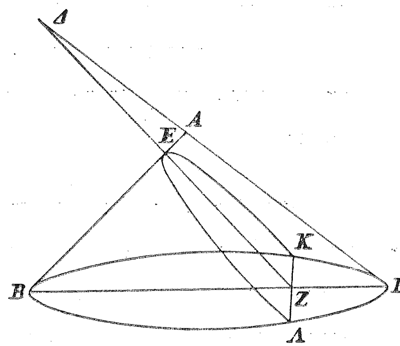


γωνίαι· ὥστε παράλληλος ἔσται ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ. καὶ γίνεται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴ ἡ καλουμένη παραβολὴ οὕτω κληθεῖσα ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι τὴν ΔΕΖ, ἥτις ἐστὶ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, τῇ ΑΓ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου.

ἐὰν δὲ ἀμβλυγώνιος ᾖ ὁ κῶνος ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς ἀμβλείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ὀρθῆς δὲ τῆς ὑπὸ ΑΕΖ, δύο ὀρθῶν μείζους ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνίαι· ὥστε οὐ συμπεσεῖται ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Ζ, Γ μέρη, ἀλλὰ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Α, Ε προσεκβαλλομένης δηλονότι τῆς ΓΑ ἐπὶ τὸ Δ. ποιήσει οὖν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολὴν οὕτω κληθεῖσαν ἀπὸ τοῦ ὑπερβάλλειν
H174 τὰς εἰρημένας γωνίας, τουτέστι τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΒΑΓ, δύο ὀρθὰς ἢ διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὴν ΔΕΖ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου καὶ συμπίπτειν τῇ ΓΑ ἐκτός.

ἐὰν δὲ ὀξυγώνιος ᾖ ὁ κῶνος ὀξείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, αἱ ΒΑΓ, ΑΕΖ ἔσονται δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες ὥστε αἱ ΕΖ, ΑΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ὁπουδήποτε· προσαυξῆσαι γὰρ δύναμαι τὸν κῶνον. ἔσται οὖν ἐν τῇ ἐπινία δηλαδὴ ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα, θὰ εἶναι αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΑΕΖ ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς· ὥστε ἡ ΔΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Καὶ γίνεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τομὴ ἡ καλουμένη παραβολή, κληθεῖσα οὕτω, διότι ἡ ΔΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου.

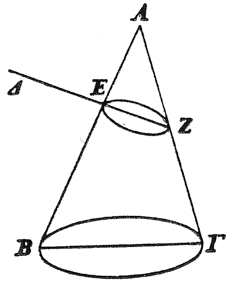
Ἐὰν δὲ ὁ κῶνος εἶναι ἀμβλυγώνιος, ὡς εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, ὅπου δηλ. ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἀμβλεῖα, ὀρθὴ δὲ ἡ γωνία ΑΕΖ, θὰ εἶναι αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΑΕΖ μεγαλύτεραι δύο ὀρθῶν· ὥστε ἡ πλευρὰ ΔΕΖ δὲν θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν πλευρὰν ΑΓ πρὸς τὰ μέρη τῶν Ζ, Γ, ἀλλὰ πρὸς τὰ μέρη τῶν Α, Ε, προεκβαλλομένης δηλαδὴ τῆς ΓΑ μέχρι τοῦ Δ. Θὰ σχηματίσῃ λοιπὸν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τομὴν



τὴν καλουμένην ὑπερβολήν, κληθεῖσαν οὕτω, διότι αἱ εἰρημέναι γωνίαι, δηλ. αἱ ΑΕΖ, ΒΑΓ εἶναι μεγαλύτεραι (ὑπερβάλλουσι) τῶν δύο ὀρθῶν, ἢ διότι ἡ ΔΕΖ ἐξέρχεται τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου καὶ συναντᾷ τὴν ΓΑ ἐκτός.

Ἐὰν δὲ ὁ κῶνος εἶναι ὀξυγώνιος, εἶναι δηλαδὴ ὀξεῖα ἡ γωνία ΒΑΓ, θὰ εἶναι αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΑΕΖ μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν (τὸ ἄθροισμά των)· ὥστε αἱ ΕΖ, ΑΓ ἐκβαλλόμεναι θὰ συναντηθῶσιν ὁπουδήποτε· διότι δύναμαι νὰ αὐξήσω τὸν κῶνον.

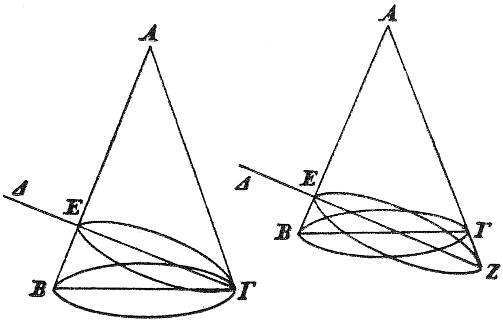
φανείᾳ τομή, ἥτις καλεῖται ἔλλειψις, οὕτω κληθεῖσα ἤτοι διὰ τὸ ἐλλείπειν δύο ὀρθαῖς τὰς προειρημένας γωνίας ἢ διὰ τὸ τὴν ἔλλειψιν κύκλον εἶναι ἐλλιπῆ.



οὕτως μὲν οὖν οἱ παλαιοὶ ὑποθέμενοι τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς ΔΕΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου τριγώνου καὶ ἔτι διαφόρους τοὺς κώνους ἐθεώρησαν καὶ ἐπὶ ἑκάστου ἰδίαν τομήν· ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ὑποθέμενος τὸν κῶνον καὶ ὀρθὸν καὶ σκαληνὸν τῇ διαφόρῳ τοῦ ἐπιπέδου κλίσει διαφόρους ἐποίησε τὰς τομάς.

ἔστω γὰρ πάλιν ὡς ἐπὶ τῶν αὐτῶν καταγραφῶν τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ ΚΕΛ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἡ ΚΖΛ, κοινὴ δὲ πάλιν αὐτοῦ τοῦ ΚΕΛ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἡ ΕΖ, ἥτις καὶ διάμετρος καλεῖται τῆς τομῆς. ἐπὶ πασῶν οὖν τῶν τομῶν ὑποτίθεται τὴν ΚΛ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, λοιπὸν
H176 *δέ, εἰ μὲν ἡ ΕΖ παράλληλος εἴη τῇ ΑΓ, παραβολὴν γίνεσθαι τὴν ΚΕΛ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομήν, εἰ δὲ συμπίπτει τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἡ ΕΖ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ὡς κατὰ τὸ Δ, γίνεσθαι τὴν ΚΕΛ τομὴν ὑπερβολήν, εἰ δὲ ἐντὸς συμπίπτει τῇ ΑΓ ἡ ΕΖ, γίνεσθαι τὴν τομὴν ἔλλειψιν, ἣν καὶ θυρεὸν καλοῦσιν. καθόλου οὖν τῆς μὲν παραβολῆς ἡ διά-*

Θὰ εἶναι λοιπὸν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τομή, ἡ ὁποία καλεῖται ἔλλειψις, οὕτω κληθεῖσα, διότι αἱ προειρημέναι γωνίαι εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν, ἢ διότι ἡ ἔλλειψις εἶναι ἐλλιπὴς κύκλος.



Τοιουτοτρόπως λοιπὸν οἱ μὲν παλαιοὶ ὑποθέτοντες τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΔΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου διερχομένου τριγώνου, ἐθεώρησαν διαφόρους τοὺς κώνους καὶ ἐπὶ ἑνὸς ἑκάστου ἰδίαν τομήν· ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ὑποθέτων τὸν κῶνον καὶ ὀρθὸν καὶ σκαληνόν, ἀναλόγως πρὸς τὴν διάφορον κλίσιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἔκαμε διαφόρους τὰς τομάς.

Διότι ἔστω πάλιν, εἰς τὰ αὐτὰ σχήματα, τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ ΚΕΛ, κοινὴ δὲ τομὴ αὐτοῦ καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἡ ΚΖΛ, κοινὴ δὲ τομὴ αὐτοῦ τοῦ ΚΕΛ ἐπιπέδου καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ ΕΖ, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ διάμετρος τῆς τομῆς. Εἰς ὅλας τὰς τομὰς ὑποθέτει τὴν ΚΛ κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, κατὰ τὰ λοιπὰ δέ, ἐὰν μὲν ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, γίνεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ἡ ΚΕΛ τομὴ παραβολή, ἐὰν δὲ ἡ ΕΖ συναντᾷ τὴν πλευρὰν ΑΓ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, ὅπως εἰς τὸ Δ, γίνεται ἡ ΚΕΛ τομὴ ὑπερβολή· ἐὰν δὲ ἡ ΕΖ συναντᾷ τὴν ΑΓ ἐντὸς γίνεται τομὴ ἡ ἔλλειψις, τὴν ὁποίαν καὶ καλοῦσι θυρεόν. Γενικῶς λοιπὸν τῆς μὲν παραβολῆς μετρος παράλληλός ἐστι τῇ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου, τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος συμπίπτει τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου ὡς ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ κώνου μέρη, τῆς δὲ ἐλλείψεως ἡ διάμετρος συμπίπτει τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου ὡς ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ βάσει μέρη. κἀκεῖνο δὲ χρὴ εἰδέναι, ὅτι ἡ μὲν παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ τῶν εἰς ἄπειρόν εἰσιν αὐξανομένων, ἡ δὲ ἔλλειψις οὐκέτι· πᾶσα γὰρ εἰς αὐτὴν συννεύει ὁμοίως τῷ κύκλῳ.

πλειόνων δὲ οὐσῶν ἐκδόσεων, ὡς καὶ αὐτός φησιν ἐν τῇ ἐπιστολῇ, ἄμεινον ἡγησάμην συναγαγεῖν αὐτὰς ἐκ τῶν ἐμπιπτόντων τὰ σαφέστερα παρατιθέμενος ἐν τῷ ῥητῷ διὰ τὴν τῶν εἰσαγομένων εὐμάρειαν, ἔξωθεν δὲ ἐν τοῖς συντεταγμένοις σχολίοις ἐπισημαίνεσθαι τοὺς διαφόρους ὡς εἰκὸς τρόπους τῶν ἀποδείξεων.

φησὶ τοίνυν ἐν τῇ ἐπιστολῇ τὰ πρῶτα τέσσαρα βιβλία περιέχειν ἀγωγὴν στοιχειώδη· ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχειν τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τοῦ κώνου τομῶν καὶ τῶν καλουμένων ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα. ταῦτα δέ ἐστιν, ὅσα συμβαίνει παρὰ τὴν πρώτην αὐτῶν γένεσιν· ἔχουσι γὰρ καὶ ἕτερά τινα παρακολουθήματα.
H178 τὸ δὲ δεύτερον τὰ παρὰ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν συμβαίνοντα καὶ τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς. ὁ δὲ διορισμὸς ὅτι διπλοῦς ἐστι, παντί που δῆλον, ὁ μὲν μετὰ τὴν ἔκθεσιν ἐφιστάνων, τί ἐστι τὸ ζητούμενον, ὁ δὲ τὴν πρότασιν οὐ συγχωρῶν καθολικὴν εἶναι, λέγων δέ, πότε καὶ πῶς καὶ ποσαχῶς δυνατὸν συστῆναι τὸ προτιθέ-

ἡ διάμετρος εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου, τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος συναντᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου πρὸς τὰ μέρη τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, τῆς δὲ ἐλλείψεως ἡ διάμετρος συναντᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου πρὸς τὰ πρὸς τὴν βάσιν μέρη. Καὶ ἐκεῖνο δὲ πρέπει νὰ γνωρίζῃ κανείς, ὅτι ἡ μὲν παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ εἶναι ἐκ τῶν αὐξανομένων εἰς τὸ ἄπειρον, ἡ δὲ ἔλλειψις ὄχι· διότι ὁλόκληρος συγκλίνει πρὸς τὸν ἑαυτόν της, ὅπως ὁ κύκλος.

Ἐνῷ δὲ ὑπάρχουσι πολλαὶ ἐκδόσεις, ὅπως καὶ ὁ Ἀπολλώνιος λέγει εἰς τὴν ἐπιστολήν, ἐνόμισα καλλίτερον νὰ συναθροίσω αὐτὰς ἐκ τῶν ἐνόντων, παραθέτων τὰ σαφέστερα καθαρά, διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν προτάσεων, εἰς δὲ τὰ συντεταγμένα σχόλια νὰ ἐπισημαίνωνται, ὡς ἑπόμενον, οἱ διάφοροι τρόποι τῶν ἀποδείξεων.

Λέγει λοιπὸν εἰς τὴν ἐπιστολὴν (εἰσαγωγὴ εἰς τὸ α′ τῶν Κωνικῶν), ὅτι τὰ πρῶτα τέσσαρα βιβλία περιέχουσι τὰ Στοιχεῖα τῶν Κωνικῶν· ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν πρῶτον περιέχει τὰς γενέσεις τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν καὶ τῶν καλουμένων ἀντικειμένων (κλάδων ὑπερβολῆς) καὶ τὰς εἰς αὐτὰς βασικὰς ἰδιότητας. Αὗται δὲ ὑπάρχουσι κατὰ τὴν πρώτην αὐτῶν γένεσιν· διότι ἔχουσι καὶ ἄλλας δευτερευούσας ἰδιότητας. Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τὰς ἰδιότητας τῶν διαμέτρων καὶ τῶν ἀξόνων τῶν τομῶν καὶ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ ἄλλα ἀναγκαῖα γενικῶς εἰς τοὺς περιορισμούς. Ὁ δὲ περιορισμός, ὅτι εἶναι διττός, εἶναι φανερὸν καθ' ὅλα, ὁ μὲν μετὰ τὴν ἐκφώνησιν λέγων, τί εἶναι τὸ ζητούμενον, ὁ δὲ περιορίζων τὴν πρότασιν καὶ μὴ γενικεύων αὐτήν, λέγων δέ, πότε καὶ πῶς καὶ κατὰ πόσους τρόπους εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ τὸ ἐκμενον, οἷός ἐστιν ὁ ἐν τῷ εἰκοστῷ δευτέρῳ θεωρήματι τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως· ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντη μεταλαμβανομένας, ἐπειδὴ δέδεικται, ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. τὸ δὲ τρίτον τῶν κωνικῶν περιέχειν φησὶ πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρὸς τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων. ἐπιπέδους τόπους ἔθος τοῖς παλαιοῖς γεωμέτραις λέγειν, ὅταν ἐπὶ τῶν προβλημάτων οὐκ ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου μόνον, ἀλλ᾽ ἀπὸ πλειόνων γίνεται τὸ πρόβλημα, οἷον εἰ ἐπιτάξει τις εὐθείας δοθείσης πεπερασμένης εὑρεῖν τι σημεῖον, ἀφ᾽ οὗ ἡ ἀχθεῖσα κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μέση ἀνάλογον γίνεται τῶν τμημάτων, τόπον καλοῦσι τὸ τοιοῦτον· οὐ μόνον γὰρ ἓν σημεῖόν ἐστι τὸ ποιοῦν τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ τόπος ὅλος, ὃν ἔχει ἡ περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν κύκλου. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἡμικύκλιον γραφῇ, ὅπερ ἂν ἐπὶ τῆς περιφερείας λάβῃς σημεῖον καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ H180 κάθετον ἀγάγῃς ἐπὶ τὴν διάμετρον, ποιήσει τὸ προβληθέν. ὁμοίως δὲ δοθείσης εὐθείας ἐάν τις ἐπιτάξῃ εὑρεῖν ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον, ἀφ᾽ οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις, καὶ ἐπὶ τούτου οὐ μόνον ἓν σημεῖόν ἐστι τὸ ποιοῦν τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ τόπος, ὃν ἐπέχει ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη· ἐὰν γὰρ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν δίχα τεμὼν καὶ ἀπὸ τῆς διχοτομίας πρὸς ὀρθὰς ἀγάγῃς, ὃ ἂν ἐπ᾽ αὐτῆς λάβῃς σημεῖον, ποιήτιθέμενον, ὅπως π. χ. εἶναι ὁ περιορισμὸς εἰς τὸ εἰκοστὸν δεύτερον θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου: νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τρεῖς δοθείσας εὐθείας· πρέπει ὅμως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εὐθειῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἄλλης, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται. Τὸ δὲ τρίτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν, λέγει, ὅτι περιέχει π ο λ λ ὰ καὶ π α ρ ά δ ο ξ α θ ε ω ρ ή μ α τ α χ ρ ή σ ι μ α δ ι ὰ τ ὰ ς σ υ ν θ έ σ ε ι ς τ ῶ ν σ τ ε ρ ε ῶ ν τ ό π ω ν. Ἦτο ἔθιμον εἰς τοὺς παλαιοὺς γεωμέτρας νὰ λέγωσιν ἐπιπέδους τόπους, ὅταν εἰς τὰ προβλήματα ἕκαστον πρόβλημα γίνεται ὄχι μόνον ἐξ ἑνὸς σημείου ἀλλ' ἐκ περισσοτέρων, π. χ. ἐὰν ἐπιτάξῃ τις ἐπὶ δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖόν τι, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἡ ἀχθεῖσα κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν γίνεται μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων, αὐτὸ τὸ καλοῦσι τόπον· διότι δὲν εἶναι μόνον ἓν σημεῖον τὸ ὁποῖον πληροῖ τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ ὅλος ὁ τόπος, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος διάμετρον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Διότι, ἐὰν γραφῇ ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας, οἱονδήποτε σημεῖον καὶ ἂν λάβῃς ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρῃς κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον, θὰ πληροῖ τὸ πρόβλημα. Ὁμοίως δέ, ἐὰν δοθείσης εὐθείας, ἐπιτάξῃ τις νὰ εὑρεθῇ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον, ἐκ τοῦ ὁποίου αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι μέχρι τῶν περάτων τῆς εὐθείας εἶναι ἴσαι μεταξύ των, καὶ εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν εἶναι ἓν μόνον σημεῖον, τὸ ὁποῖον πληροῖ τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ τόπος σημείων, τὸν ὁποῖον καθορίζει ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας ἀγομένη κάθετος· διότι ἐὰν τμήσῃς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸ μέσον καὶ ἐκ τῆς διχοτομίας φέρῃς κάθετον, οἱονδήποτε σημεῖον καὶ ἂν σει τὸ ἐπιταχθέν.

ὅμοιον γράφει καὶ αὐτὸς Ἀπολλώνιος ἐν τῷ Ἀναλυομένῳ τόπῳ ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου.

δύο δοθέντων [εὐθειῶν] ἐν ἐπιπέδῳ [καὶ] σημείων καὶ λόγου δοθέντος ⟨δύο⟩ ἀνίσων εὐθειῶν δυνατόν ἐστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γράψαι κύκλον ὥστε τὰς ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κλωμένας εὐθείας λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

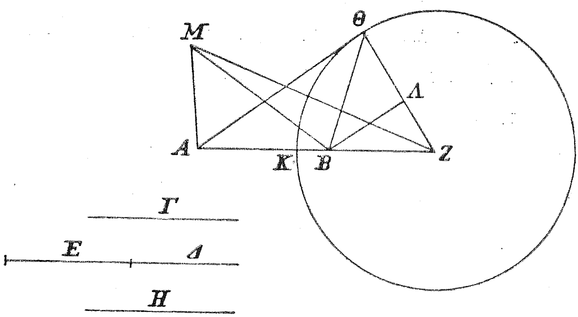
ἔστω τὰ μὲν δοθέντα σημεῖα τὰ Α, Β, λόγος δὲ ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ μείζονος οὔσης τῆς Γ· δεῖ δὴ ποιῆσαι τὸ ἐπιταχθέν. ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ πρὸς τῷ Β μέρη, καὶ γεγονέτω, ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς ἄλλην τινὰ μείζονα δηλονότι τῆς Δ, καὶ ἔστω, εἰ τύχοι, πρὸς τὴν ΕΔ, καὶ πάλιν γεγονέτω, ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ Δ πρὸς τὴν ΒΖ καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Η. φανερὸν δή, ὅτι ἥ τε Γ μέση
H182 ἀνάλογόν ἐστι τῆς ΕΔ καὶ τῆς Δ καὶ ἡ Η τῶν ΑΖ, ΖΒ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ διαστήματι δὲ τῇ Η κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΘ. φανερὸν δή, ὅτι τέμνει ἡ ΚΘ περιφέρεια τὴν ΑΒ εὐθεῖαν· ἡ γὰρ Η εὐθεῖα μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΑΖ, ΖΒ. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΑ, ΘΒ, ΘΖ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΖ τῇ Η, καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΖΘ πρὸς ΖΒ. καὶ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΘΖΒ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖΘ τῷ ΘΒΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΘΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΑΒ. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Β τῇ ΑΘ παράλληλος ἡ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΘ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΒ, καὶ ὡς ἄρα πρώτη ἡ ΑΖ πρὸς τρίτην τὴν ΖΒ, τὸ ἀπὸ

λάβῃς ἐπ' αὐτῆς θὰ πληροῖ τὸ ἐπιταχθέν.

Ὅμοιον πρόβλημα γράφει σχετικῶς καὶ αὐτὸς ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὸν Ἀναλυόμενον τόπον:

Δοθέντων εἰς τὸ ἐπίπεδον δύο σημείων, καὶ δοθέντος λόγου ⟨δύο⟩ ἀνίσων εὐθειῶν εἶναι δυνατὸν νὰ γραφῇ κύκλος εἰς τὸ ἐπίπεδον, ὥστε αἱ ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ ἔχωσι λόγον τὸν αὐτὸν πρὸς τὸν δοθέντα.

Ἔστω τὰ μὲν δοθέντα σημεῖα τὰ Α, Β, λόγος δὲ ὁ Γ:Δ, ὅπου Γ 〉 Δ· πρέπει νὰ γίνῃ τὸ ἐπιταχθέν. Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἂς ἐκβληθῇ πρὸς τὰ πρὸς τὸ Β μέρη, καὶ ἂς γίνῃ ὡς ἡ Δ:Γ = Γ:Χ ὅπου Χ 〉 Δ, καὶ ἔστω, τυχόν, Χ = ΕΔ, καὶ πάλιν ἂς γίνῃ ὡς ἡ Ε : ΑΒ = Δ : ΒΖ = Γ : Η. Εἶναι λοιπὸν



φανερόν, ὅτι καὶ ἡ Γ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ΕΔ καὶ τῆς Δ, καὶ ἡ Η εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΑΖ, ΖΒ. Καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Ζ ἀκτῖνα δὲ τὴν Η ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΚΘ. Εἶναι τώρα φανερόν, ὅτι τὸ τόξον ΚΘ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· διότι ἡ εὐθεῖα Η εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΑΖ, ΖΒ. Ἂς ληφθῇ τώρα ἐπὶ τῆς περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΘΑ, ΘΒ, ΘΖ. Εἶναι ἄρα ἡ ΘΖ = Η, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι, ὡς ἡ ΑΖ:ΖΘ = ΖΘ:ΖΒ. Καὶ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ΘΖΒ εἶναι ἀνάλογοι αἱ πλευραί· εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΑΖΘ πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΒΖ, καὶ ἡ γωνία ΖΘΒ = ΘΑΒ. Ἂς ἀχθῇ τώρα διὰ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν ΑΘ ἡ ΒΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς ἡ ΑΖ:ΖΘ = ΘΖ:ΖΒ, καὶ ὡς ἄρα ΑΖ:ΖΒ = $\mathrm{AZ}^2:\mathrm{Z}\Theta^2$ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 9). Ἀλλ' ὡς

ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΑΘ πρὸς ΒΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, ἡ ΑΘ πρὸς ΒΛ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΖ τῇ ὑπὸ ΘΑΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΒ τῇ ὑπὸ ΘΒΛ ἴση· ἐναλλὰξ γάρ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἴση ἐστίν, καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΘΒ τῷ ΒΘΛ, καὶ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΛ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, ἡ ΑΘ πρὸς ΒΛ. ἦν δὲ καί, ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΒΛ, τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, καὶ διὰ τοῦτο, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΘ, ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΘ, ἡ ΕΔ πρὸς Γ καὶ ἡ Γ πρὸς Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς Δ, ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῶν Α, Β ση-
H184 μείων ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κλώμεναι τὸν αὐτὸν ἔχουσαι λόγον ταῖς Γ, Δ.

λέγω δή, ὅτι πρὸς ἄλλῳ σημείῳ μὴ ὄντι ἐπὶ τῆς περιφερείας οὐ γίνεται λόγος τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β σημείων ἐπ' αὐτὸ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς Γ πρὸς Δ.

εἰ γὰρ δυνατόν, γεγονέτω πρὸς τῷ Μ ἐκτὸς τῆς περιφερείας· καὶ γὰρ εἰ ἐντὸς ληφθείη, τὸ αὐτὸ ἄτοπον συμβήσεται καθ' ἑτέραν τῶν ὑποθέσεων· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΑ, ΜΒ, ΜΖ, καὶ ὑποκείσθω, ὡς ἡ Γ πρὸς Δ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς Δ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΕΔ πρὸς Δ, οὕτως ὑπόκειται ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΒ. καὶ διὰ τὰ προδειχθέντα, ἐὰν ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΑΜ παράλληλον ἀγά-

$AZ:ZB = A\Theta:B\Lambda$ (Εὐκλ. 6, 4)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $AZ^2:Z\Theta^2 = A\Theta:B\Lambda$. Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι γωνία $B\Theta Z = \Theta AB$, εἶναι δὲ καὶ γωνία $A\Theta B = \Theta B\Lambda$ (Εὐκλ. 1, 29)· διότι εἶναι ἐναλλάξ· καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπόλοιπον, καὶ τὸ τρίγωνον $A\Theta B$ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ $B\Theta\Lambda$, καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, ὡς ἡ $A\Theta:\Theta B = \Theta B:B\Lambda$, καὶ ὡς τὸ $A\Theta^2:\Theta B^2 = A\Theta:B\Lambda$ (Εὐκλ. 5, ὁρισ. 9). Ἦτο δὲ καί, ὡς ἡ $A\Theta:B\Lambda = AZ^2:Z\Theta^2$· ὡς ἄρα τὸ $AZ^2:Z\Theta^2 = A\Theta^2:\Theta B^2$, καὶ διὰ τοῦτο, ὡς ἡ $AZ:Z\Theta = A\Theta:\Theta B$. Ἀλλ' ὡς ἡ $AZ:Z\Theta = E\Delta:\Gamma = \Gamma:\Delta$· καὶ ὡς ἄρα ἡ $\Gamma:\Delta = A\Theta:\Theta B$. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ὅλαι αἱ ἀπὸ τῶν σημείων A,B ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον ὡς $\Gamma:\Delta$.

Λέγω τώρα, ὅτι δι' ἄλλο σημεῖον μὴ εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας δὲν γίνεται λόγος τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῶν σημείων A, B πρὸς τὸ σημεῖον αὐτό, ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν $\Gamma:\Delta$.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς γίνῃ ὁ αὐτὸς λόγος πρὸς τὸ ἐκτὸς τῆς περιφερείας σημεῖον M· διότι καὶ ἂν ἐντὸς ληφθῇ τὸ σημεῖον θὰ συμβῇ τὸ αὐτὸ ἄτοπον κατὰ τὴν ἄλλην τῶν ὑποθέσεων· καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ MA, MB, MZ, καὶ ἂς ληφθῇ ὡς ἡ $\Gamma:\Delta = AM:BM$. Εἶναι ἄρα, ὡς ἡ $E\Delta:\Delta = E\Delta^2:\Gamma^2 = AM^2:MB^2$. Ἀλλ' ὡς ἡ $E\Delta:\Delta$ ἐλήφθη $= AZ:ZB$· καὶ ὡς ἄρα ἡ $AZ:ZB = AM^2:MB^2$. Καὶ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, ἐὰν ἐκ τοῦ B φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν AM, ἀποδεικνύεται, ὡς ἡ $AZ:ZB = AZ^2:$

γωμεν, δειχθήσεται, ὡς ἡ AZ πρὸς ZB, τὸ ἀπὸ AZ πρὸς τὸ ἀπὸ ZM. ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ AZ πρὸς ZB, τὸ ἀπὸ AZ πρὸς τὸ ἀπὸ $Z\Theta$. ἴση ἄρα ἡ $Z\Theta$ τῇ ZM· ὅπερ ἀδύνατον.

τόποι οὖν ἐπίπεδοι λέγονται τὰ τοιαῦτα· οἱ δὲ λεγόμενοι στερεοὶ τόποι τὴν προσωνυμίαν ἐσχήκασιν ἀπὸ τοῦ τὰς γραμμάς, δι' ὧν γράφονται τὰ κατ' αὐτοὺς προβλήματα, ἐκ τῆς τομῆς τῶν στερεῶν τὴν γένεσιν ἔχειν, οἷαί εἰσιν αἱ τοῦ κώνου τομαὶ καὶ ἕτεραι πλείους. εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλοι τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν λεγόμενοι, οἳ τὴν ἐπωνυμίαν ἔχουσιν ἀπὸ τῆς περὶ αὐτοὺς ἰδιότητος.

H186 μέμφεται δὲ ἑξῆς τῷ Εὐκλείδῃ οὐχ, ὡς οἴεται Πάππος καὶ ἕτεροί τινες, διὰ τὸ μὴ εὑρηκέναι δύο μέσας ἀνάλογον· ὅ τε γὰρ Εὐκλείδης ὑγιῶς εὗρε τὴν μίαν μέσην ἀνάλογον, ἀλλ' οὐχ ὡς αὐτός φησιν οὐκ εὐτυχῶς, καὶ περὶ τῶν δύο μέσων οὐδὲ ὅλως ἐπεχείρησε ζητῆσαι ἐν τῇ στοιχειώσει, αὐτός ὅ τε Ἀπολλώνιος οὐδὲν περὶ τῶν δύο μέσων ἀνάλογον φαίνεται ζητῆσαι ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ· ἀλλ', ὡς ἔοικεν, ἑτέρῳ βιβλίῳ περὶ τόπων γεγραμμένῳ τῷ Εὐκλείδῃ ἐπισκήπτει, ὅπερ εἰς ἡμᾶς οὐ φέρεται.

τὰ δὲ ἐφεξῆς περὶ τοῦ τετάρτου βιβλίου λεγόμενα σαφῆ ἐστιν. τὸ δὲ πέμπτον φησὶ περιέχειν τὰ περὶ τῶν ἐλαχίστων καὶ μεγίστων. ὥσπερ γὰρ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἐμάθομεν ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι ἔστι τι σημεῖον ἐκτός, ἀφ' οὗ τῶν μέν, πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν μεγίστη ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, οὕτως καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν ζητεῖ ἐν τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ. τοῦ δὲ

ZM^2. Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ $AZ:ZB = AZ^2:Z\Theta^2$. Εἶναι ἄρα ἡ $Z\Theta = ZM$· ὅπερ ἀδύνατον.

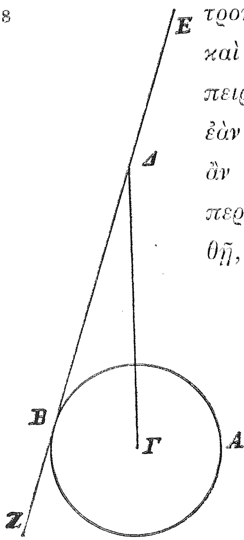
Τὰ τοιαῦτα λοιπὸν λέγονται ἐπίπεδοι γεωμετρικοὶ τόποι· οἱ δὲ λεγόμενοι στερεοὶ τόποι ἔλαβον τὴν ὀνομασίαν ἐκ τοῦ ὅτι αἱ γραμμαὶ διὰ τῶν ὁποίων λύονται τὰ σχετικὰ μὲ αὐτοὺς προβλήματα ἔχουσι τὴν γένεσιν ἐκ τῆς τομῆς τῶν στερεῶν, όπως εἶναι αἱ κωνικαὶ καὶ ἄλλαι τομαί. Ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλοι τόποι λεγόμενοι τῆς ἐπιφανείας, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι τὴν ὀνομασίαν ἐκ τῆς συναφοῦς ἰδιότητος.

Κατηγορεῖ δὲ ἀκολούθως τὸν Εὐκλείδην, ὄχι ὡς νομίζει ὁ Πάππος καὶ μερικοὶ ἄλλοι, διότι δὲν εὗρε δύο μέσας ἀναλόγους· διότι καὶ ὁ Εὐκλείδης ὀρθῶς εὗρε τὴν μίαν μέσην ἀνάλογον, ἀλλ' ὄχι ὅπως αὐτὸς (Ἀπολλώνιος) νομίζει ὄχι ἐπιτυχῶς, καὶ οὐδόλως ἐπεχείρησε νὰ εὕρῃ εἰς τὰ Στοιχεῖα δύο μέσας ἀναλόγους, καὶ αὐτὸς ὁ Ἀπολλώνιος ἀκόμη δὲν φαίνεται νὰ ἐζήτησε καθόλου δύο μέσας ἀναλόγους εἰς τὸ τρίτον βιβλίον· ἀλλ' ὅπως φαίνεται, κατηγορεῖ τὸν Εὐκλείδην δι' ἄλλο βιβλίον του περὶ γεωμετρικῶν τόπων, τὸ ὁποῖον δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν ἐποχήν μου.

Τὰ λεγόμενα δὲ ἐν συνεχείᾳ περὶ τοῦ τετάρτου βιβλίου εἶναι σαφῆ. Τὸ δὲ πέμπτον βιβλίον λέγει, ὅτι περιέχει τὰ περὶ τῶν ἐλαχίστων καὶ μεγίστων. Διότι, ὅπως ἐμάθομεν εἰς τὰ Στοιχεῖα περὶ τοῦ κύκλου (Εὐκλ. 3, 8), ὅτι ὑπάρχει σημεῖόν τι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἐκ τοῦ ὁποίου, ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι προσπίπτουσι πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, ἐξ ἐκείνων δέ, αἱ ὁποῖαι προσπίπτουσι πρὸς τὴν κυρτὴν ἐλαχίστη εἶναι ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, οὕτω πως καὶ εἰς τὰς κωνικὰς τομὰς ἐρευνᾷ εἰς τὸ ἕκτου καὶ ἑβδόμου καὶ ὀγδόου σαφῶς ἡ πρόθεσις ὑπ᾽ αὐτοῦ εἴρηται. καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς ἐπιστολῆς.

᾽Αρχόμενος δὲ τῶν ὅρων γένεσιν ὑπογράφει κωνικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ᾽ οὐ τὸν τί ἔστι διορισμὸν παραδέδωκεν· ἔξεστι δὲ τοῖς βουλομένοις ἐκ τῆς γενέσεως αὐτῆς τὸν ὅρον λαμβάνειν. τὸ δὲ λεγόμενον ὑπ᾽ αὐτοῦ διὰ καταγραφῆς σαφὲς ποιήσομεν·

ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν καὶ τὰ ἑξῆς. ἔστω κύκλος ὁ AB, οὗ H188 κέντρον τὸ Γ, καὶ σημεῖόν τι μετέωρον τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔB ἐκβεβλήσθω εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα μέρη ὡς ἐπὶ τὰ E, Z. ἐὰν δὴ μένοντος τοῦ Δ ἡ ΔB φέρηται, ἕως ἂν τὸ B ἐνεχθὲν κατὰ τῆς τοῦ AB κύκλου περιφερείας ἐπὶ τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, γεννήσει ἐπιφάνειάν τινα, ἥτις σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν ἁπτομένων ἀλλήλων κατὰ τὸ Δ, ἣν καὶ καλεῖ κωνικὴν ἐπιφάνειαν. φησὶ δέ, ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὔξεται διὰ τὸ καὶ τὴν γράφουσαν αὐτὴν εὐθεῖαν οἷον τὴν ΔB εἰς ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι. κορυφὴν δὲ τῆς ἐπιφανείας λέγει τὸ Δ, ἄξονα δὲ τὴν $\Delta\Gamma$.



κῶνον δὲ λέγει τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ AB κύκλου καὶ τῆς ἐπιφανείας, ἣν μόνη γράφει ἡ ΔB εὐθεῖα, κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ Δ, ἄξονα δὲ τὴν $\Delta\Gamma$, βάσιν δὲ τὸν AB κύκλον.

πέμπτον βιβλίον. Τοῦ δὲ ἕκτου καὶ ἑβδόμου καὶ ὀγδόου βιβλίου ὁ σκοπὸς σαφῶς λέγεται ὑπ' αὐτοῦ. Καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς ἐπιστολῆς (πρὸς τὸν Εὔδημον, εἰσαγ. εἰς τὸ α' βιβλίον τῶν Κωνικῶν).

Ἀρχίζων δὲ τοὺς ὁρισμοὺς ἀναγράφει τὴν γένεσιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἀλλὰ δὲν ἀναφέρει τὸν σχετικὸν περιορισμόν· ἀφήνεται δὲ εἰς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ λάβωσι τὸν ὁρισμὸν ἐκ τῆς γενέσεως αὐτῆς (τῆς ἐπιφανείας). Τὸ δὲ λεγόμενον ὑπ' αὐτοῦ θὰ κάμωμεν σαφὲς διὰ τῶν σχημάτων.

«Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς περιφέρειαν κύκλου καὶ τὰ ἑξῆς».

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒ, τοῦ ὁποίου κέντρον εἶναι τὸ Γ, καὶ σημεῖόν τι μετέωρον τὸ Δ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΔΒ ἂς ἐκβληθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἐπ' ἄπειρον, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ. Ἐὰν λοιπὸν μένοντος τοῦ Δ ἀκινήτου ἡ ΔΒ κινῆται, ὥστε τὸ Β κινηθὲν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΒ εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ἀπὸ ὅπου ἤρχισε νὰ κινῆται, θὰ γεννήσῃ ἐπιφάνειάν τινα, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν ἐφαπτομένων μεταξύ των κατὰ τὸ Δ, τὴν ὁποίαν καὶ καλεῖ κωνικὴν ἐπιφάνειαν. Λέγει δέ, ὅτι αὕτη αὐξάνεται ἐπ' ἄπειρον, διότι καὶ ἡ γράφουσα αὐτὴν εὐθεῖα ἡ ΔΒ δύναται νὰ προεκτείνηται ἐπ' ἄπειρον. Κορυφὴν δὲ τῆς ἐπιφανείας λέγει τὸ σημεῖον Δ, ἄξονα δὲ τὴν ΔΓ.

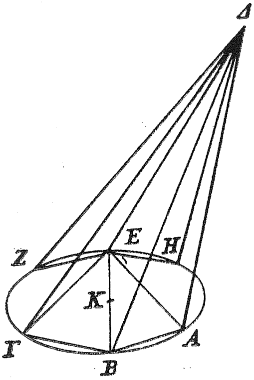
Κῶνον δὲ λέγει τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ κύκλου ΑΒ καὶ τῆς ἐπιφανείας τὴν ὁποίαν γράφει μόνη ἡ εὐθεῖα ΔΒ, κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ Δ, ἄξονα δὲ τὴν ΔΓ, βάσιν δὲ τὸν κύκλον ΑΒ.

καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ΑΒ κύκλῳ, ὀρθὸν καλεῖ τὸν κῶνον, ἐὰν δὲ μὴ πρὸς ὀρθάς, σκαληνόν· γενήσεται δὲ κῶνος σκαληνός, ὅταν λαβόντες κύκλον ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀναστήσωμεν εὐθεῖαν μὴ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ μετεώρου σημείου τῆς ἀναταθείσης εὐθείας ἐπὶ τὸν κύκλον ἐπιζεύξωμεν εὐθεῖαν καὶ περιαγάγωμεν τὴν ἐπιζευχθεῖσαν εὐθεῖαν περὶ τὸν κύκλον τοῦ πρὸς τῷ μετεώρῳ σημείῳ τῆς ἀναταθείσης μένοντος· τὸ γὰρ προσληφθὲν σχῆμα κῶνος ἔσται σκαληνός.

H190 *δῆλον δέ, ὅτι ἡ περιαγομένη εὐθεῖα ἐν τῇ περιαγωγῇ μείζων καὶ ἐλάττων γίνεται, κατὰ δέ τινας θέσεις καὶ ἴση πρὸς ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τοῦ κύκλου. ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο οὕτως· ἐὰν κώνου σκαληνοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθεισῶν εὐθειῶν μία μέν ἐστιν ἐλαχίστη μία δὲ μεγίστη, δύο δὲ μόναι ἴσαι παρ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης καὶ τῆς μεγίστης, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων. ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ σκαληνοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἤτοι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ΑΒΓΖΗ κύκλου πεσεῖται ἢ ἐκτὸς ἢ ἐντός, ἐμπιπτέτω πρότερον ἐπὶ τῆς περιφερείας ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Κ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ᾽ ἑκάτερα τοῦ Ε αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ παρ᾽ ἑκά-*

Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΔΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒ, καλεῖ τὸν κῶνον ὀρθόν, ἐὰν δὲ δὲν εἶναι κάθετος καλεῖ αὐτὸν σκαληνόν· θὰ γίνῃ δὲ ὁ σκαληνὸς κῶνος, ὅταν, ἀφοῦ λάβωμεν κύκλον ἀνυψώσωμεν ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ εὐθεῖαν μὴ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ μετεώρου σημείου τῆς ἀνυψωθείσης εὐθείας φέρωμεν εὐθεῖαν πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου καὶ περιφέρωμεν τὴν ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν περὶ τὸν κύκλον, ἐνῷ τὸ μετέωρον σημεῖον, ὅπου καταλήγει ἡ ἀνυψωθεῖσα εὐθεῖα μένει ἀκίνητον· τότε τὸ γεννηθὲν σχῆμα θὰ εἶναι σκαληνὸς κῶνος.

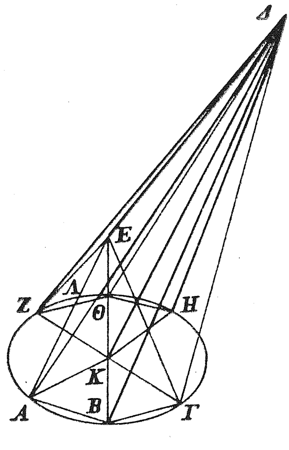
Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ἡ περιφερομένη εὐθεῖα κατὰ τὴν περιφερικὴν κίνησιν γίνεται μεγαλυτέρα καὶ μικροτέρα, εἰς μερικὰς δὲ θέσεις ἴση πρὸς ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τοῦ κύκλου. Αὐτὸ δὲ ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς· ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς σκαληνοῦ κώνου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν βάσιν, ἐξ ὅλων τῶν οὕτω πως ἀχθεισῶν εὐθειῶν μία μὲν εἶναι ἐλαχίστη μία δὲ μεγίστη, δύο δὲ μόναι γίνονται πρὸς τὰ δύο μέρη τῆς μεγίστης καὶ δύο πρὸς τὰ δύο μέρη τῆς ἐλαχίστης, πάντοτε δὲ ἡ πλησιεστέρα πρὸς τὴν ἐλαχίστην εἶναι μικροτέρα τῆς μακρύτερον εὑρισκομένης. Ἔστω σκαληνὸς κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ σκαληνοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἀγομένη κάθετος θὰ πέσῃ ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΒΓΖΗ ἢ ἐκτὸς ἢ ἐντός, ἂς πέσῃ πρῶτον ἐπὶ τῆς περιφερείας, ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα ἡ ΔΕ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς τὸ Κ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΚ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ πρὸς τὸ Β, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ, καὶ ἂς ληφθῶσι δύο ἴσα τόξα καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τοῦ Ε, αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τοῦ Β, αἱ ΑΒ, τερα τοῦ Β αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΕΑ, ΕΓ, ΑΒ, ΒΓ, ΔΑ, ΔΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΖ εὐθεῖα τῇ ΕΗ εὐθείᾳ· ἴσας γὰρ περιφερείας ὑποτείνουσιν·



κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστιν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ ἐ-
H192 στὶν ἴση, καὶ διάμετρος ἡ ΒΕ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΖΓ τῇ ΕΗΑ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ. κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΔΕ ἢ τῆς ΔΒ ἴσαι. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΕΖ ὀρθή ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ, μείζων ἐστὶν ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ. καὶ πάλιν ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΕΑ εὐθεῖα τῆς ΕΖ, ἐπεὶ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΖΑ τῆς ΕΖ περιφερείας, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΔΑ ἐλάσσων ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΔΑ τῆς ΔΒ ἐλάσσων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΕ τῆς ΔΖ ἐλάσσων ἐδείχθη , ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ, ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΕ, μεγίστη δὲ ἡ ΔΒ, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΕ τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστὶν.

ἀλλὰ δὴ ἡ κάθετος πιπτέτω ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓΗΖ κύκλου ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω πάλιν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΘ, καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ' ἑκάτερα τοῦ Θ αἱ ΘΖ, ΘΗ καὶ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπε-

ΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΖ , ΕΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΕΑ, ΕΓ, ΑΒ, ΒΓ, ΔΑ, ΔΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ἡ εὐθεῖα ΕΖ = ΕΗ, διότι εἶναι χορδαὶ ἴσων τόξων (Εὐκλ. 3, 29), εἶναι δὲ κοινὴ καὶ κάθετος ἡ ΔΕ, εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΔΖ = ΔΗ (Εὐκλ. 1, 4). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒ = ΒΓ, καὶ ἡ ΒΕ εἶναι διάμετρος, τὸ ἄλλο ἄρα τόξον ΕΖΓ = ΕΗΑ· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ = ΕΓ (Εὐκλ. 3, 29). Εἶναι δὲ κοινὴ καὶ κάθετος ἡ ΕΔ· ἡ βάσις ἄρα ΔΑ = ΔΓ. Καθ' ὅμοιον τώρα τρόπον ἀποδεικνύονται ἴσαι ὅλαι αἱ ἀπέχουσαι ἴσον τῆς ΔΕ ἢ τῆς ΔΒ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΕΖ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ εἶναι ὀρθή, ἡ πλευρὰ ΔΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕ. Καὶ πάλιν, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΕΑ > ΕΖ, ἐπειδὴ καὶ τὸ τόξον ΕΖΑ > τόξου ΕΖ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος εἶναι ἡ ΔΕ, εἶναι ἄρα ἡ ΔΖ < ΔΑ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ΔΑ < ΔΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη ἡ ΔΕ < ΔΖ καὶ ΔΖ < ΔΑ καὶ ΔΑ < ΔΒ, ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ ΔΕ, μεγίστη δὲ ἡ ΔΒ, πάντοτε δὲ ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον.



Ἀλλὰ τώρα ἂς πίπτῃ ἡ κάθετος ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓΗΖ, ὡς εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα ἡ ΔΕ, καὶ ἂς ληφθῇ πάλιν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΚ καὶ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Β καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΒ, ΔΘ, καὶ ἂς ληφθῶσι δύο ἴσα τόξα καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ Θ, τὰ ΘΖ, ΘΗ, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ Β, τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ,

ζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΗΚ, ΔΖ, ΔΗ, ΑΒ, ΒΓ, ΚΑ,
ΚΓ, ΔΚ, ΔΑ, ΔΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΘΖ περιφέρεια τῇ
ΘΗ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΚΖ τῇ ὑπὸ ΘΚΗ ἐστιν ἴση.
ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΚ εὐθεῖα τῇ ΚΗ ἐστιν ἴση· ἐκ κέντρου γάρ·
H194 κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΚΕ τῇ ὑπὸ ΗΚΕ ἴση,
καὶ βάσις ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΕ εὐθεῖα τῇ ΗΕ
ἐστιν ἴση, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ, βάσις ἄρα ἡ ΔΖ
τῇ ΔΗ ἐστιν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια
τῇ ΒΓ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἐστιν ἴση·
ὥστε καὶ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΑΚΕ λοιπῇ εἰς τὰς
δύο ὀρθὰς τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ εὐθεῖα
τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· ἐκ κέντρου γάρ· κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, δύο δυσὶν
ἴσαι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΚΕ τῇ ὑπὸ ΓΚΕ· καὶ βάσις ἄρα
ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΑΕ εὐθεῖα τῇ ΓΕ,
κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ καὶ πρὸς ὀρθάς, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ ἴση.
ὁμοίως δὲ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς
ΔΒ ἢ τῆς ΔΘ ἴσαι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΘ τῆς ΕΖ ἐστιν ἐλάσσων,
κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ, βάσις ἄρα ἡ ΔΘ βάσεως τῆς
ΔΖ ἐστιν ἐλάσσων. πάλιν ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐφαπτομένη
τοῦ κύκλου πασῶν τῶν πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσ-
πιπτουσῶν μείζων ἐστίν, ἐδείχθη δὲ ἐν τῷ γʹ τῆς στοιχειώ-
σεως τὸ ὑπὸ ΑΕ, ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ὅταν ἡ ΕΖ ἐφά-
πτηται, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΕΖ πρὸς ΕΛ. μεί-
ζων δέ ἐστιν ἡ ΕΖ τῆς ΕΛ· ἀεὶ γὰρ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης
τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς
ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΖ τῆς ΕΑ ἐστιν ἐλάσσων, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς
ὀρθὰς ἡ ΕΔ, βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΔΑ ἐστὶν ἐλάσσων. πάλιν
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, δύο ἄρα αἱ ΑΚ,
ΚΕ ταῖς ΕΚ, ΚΒ, τουτέστιν ὅλῃ τῇ ΕΚΒ, εἰσιν ἴσαι. ἀλλ'

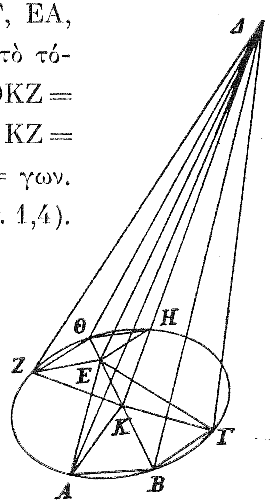
ΗΚ, ΔΖ, ΔΗ, ΑΒ, ΒΓ, ΚΑ, ΚΓ, ΔΚ, ΔΑ, ΔΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τόξον ΘΖ = τόξον ΘΗ καὶ ἡ γωνία ἄρα ΘΚΖ = ΘΚΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΖΚ = ΚΗ, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ ἡ γωνία ΖΚΕ = ΗΚΕ, καὶ ἡ βάσις ΖΕ = ΗΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΖΕ = ΗΕ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΕΔ, ἡ βάσις ἄρα ΔΖ = ΔΗ (Εὐκλ. 1, 4). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΑ = τόξον ΒΓ, εἶναι ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΚΒ = ΓΚΒ (Εὐκλ. 3, 27)· ὥστε καὶ ἡ ὑπόλοιπος εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ γων. ΑΚΕ = πρὸς τὴν ὑπόλοιπον εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τὴν ΓΚΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΚ = ΓΚ, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ πρὸς δύο πλευρὰς ἴσαι, καὶ ἡ γων. ΑΚΕ = γων. ΓΚΕ· καὶ ἡ βάσις ἄρα ΑΕ = ΓΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΑΕ = ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ καὶ κάθετος, ἡ βάσις ἄρα ΔΑ = ΔΓ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΔΒ ἢ τῆς ΔΘ εἶναι ἴσαι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΘ $<$ ΕΖ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΕΔ, ἡ βάσις ἄρα ΔΘ $<$ βάσεως ΔΖ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων, ὅσαι προσπίπτουσι πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν, ἐδείχθη δὲ εἰς τὸ 3ον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (3, 36) τὸ ὀρθογώνιον ΑΕxΕΛ = ΕΖ², ὅταν ἡ ΕΖ ἐφάπτηται, εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΑΕ:ΕΖ = ΕΖ:ΕΛ (Εὐκλ. 6, 17). Εἶναι δὲ ΕΖ $>$ ΕΛ· διότι πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην εἶναι μικροτέρα τῆς μακρύτερον εὑρισκομένης· εἶναι ἄρα καὶ ΑΕ $>$ ΕΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΕΖ $<$ ΕΑ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΕΔ, ἡ βάσις ἄρα ΔΖ $<$ ΔΑ (Εὐκλ. 5, 14). Πάλιν, ἐπειδὴ ΑΚ = ΚΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, δύο ἄρα αἱ ΑΚ + ΚΕ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΕΚ + ΚΒ, τουτέστιν πρὸς ὅλην τὴν ΕΚΒ. Ἀλλὰ

H196 αἱ ΑΚ, ΚΕ τῆς ΑΕ μείζονές εἰσιν· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῆς ΑΕ μείζων ἐστίν. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ ἐστιν ἐλάσσων, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῆς ΒΔ ἐστὶν ἐλάσσων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΘ τῆς ΔΖ ἐστιν ἐλάσσων, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ, ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΘ, μεγίστη δὲ ἡ ΔΒ, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον καὶ τὰ ἑξῆς.

ἀλλὰ δὴ ἡ κάθετος πιπτέτω ἐντὸς τοῦ ΑΒΓΗΖ κύκλου ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Β, Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΘ, ΔΒ, καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ᾽ ἑκάτερα τοῦ Θ αἱ ΘΖ, ΘΗ καὶ παρ᾽ ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΗΚ, ΔΖ, ΔΗ, ΚΑ, ΚΓ, ΕΑ, ΕΓ, ΔΑ, ΔΓ, ΑΒ, ΒΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΘΖ περιφέρεια τῇ ΘΗ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΚΗ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΖ τῇ ΗΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΚΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΚΕ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστιν ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΔ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστιν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΑΚΕ λοιπῇ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ τῇ ΚΓ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ ἡ
H198 ΕΚ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΚΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ τῇ ὑπὸ

ΑΚ + ΚΕ > ΑΕ (Εὐκλ. 1, 20)· εἶναι ἄρα καὶ ΒΕ > ΑΕ. Πάλιν, ἐπειδὴ ΑΕ < ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΕΔ, ἡ βάσις ἄρα ΔΑ < ΒΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΘ < ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ < ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ < ΔΒ, ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ ΔΘ, μεγίστη δὲ ἡ ΔΒ, πάντοτε δὲ ἡ πλησιέστερον εὑρισκομένη καὶ τὰ ἑξῆς.

Ἀλλὰ τώρα ἡ κάθετος ἂς πίπτῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓΗΖ, ὡς εἰς τὸ τρίτον σχῆμα ἡ ΔΕ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΚ καὶ ἂς ἐκβληθῇ καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη, πρὸς τὰ Β, Θ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΘ, ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῶσιν δύο ἴσα τόξα καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τοῦ Θ, τὰ ΘΖ, ΘΗ, καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τοῦ Β, τὰ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΗΚ, ΔΖ, ΔΗ, ΚΑ, ΚΓ, ΕΑ, ΕΓ, ΔΑ, ΔΓ, ΑΒ, ΒΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τόξον ΘΖ = τόξ. ΘΗ, εἶναι ἄρα καὶ γων. ΘΚΖ = γων. ΘΚΗ (Εὐκλ. 3, 27). Καὶ ἐπειδὴ ΚΖ = ΗΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γων. ΖΚΕ = γων. ΗΚΕ, εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΖΕ = ΗΕ (Εὐκλ. 1,4). Ἐπειδὴ λοιπὸν ΖΕ = ΗΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, καὶ γων. ΖΕΔ = γων. ΗΕΔ, ἡ βάσις ἄρα ΔΖ = ΔΗ (Εὐκλ. 1, 4). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒ = τόξ. ΒΓ, καὶ ἡ γωνία ἄρα ΑΚΒ = ΓΚΒ (Εὐκλ. 3, 27)· ὥστε καὶ ἡ ὑπόλοιπος εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ΑΚΕ, πρὸς τὴν ὑπόλοιπον τῶν δύο ὀρθῶν τὴν ΓΚΕ εἶναι ἴση. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΑΚ = ΚΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΚ, καὶ γων. ΑΚΕ = γων. ΓΚΕ, ἡ βάσις ἄρα ΑΕ = ΓΕ (Εὐκλ. 1, 4). Ἐπειδὴ λοιπὸν ΑΕ = ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ καὶ γων. ΑΕΔ = γων. ΓΕΔ, ἡ βάσις ἄρα ΔΑ = ΔΓ (Εὐκλ.

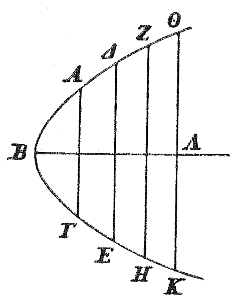


ΓΕΔ ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἢ τῆς ΔΒ ἢ τῆς ΔΘ ἴσαι. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς διαμέτρου εἴληπται σημεῖον τὸ Ε μὴ ὂν κέντρον τοῦ κύκλου, μεγίστη μὲν ἡ ΕΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΕΘ, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΕΘ τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων· ὥστε ἡ ΕΘ τῆς ΕΖ ἐστιν ἐλάσσων. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΕ τῆς ΖΕ ἐλάσσων ἐστί, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς ἡ ΕΔ, βάσις ἄρα ἡ ΔΘ βάσεως τῆς ΔΖ ἐλάσσων ἐστίν. πάλιν ἐπεὶ ἡ μὲν ΕΖ ἔγγιόν ἐστι τῆς ΕΘ, ἡ δὲ ΑΕ πορρωτέρω, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΕΖ τῆς ΑΕ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἡ ΕΖ τῆς ΕΑ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθάς ἐστιν αὐταῖς ἡ ΕΔ, βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΔΑ ἐστὶν ἐλάσσων. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, δύο αἱ ΑΚ, ΚΕ δύο ταῖς ΒΚ, ΚΕ, τουτέστιν ὅλῃ τῇ ΒΚΕ, εἰσιν ἴσαι. ἀλλ᾽ αἱ ΑΚ, ΚΕ τῆς ΑΕ μείζονές εἰσιν· καὶ ἡ ΕΒ ἄρα τῆς ΕΑ μείζων ἐστίν. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΕΑ τῆς ΕΒ ἐλάσσων ἐστί, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς ἡ ΕΔ, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσεως τῆς ΔΒ ἐστιν ἐλάσσων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΘ τῆς ΔΖ ἐλάσσων, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ, ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΘ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον καλῶ καὶ τὰ ἑξῆς.
H200 τὸ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἶπε διὰ τὴν ἕλικα τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς σφαίρας· αὗται γὰρ οὐκ εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ὃ δὲ λέγει, τοιοῦτόν ἐστιν· ἔστω καμπύλη γραμμὴ ἡ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῇ εὐθεῖαί τινες παράλληλοι αἱ ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ, καὶ διήχθω ἀπὸ τοῦ Β εὐθεῖα ἡ ΒΛ δίχα αὐτὰς τέμνουσα. φησὶν οὖν, ὅτι τῆς ΑΒΓ γραμμῆς διάμετρον μὲν καλῶ τὴν ΒΛ, κορυφὴν

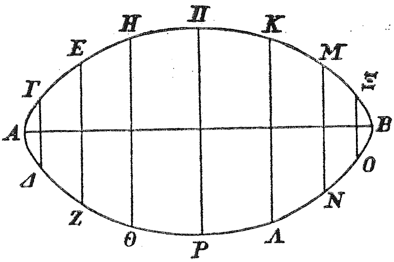
1, 4). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἢ τῆς ΔΒ ἢ τῆς ΔΘ εἶναι ἴσαι. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἐλήφθη σημεῖον τὸ Ε, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΕΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΕΘ, πάντοτε δὲ ἡ πλησιέστερον τῆς ΕΘ εἶναι μικροτέρα τῆς μακρύτερον εὑρισκομένης (Εὐκλ. 3, 7)· ὥστε ἡ ΕΘ ⟨ ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ ΘΕ ⟨ ΖΕ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἐπ' αὐτὰς ἡ ΕΔ, ἡ βάσις ἄρα ΔΘ ⟨ ΔΖ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΕΖ εἶναι πλησιέστερον τῆς ΕΘ, ἡ δὲ ΑΕ μακρύτερον, εἶναι ΕΖ ⟨ ΑΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΕΖ ⟨ ΕΑ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἐπ' αὐτὰς ἡ ΕΔ, ἡ βάσις ἄρα ΔΖ ⟨ ΔΑ (Εὐκλ. 1, 47). Πάλιν, ἐπειδὴ ΑΚ = ΚΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, δύο πλευραὶ αἱ ΑΚ + ΚΕ = ΒΚ + ΚΕ = ΒΚΕ. Ἀλλὰ ΑΚ + ΚΕ ⟩ ΑΕ (Εὐκλ. 1 20)· καὶ ἡ ΕΒ ἄρα ⟩ ΕΑ. Πάλιν, ἐπειδὴ ΕΑ ⟨ ΕΒ κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἐπ' αὐτὰς ἡ ΕΔ, ἡ βάσις ἄρα ΔΑ ⟨ ΔΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΔΘ ⟨ ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ ⟨ ΔΑ, ΔΑ ⟨ ΔΒ, ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ ΔΘ καὶ τὰ ἑξῆς.

«Πάσης καμπύλης γραμμῆς εὑρισκομένης ἐπὶ ἐπιπέδου, διάμετρον καλῶ καὶ τὰ ἑξῆς».



Τὸ ἐπὶ ἐπιπέδου τὸ εἶπε διὰ τὴν ἕλικα τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς σφαίρας· διότι αὗται δὲν εὑρίσκονται ἐπὶ ἐπιπέδου· ἐκεῖνο δέ, τὸ ὁποῖον ἐννοεῖ εἶναι τὸ ἑξῆς· ἔστω καμπύλη γραμμὴ ἡ ΑΒΓ καὶ εἰς αὐτὴν μερικαὶ παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Β εὐθεῖα ἡ ΒΛ τέμνουσα αὐτὰς εἰς τὸ μέσον. Λέγει λοιπόν, ὅτι τῆς καμπύλης ΑΒΓ διάμετρον μὲν καλῶ τὴν δὲ τὸ Β, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν ΒΛ κατῆχθαι ἑκάστην τῶν ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ. εἰ δὲ ἡ ΒΛ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλλήλους, ἄξων καλεῖται.

Ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν καὶ τὰ ἑξῆς. ἐὰν γὰρ νοήσωμεν τὰς Α, Β γραμμὰς καὶ ἐν αὐταῖς τὰς ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ παραλλήλους καὶ τὴν ΑΒ διηγμένην ἐφ᾽ ἑκάτερα καὶ τέμνουσαν τὰς παραλλήλους δίχα, τὴν μὲν ΑΒ καλῶ, φησίν, πλαγίαν διάμετρον, κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν τὰ Α, Β σημεῖα, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν ΑΒ τὰς ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ. εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, ἄξων καλεῖται. ἐὰν δὲ διαχθεῖσά τις εὐθεῖα ὡς ἡ ΠΡ τὰς ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ



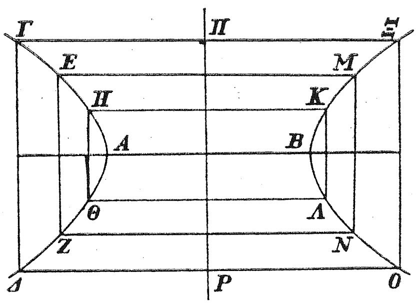
παραλλήλους τῇ ΑΒ δίχα τέμνει, ὀρθία μὲν διάμετρος καλεῖται ἡ ΠΡ, τεταγμένως δὲ κατῆχθαι ἐπὶ τὴν ΠΡ διάμετρον ἑκάστη τῶν ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ. εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς
H202 αὐτὴν τέμνει, ἄξων ὀρθός, ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ, ΠΡ δίχα τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους, λέγονται συζυγεῖς διάμετροι, ἐὰν δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς, συζυγεῖς ἄξονες ὀνομάζονται.

Εἰς τὸ α΄

Περὶ τῶν διαφόρων καταγραφῶν ἤτοι πτώσεων τῶν θεωρημάτων τοσοῦτον ἰστέον, ὅτι πτῶσις μέν ἐστιν, ὅταν

ΒΛ, κορυφὴν δὲ τὸ Β, ὅτι δὲ ἔχει καταχθῆ τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΒΛ ἑκάστη τῶν ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ. Ἐὰν δὲ ἡ ΒΛ τέμνει τὰς παραλλήλους εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτάς, καλεῖται ἄξων.

«Ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν καὶ τὰ ἑξῆς». Διότι ἂν νοήσωμεν τὰς γραμμὰς Α, Β καὶ εἰς αὐτὰς τὰς παραλλήλους ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ καὶ τὴν ΑΒ ἀχθεῖσαν καὶ πρὸς τὰ δύο σημεῖα (τὰ Α, Β) καὶ τέμνουσαν τὰς παραλλήλους εἰς τὸ μέσον, τὴν μὲν ΑΒ καλῶ, λέγει, πλαγίαν διάμετρον, κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν τὰ σημεῖα Α, Β, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν ΑΒ τὰς ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ. Ἐὰν δὲ τέμνῃ αὐτὰς εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτάς, καλεῖται ἄξων. Ἐὰν δὲ διαχθεῖσα εὐθεῖά τις, ὡς ἡ ΠΡ τέμνῃ εἰς τὸ μέσον τὰς ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ, ὀρθία μὲν διάμετρος καλεῖται ἡ ΠΡ, καὶ ὅτι ἔχει καταχθῆ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον ΠΡ ἑκάστη τῶν ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ. Ἐὰν δὲ τὰς τέμνῃ εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι καὶ κάθετος, καλεῖται (ἡ ΠΡ) ἄξων ὀρθός, ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ, ΠΡ τέμνωσιν εἰς τὸ μέσον τὰς παραλλήλους ἑκάστης λέγονται συζυγεῖς διάμετροι. Ἐὰν δὲ τέμνωσιν εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι καὶ κάθετοι ὀνομάζονται συζυγεῖς ἄξονες.



Εἰς τὸ 1

Περὶ τῶν διαφόρων σχημάτων ἢ περιπτώσεων τῶν θεωρημάτων δέον νὰ γνωρίζωμεν, ὅτι περίπτωσις μὲν εἶναι, ὅταν τὰ τὰ ἐν τῇ προτάσει δεδομένα τῇ θέσει ᾗ δοθέντα· ἡ γὰρ διάφορος αὐτῶν μετάληψις τοῦ αὐτοῦ συμπεράσματος ὄντος ποιεῖ τὴν πτῶσιν. ὁμοίως δὲ καὶ ἀπὸ τῆς κατασκευῆς μετατιθεμένης γίνεται πτῶσις. πολλὰς δὲ ἐχόντων τῶν θεωρημάτων πάσαις ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόζει καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν στοιχείων πλὴν βραχέων, ὡς ἑξῆς εἰσόμεθα· εὐθὺς γὰρ τὸ πρῶτον θεώρημα τρεῖς πτώσεις ἔχει διὰ τὸ τὸ λαμβανόμενον σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τουτέστι τὸ B, ποτὲ μὲν εἰς τὴν κατωτέρω ἐπιφάνειαν εἶναι καὶ τοῦτο διχῶς ἢ ἀνωτέρω τοῦ κύκλου ἢ κατωτέρω, ποτὲ δὲ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῇ ἐπικειμένης. τοῦτο δὲ τὸ θεώρημα προέθετο ζητῆσαι, ὅτι οὐκ ἐπὶ πάντα δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας λαμβανόμενα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστίν, ἀλλ' ἡ νεύουσα μόνον ἐπὶ τὴν κορυφήν, διὰ τὸ καὶ ὑπὸ εὐθείας τὸ πέρας ἐχούσης μένον γεγενῆσθαι τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθές, τὸ δεύτερον θεώρημα δηλοῖ.

Εἰς τὸ β′

Τὸ δεύτερον θεώρημα τρεῖς ἔχει πτώσεις διὰ τὸ τὰ
H204 λαμβανόμενα σημεῖα τὰ Δ, E ἢ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν εἶναι ἐπιφανείας ἢ ἐπὶ τῆς κάτω διχῶς ἢ ἐσωτέρω τοῦ κύκλου ἢ ἐξωτέρω. δεῖ δὲ ἐφιστάνειν, ὅτι τοῦτο τὸ θεώρημα εὑρίσκεται ἔν τισιν ἀντιγράφοις ὅλον διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς δεδειγμένον.

Εἰς τὸ γ′

Τὸ γ′ θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει. δεῖ δὲ ἐν αὐτῷ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ AB εὐθεῖά ἐστι διὰ τὸ κοινὴ τομὴ εἶναι τοῦ δεδομένα τῆς προτάσεως εἶναι δοθέντα κατὰ τὴν θέσιν· διότι ἡ διάφορος αὐτῶν λῆψις ἐνῷ ὑπάρχει τὸ αὐτὸ συμπέρασμα κάμνει τὴν περίπτωσιν. Ὁμοίως δὲ ἐκ τῆς μεταβολῆς τῆς κατασκευῆς γίνεται περίπτωσις. Ἐνῷ δὲ τὰ θεωρήματα ἔχουσι πολλὰς περιπτώσεις ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόζει καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν στοιχείων ἐκτὸς ὀλίγων, ὡς θὰ μάθωμεν κατωτέρω· διότι εὐθὺς ἀμέσως τὸ πρῶτον θεώρημα ἔχει τρεῖς περιπτώσεις, διότι τὸ λαμβανόμενον σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τουτέστι τὸ Β, ἄλλοτε μὲν εἶναι εἰς τὴν κατωτέρω ἐπιφάνειαν καὶ τοῦτο κατὰ δύο τρόπους, ἢ ἄνω ἢ κάτω τοῦ κύκλου, ἄλλοτε δὲ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐπικειμένης εἰς αὐτὴν ἐπιφανείας. Εἰς τοῦτο δὲ τὸ θεώρημα ἔχει σκοπὸν νὰ ζητῇ, ὅτι ὄχι πάντοτε ἡ εἰς δύο σημεῖα λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἀλλὰ μόνον ἡ διευθυνομένη πρὸς τὴν κορυφήν, διότι καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια γίνεται ὑπὸ εὐθείας ἐχούσης τὸ πέρας ἀκίνητον. Ὅτι δὲ τοῦτο εἶναι ἀληθὲς τὸ λέγει τὸ δεύτερον θεώρημα.

Εἰς τὸ 2

Τὸ δεύτερον θεώρημα ἔχει τρεῖς περιπτώσεις, ἐπειδὴ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα Δ, Ε ἢ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν ἐπιφανείας ἢ ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας διττῶς ἢ ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Πρέπει δὲ νὰ σημειωθῇ, ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο εὑρίσκεται εἰς μερικὰ χειρόγραφα ὁλόκληρον ἀποδεδειγμένον διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Εἰς τὸ 3

Τὸ 3 θεώρημα δὲν ἔχει περιπτώσεις. Πρέπει δὲ νὰ σημειωθῇ εἰς αὐτό, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι εὐθεῖα, διότι εἶναι κοινὴ τομὴ τοῦ τέ-

τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἥτις ὑπὸ εὐθείας ἐγράφη τὸ πέρας ἐχούσης μένον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς ἐπιφανείας. οὐ γὰρ πᾶσα ἐπιφάνεια ὑπὸ ἐπιπέδου τεμνομένη τὴν τομὴν ποιεῖ εὐθεῖαν, οὐδὲ αὐτὸς ὁ κῶνος, εἰ μὴ διὰ τῆς κορυφῆς ἔλθῃ τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

Εἰς τὸ δʹ

Αἱ πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος τρεῖς εἰσιν ὥσπερ καὶ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου.

Εἰς τὸ εʹ

Τὸ πέμπτον θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει. ἀρχόμενος δὲ τῆς ἐκθέσεώς φησιν· τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ πρὸς τὴν βάσιν. ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ σκαληνῷ κώνῳ κατὰ μίαν μόνον θέσιν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τοῦτο ποιήσομεν οὕτως· λαβόντες τὸ κέντρον τῆς βάσεως ἀναστήσομεν ἀπ' αὐτοῦ τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως πρὸς ὀρθὰς καὶ δι' αὐτῆς καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβάλλοντες ἐπίπεδον ἕξομεν H206 τὸ ζητούμενον· δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιαʹ τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως, ὅτι, ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. τὸν δὲ κῶνον σκαληνὸν ὑπέθετο, ἐπειδὴ ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τὸ παράλληλον τῇ βάσει ἐπίπεδον τῷ ὑπεναντίως ἠγμένῳ τὸ αὐτό ἐστιν.

ἔτι φησίν· τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, μνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἡ ὁποία ἐγράφη ὑπὸ εὐθείας ἐχούσης τὸ πέρας ἀκίνητον πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς τῆς ἐπιφανείας. Διότι δὲν σχηματίζει εὐθεῖαν πᾶσα ἐπιφάνεια τεμνομένη ὑπὸ ἐπιπέδου, οὔτε αὐτὸς ὁ κῶνος, ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς.

Εἰς τὸ 4

Αἱ περιπτώσεις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι τρεῖς, ὅπως καὶ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου.

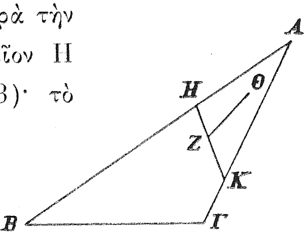
Εἰς τὸ 5

Τὸ πέμπτον θεώρημα δὲν ἔχει περιπτώσεις. Ἀρχόμενος δὲ τῆς ἀποδείξεως λέγει· «ἂς τμηθῇ ὁ κῶνος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτως ἐπὶ τὴν βάσιν». Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸν σκαληνὸν κῶνον κατὰ μίαν μόνον θέσιν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν, θὰ κάμωμεν τοῦτο ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ λάβωμεν τὸ κέντρον τῆς βάσεως θὰ ὑψώσωμεν ἀπ' αὐτοῦ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως καὶ δι' αὐτῆς καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβάλλοντες ἐπίπεδον θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον· διότι ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὸ 11ον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (θ. 18), ὅτι ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπί τι ἐπίπεδον καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς διερχόμενα ἐπίπεδα θὰ εἶναι κάθετα ἐπ' αὐτό. Ὑποθέτει δὲ τὸν κῶνον σκαληνόν, ἐπειδὴ εἰς τὸν ἰσοσκελῆ κῶνον τὸ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ἐπίπεδον εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἀχθὲν πρὸς τὸ ὑπεναντίως.

Προσέτι λέγει· «ἂς τμηθῇ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου καθέτως μὲν πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον, ἀφαιροῦν δὲ πρὸς τὸ μέρος ἀφαιροῦντι δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον ὅμοιον μὲν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον. τοῦτο δὲ γίνεται οὕτως· ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΗ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΗΚ· τὸ ΑΗΚ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΓ ὅμοιον μέν ἐστιν, ὑπεναντίως δὲ κείμενον. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς ΗΚ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΖΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΗΚ, ΘΖ ἐπίπεδον. τοῦτο δὴ ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον διὰ τὴν ΖΘ καὶ ποιοῦν τὸ προκείμενον.

ἐν τῷ συμπεράσματί φησιν, ὅτι διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΖΗ, ΕΖΚ τριγώνων ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΕ τῷ ὑπὸ ΗΖΚ. δυνατὸν δέ ἐστι τοῦτο δεῖξαι καὶ δίχα τῆς τῶν τριγώνων
H208 ὁμοιότητος λέγοντα, ὅτι, ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΚΗ, ΑΔΕ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Β, ἐν τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τοῦ περιλαμβάνοντος κύκλου τὰ Δ, Η, Ε, Κ σημεῖα. καὶ ἐπειδὴ ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΗΚ τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ζ, τὸ ὑπὸ ΔΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΗΖΚ.

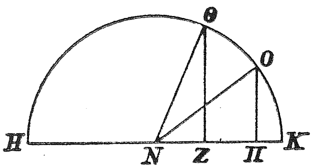
ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς ΗΘ γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΗΚ κάθετοι ἀγόμεναι ἴσον δύνανται τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομή, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΗΚ. καὶ δυνατὸν μέν ἐστιν ἐπιλογίσασθαι τοῦτο διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. εἰ γὰρ ὁ περὶ τὴν ΚΗ γραφόμενος κύκλος οὐχ ἥξει διὰ τοῦ Θ σημείου, ἔσται τὸ τῆς κορυφῆς τρίγωνον ὅμοιον μὲν πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κείμενον δὲ ἀπέναντι». Τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς· ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἂς κατασκευασθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΗ καὶ τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Η γωνία ἡ ΑΗΚ = ΑΓΒ (Εὐκλ. 1, 23)· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΗΚ εἶναι ὅμοιον μὲν πρὸς τὸ ΑΒΓ κείμενον δὲ ἀπέναντι. Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΗΚ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ ΖΘ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν ΗΚ, ΘΖ ἐπίπεδον. Τοῦτο τώρα εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, διὰ τὴν ΖΘ, καὶ κάμνει τὸ προκείμενον.



Εἰς τὸ συμπέρασμα λέγει, ὅτι διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΔΖΗ, ΕΖΚ τὸ ὀρθογώνιον ΔΖxΖΕ = ΗΖxΖΚ. Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ δειχθῇ τοῦτο καὶ χωρὶς τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, λέγοντες ὅτι, ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΑΚΗ, ΑΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Β γωνίαν, εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὰ σημεῖα Δ, Η, Ε, Κ. Καὶ ἐπειδὴ εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΗΚ τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ζ, τὸ ὀρθογώνιον ΔΖxΖΕ = ΗΖxΖΚ (Εὐκλ. 3, 35).

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ τετράγωνον ὅλων τῶν ἀπὸ τῆς ΗΘ γραμμῆς καθέτων ἐπὶ τὴν ΗΚ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων. Εἶναι ἄρα ἡ τομὴ κύκλος, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΗΚ. Καὶ εἶναι μὲν δυνατὸν νὰ συμπεράνῃ τις αὐτὸ διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Διότι, ἐὰν ὁ μὲν διάμετρον τὴν ΚΗ γραφόμενος κύκλος δὲν θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ὑπὸ τῶν ΚΖ, ΖΗ ἴσον ἤτοι τῷ ἀπὸ μείζονος τῆς ΖΘ ἢ τῷ ἀπὸ ἐλάσσονος· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. δείξομεν δὲ αὐτὸ καὶ ἐπ᾽ εὐθείας.

ἔστω τις γραμμὴ ἡ ΗΘ, καὶ ὑποτεινέτω αὐτὴν ἡ ΗΚ, εἰλήφθω δὲ καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Θ, Ο, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΗΚ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΘΖ, ΟΠ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ἀπὸ ΖΘ τῷ ὑπὸ ΗΖΚ, τὸ δὲ ἀπὸ ΟΠ τῷ ὑπὸ ΗΠΚ ἴσον. λέγω, ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ ΗΘΟΚ γραμμή.



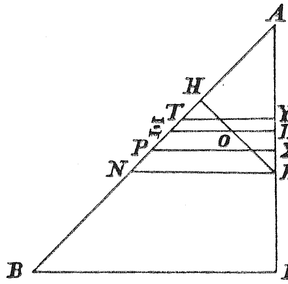
τετμήσθω γὰρ ἡ ΗΚ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΘ, ΝΟ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΗΚ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ν, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὸ ὑπὸ ΗΖΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
H210 ΝΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ΗΖΚ ἴσον ὑπόκειται τῷ ἀπὸ ΘΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. ἴσα δέ ἐστι τὰ ἀπὸ ΘΖ, ΖΝ τῷ ἀπὸ ΝΘ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Ζ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΝΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΝΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘΚ γραμμή, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΗΚ.

δυνατὸν δέ ἐστι τὰς ΔΕ, ΗΚ διαμέτρους ποτὲ μὲν ἴσας, ποτὲ δὲ ἀνίσους εἶναι, οὐδέποτε μέντοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Κ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΝΚ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΝΑ τῆς ΑΚ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΚΑ τῆς ΑΗ διὰ τὴν ὑπεναντίαν τομήν. ὥστε ἡ τῇ ΑΚ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἴση λαμβανομένη μεταξὺ πίπτει τῶν Η, Ν σημείων. πιπτέτω ὡς ἡ ΑΞ·

Θ, θὰ εἶναι τὸ $KZ \times ZH$ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας τῆς ΖΘ ἢ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς μικροτέρας· πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν ὑπετέθη. Ἀποδεικνύομεν δὲ αὐτὸ καὶ ἀπ' εὐθείας.

Ἔστω γραμμή τις (καμπύλη) ἡ ΗΘ καὶ ἂς ὑποτείνῃ αὐτὴν ἡ χορδὴ ΗΚ, ἂς ληφθῶσι δὲ καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Θ, Ο, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΗΚ αἱ ΘΖ, ΟΠ, καὶ ἔστω τὸ μὲν $Z\Theta^2 = HZ \times ZK$, τὸ δὲ $O\Pi^2 = H\Pi \times \Pi K$. Λέγω, ὅτι ἡ γραμμὴ ΗΘΟΚ εἶναι κύκλος. Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΗΚ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΝΘ, ΝΟ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΗΚ ἔχει τμηθῇ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Ν, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ζ, εἶναι τὸ $HZ \times ZK + NZ^2 = NK^2$ (Εὐκλ. 2, 5). Ἐλήφθη δὲ τὸ $HZ \times ZK = \Theta Z^2$· εἶναι ἄρα τὸ $\Theta Z^2 + NZ^2 = NK^2$. Εἶναι δὲ $\Theta Z^2 + ZN^2 = N\Theta^2$ (Εὐκλ. 1, 47)· διότι ἡ παρὰ τὸ Ζ γωνία εἶναι ὀρθή· εἶναι ἄρα τὸ $N\Theta^2 = NK^2$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ $NO^2 = NK^2$. Εἶναι ἄρα κύκλος ἡ γραμμὴ ΗΘΚ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΗΚ.

Εἶναι δὲ δυνατὸν αἱ διάμετροι ΔΕ, ΗΚ νὰ εἶναι ἄλλοτε ἴσαι καὶ ἄλλοτε ἄνισοι, οὐδέποτε ὅμως νὰ τέμνωνται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον (σχ. τοῦ θ. 1, 5 τῶν Κωνικῶν). Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Κ πρὸς τὴν ΒΓ παράλληλος ἡ ΝΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΑ $>$ ΑΓ, εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΝΑ $>$ ΑΚ (Εὐκλ. 6, 2 . 5, 14). Ὁμοίως δὲ εἶναι ΚΑ $>$ ΑΗ διὰ τὴν ἔναντι τομήν. Ὥστε ἡ λαμβανομένη ἀπὸ τῆς



ΑΝ ἴση πρὸς τὴν ΑΚ πίπτει μεταξὺ τῶν σημείων Η, Ν. Ἔστω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΑΞ· ἡ διὰ τοῦ Ξ ἄρα ἀγομένη παράλληλος

ἡ ἄρα διὰ τοῦ Ξ τῇ ΒΓ παράλληλος ἀγομένη τέμνει τὴν ΗΚ. τεμνέτω ὡς ἡ ΞΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΞΑ τῇ ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΞΑ πρὸς ΑΠ, ἡ ΚΑ πρὸς ΑΗ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΗΚΑ, ΞΑΠ τριγώνων, ἡ ΑΗ τῇ ΑΠ ἐστιν ἴση καὶ λοιπὴ ἡ ΗΞ τῇ ΠΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ξ, Κ γωνίαι ἴσαι εἰσίν· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ Β· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Ο ἴσαι· κατὰ κορυφὴν γάρ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΞΗΟ τρίγωνον τῷ ΠΟΚ τριγώνῳ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΞ τῇ ΠΚ· ὥστε
H212 καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΟΚ καὶ ἡ ΗΟ τῇ ΟΠ καὶ ὅλη ἡ ΗΚ τῇ ΞΠ. καὶ φανερόν, ὅτι, ἐὰν μεταξὺ τῶν Ν, Ξ ληφθῇ τι σημεῖον ὡς τὸ Ρ, καὶ διὰ τοῦ Ρ τῇ ΝΚ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΡΣ, μείζων ἔσται τῆς ΞΠ καὶ διὰ τοῦτο καὶ τῆς ΗΚ, ἐὰν δὲ μεταξὺ τῶν Η, Ξ ληφθῇ τι σημεῖον οἷον τὸ Τ, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΤΥ, ἐλάττων ἔσται τῆς ΞΠ καὶ τῆς ΚΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΞΠΚ γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΞΠ, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΟΠΚ τῇ ὑπὸ ΟΗΞ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΟΗΞ τῆς ὑπὸ ΗΞΟ. ἡ ΞΟ ἄρα τῆς ΟΗ μείζων καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΚΟ τῆς ΟΠ. ἐὰν δέ ποτε ἡ ἑτέρα αὐτῶν δίχα διαιρεθῇ, ἡ λοιπὴ εἰς ἄνισα τμηθήσεται.

Εἰς τὸ ϛ'

Προσέχειν χρή, ὅτι οὐ μάτην πρόσκειται ἐν τῇ προτάσει τὸ δεῖν τὴν ἀγομένην εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημείου παράλληλον μιᾷ τινι τῶν ἐν τῇ βάσει εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ πάντως τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἄγεσθαι παράλληλον· τούτου γὰρ μὴ ὄντος οὐ δυνατόν ἐστιν αὐτὴν δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου·

πρὸς τὴν ΒΓ τέμνει τὴν ΗΚ. Ἄς τὴν τέμνει ὡς ἡ ΞΟΠ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΞΑ=ΑΚ, καὶ εἶναι ΞΑ:ΑΠ=ΚΑ:ΑΗ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΗΚΑ, ΞΑΠ, ἡ ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΠ καὶ ἡ ὑπόλοιπος ΗΞ=ΠΚ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Ξ, Κ γωνίαι εἶναι ἴσαι, διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν Β· εἶναι δὲ καὶ αἱ παρὰ τὸ Ο ἴσαι, διότι εἶναι κατὰ κορυφήν· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΞΗΟ=ΠΟΚ. Καὶ εἶναι ΗΞ=ΠΚ· ὥστε εἶναι καὶ ΞΟ=ΟΚ καὶ ΗΟ=ΟΠ καὶ ὅλη ἡ ΗΚ=ΞΠ. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν μεταξὺ τῶν Ν, Ξ ληφθῇ σημεῖόν τι, ὡς τὸ Ρ, καὶ διὰ τοῦ Ρ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΝΚ ἡ ΡΣ, θὰ εἶναι ΡΣ > ΞΠ καὶ διὰ τοῦτο εἶναι καὶ ΡΣ > ΗΚ, ἐὰν δὲ μεταξὺ τῶν Η, Ξ ληφθῇ σημεῖόν τι, οἷον τὸ Τ, καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ ἡ ΤΥ παράλληλος, θὰ εἶναι ΤΥ < ΞΠ καὶ ΤΥ < ΚΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΞΠΚ > ΑΞΠ, εἶναι δὲ γων. ΟΠΚ = ΟΗΞ, εἶναι ἄρα καὶ ἡ γων. ΟΗΞ > ΗΞΟ. Εἶναι ἄρα ΞΟ > ΟΗ καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΚΟ > ΟΠ. Ἐὰν δὲ τυχὸν ἡ μία ἐξ αὐτῶν διαιρεθῇ εἰς τὸ μέσον, ἡ ἄλλη θὰ τμηθῇ εἰς ἄνισα.

Εἰς τὸ 6

Πρέπει νὰ προσέξωμεν, ὅτι δὲν ἔχει τεθῇ τυχαίως εἰς τὴν πρότασιν, ὅτι πρέπει ἡ ἀγομένη εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν σημείου νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν τῶν εἰς τὴν βάσιν εὐθειῶν, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ δι' ἄξονος ἀγομένου τριγώνου· διότι, ἐὰν δὲν ὑπάρχει τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν αὕτη νὰ τέμνηται εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος διερχομένου τριγώνου· τὸ ὁποῖον εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ συναφοῦς σχήὅπερ ἐστὶ φανερὸν ἐκ τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. εἰ γὰρ ἡ ΜΝ, ἥτινι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖΗ, μὴ πρὸς ὀρθὰς εἴη τῇ ΒΓ, δῆλον, ὅτι οὐδὲ δίχα τέμνεται οὐδὲ ἡ ΚΛ. καὶ διὰ τῶν αὐτῶν λόγων συνάγεται, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΛ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΗ· καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εἰς ἄνισα τμηθήσεται κατὰ τὸ Ζ.

δυνατὸν δὲ κατωτέρω τοῦ κύκλου καὶ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐπιφανείας τὰ αὐτὰ δείκνυσθαι.

H214

Εἰς τὸ ζ′

Τὸ ζ′ θεώρημα πτώσεις ἔχει τέσσαρας· ἢ γὰρ οὐ συμβάλλει ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ ἢ συμβάλλει τριχῶς ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἢ ἐντὸς ἢ ἐπὶ τοῦ Γ σημείου.

Μετὰ τὸ ι′

Χρὴ ἐπιστῆσαι, ὅτι τὰ ῑ ταῦτα θεωρήματα ἀλλήλων ἔχονται. ἀλλὰ τὸ πρῶτον ἔχει, ὅτι αἱ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι νεύουσαι ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐν ταύτῃ μένουσιν, τὸ δὲ δεύτερον τὸ ἀνάπαλιν, τὸ δὲ τρίτον ἔχει τὴν διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τομήν, τὸ δὲ τέταρτον τὴν παράλληλον τῇ βάσει, τὸ πέμπτον τὴν ὑπεναντίαν, τὸ ἕκτον ὡσανεὶ προλαμβάνεται τοῦ ἑβδόμου δεικνύον, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς ὀφείλει πάντως εἶναι τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ἡ κοινὴ τομὴ αὐτοῦ καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ ὅτι τούτου οὕτως ἔχοντος αἱ παράλληλοι αὐτῇ διχοτομοῦνται ὑπὸ τοῦ τριγώνου, τὸ δὲ ἕβδομον τὰς ἄλλας τρεῖς τομὰς ἔδειξε καὶ τὴν διάμετρον καὶ τὰς ἐπ’ ματος τοῦ Ἀπολλωνίου. Διότι ἐὰν ἡ ΜΝ, ἐνῷ θὰ εἶναι πρὸς οἱανδήποτε παράλληλος ἡ ΔΖΗ, δὲν εἶναι ὅμως κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἶναι φανερόν, ὅτι οὔτε ἡ ΚΛ δὲν τέμνεται εἰς τὸ μέσον. Καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, συμπεραίνεται, ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΚΘ : ΘΛ = ΔΖ : ΖΗ· καὶ ἡ ΔΗ ἄρα θὰ τμηθῇ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ζ.

Εἶναι δυνατὸν δὲ καὶ κάτωθεν τοῦ κύκλου καὶ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐπιφανείας νὰ ἀποδειχθῶσι τὰ αὐτά.

Εἰς τὸ 7

Τὸ 7 θεώρημα ἔχει τέσσαρας περιπτώσεις· διότι ἢ δὲν συναντᾷ ἡ ΖΗ τὴν ΑΓ, ἢ τὴν συναντᾷ κατὰ τρεῖς τρόπους: ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἢ ἐντὸς ἢ ἐπὶ τοῦ σημείου Γ.

Μετὰ τὸ 10

Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι τὰ 10 ταῦτα θεωρήματα συνδέονται μεταξύ των. Ἀλλὰ τὸ πρῶτον ἔχει, ὅτι αἱ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖαι διευθυνόμεναι πρὸς τὴν κορυφὴν μένουσιν εἰς αὐτήν, τὸ δὲ δεύτερον τὸ ἀντίθετον, τὸ δὲ τρίτον ἔχει τὴν διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τομήν, τὸ δὲ τέταρτον, τὴν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, τὸ πέμπτον τὴν ἀντίθετον, τὸ ἕκτον προεισάγει, οὕτως εἰπεῖν, τὸ ἕβδομον , ἀποδεικνύον, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ αὐτοῦ καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ὀφείλει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, καὶ τούτου οὕτως ἔχοντος, αἱ παράλληλοι πρὸς αὐτὴν διχοτομοῦνται ὑπὸ τοῦ τριγώνου, τὸ δὲ ἕβδομον ἔδειξε τὰς ἄλλας τρεῖς τομὰς καὶ τὴν διάμετρον καὶ τὰς ἐπ᾽ αὐτὴν

αὐτὴν καταγομένας παραλλήλους τῇ ἐν τῇ βάσει εὐθείᾳ. ἐν δὲ τῷ ὀγδόῳ δείκνυσιν, ὅπερ ἐν τοῖς προλεγομένοις εἴπομεν, ὅτι ἡ παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ τῶν εἰς ἄπειρόν εἰσιν αὐξομένων, ἐν δὲ τῷ ἐνάτῳ, ὅτι ἡ ἔλλειψις συννεύουσα εἰς ἑαυτὴν ὁμοίως τῷ κύκλῳ διὰ τὸ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτειν ἀμφοτέραις ταῖς πλευραῖς τοῦ τριγώνου οὐκ ἔστι κύκλος· κύκλους γὰρ ἐποίουν ἥ τε ὑπεναντία τομὴ καὶ ἡ παράλληλος· καὶ δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ διάμετρος τῆς τομῆς H216 *ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τέμνει καὶ τὴν βάσιν, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς τήν τε πλευρὰν καὶ τὴν ἐπ᾽ εὐθείας τῇ λοιπῇ πλευρᾷ ἐκβαλλομένην πρὸς τῇ κορυφῇ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ ἑκατέραν τῶν πλευρῶν καὶ τὴν βάσιν. τὸ δὲ δέκατον ἁπλούστερον μέν τις ἐπιβάλλων ἴσως ἂν οἰηθείη ταὐτὸν εἶναι τῷ δευτέρῳ, τοῦτο μέντοι οὐχ ὧς ἔχει· ἐκεῖ μὲν γὰρ ἐπὶ πάσης τῆς ἐπιφανείας ἔλεγε λαμβάνεσθαι τὰ δύο σημεῖα, ἐνταῦθα δὲ ἐπὶ τῆς γενομένης γραμμῆς. ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς τρισὶν ἀκριβέστερον ἑκάστην τῶν τομῶν τούτων διακρίνει μετὰ τοῦ λέγειν καὶ τὰ ἰδιώματα αὐτῶν τὰ ἀρχικά.*

Εἰς τὸ ια´

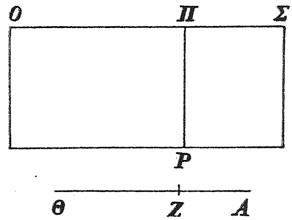
Π ε π ο ι ή σ θ ω, ὡ ς τ ὸ ἀ π ὸ ΒΓ π ρ ὸ ς τ ὸ ὑ π ὸ ΒΑΓ, ο ὕ τ ω ς ἡ ΘΖ π ρ ὸ ς ΖΑ· σαφὲς μέν ἐστι τὸ λεγόμενον, πλὴν εἴ τις καὶ ὑπομνησθῆναι βούλεται. ἔστω τῷ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΟΠΡ, τῷ δὲ ἀπὸ ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΠΡ παραβληθὲν πλάτος ποιείτω τὴν ΠΣ, καὶ γεγονέτω, ὡς ἡ ΟΠ πρὸς ΠΣ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΘ· γέγονεν ἄρα τὸ ζητούμενον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΟΠ πρὸς ΠΣ, ἡ ΑΖ καταγομένας παραλλήλους πρὸς τὴν εἰς τὴν βάσιν εὐθεῖαν. Εἰς δὲ τὸ ὄγδοον ἀποδεικνύει, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἴπομεν εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι ἡ παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ εἶναι ἐκ τῶν εἰς ἄπειρον αὐξανομένων καμπύλων, εἰς δὲ τὸ ἔνατον, ὅτι ἡ ἔλλειψις, καταλήγουσα εἰς τὸν ἑαυτόν της, ὅπως ὁ κύκλος, ἐπειδὴ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτει πρὸς τὰς δύο πλευρὰς τοῦ τριγώνου, δὲν εἶναι κύκλος· διότι κύκλους ἐσχημάτιζον καὶ ἡ ἀπέναντι τομὴ καὶ ἡ παράλληλος· καὶ πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς τέμνει τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου καὶ τὴν βάσιν, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς τέμνει καὶ τὴν πλευρὰν καὶ τὴν ἐπ' εὐθείας πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν ἐκβαλλομένην πρὸς τὴν κορυφήν, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως τέμνει καὶ ἑκατέραν τῶν πλευρῶν καὶ τὴν βάσιν. Τὸ δὲ δέκατον ἁπλούστερον κάπως θεωρῶν αὐτὸ θὰ τὸ ἐξελάμβανεν, ὅτι εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ δεύτερον, τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει· διότι ἐκεῖ μὲν ἔλεγεν, ὅτι τὰ δύο σημεῖα λαμβάνονται ἐπὶ ὅλης τῆς ἐπιφανείας, ἐδῶ δὲ εἰς τὴν γενομένην γραμμήν. Εἰς τὰ ἑπόμενα δὲ τρία διακρίνει ἀκριβέστερον ἑκάστην τῶν τομῶν, ἐνῷ λέγει καὶ τὰς ἀρχικὰς αὐτῶν ἰδιότητας.

Εἰς τὸ 11

«Ἄς γίνῃ, ὡς τὸ $ΒΓ^2 : ΒΑ \times ΑΓ = ΘΖ : ΖΑ$»· σαφὲς μὲν εἶναι τὸ λεγόμενον, ἐκτὸς ἂν θέλῃ κανεὶς καὶ ἐξήγησιν. Ἔστω $ΒΑ \times ΑΓ = ΟΠ \times ΠΡ$, καὶ $ΒΓ^2 =$ τὸ παραβληθὲν παρὰ τὴν ΠΡ, τὸ $ΠΡ \times ΠΣ$, καὶ ἂς γίνῃ, ὡς ἡ $ΟΠ : ΠΣ = ΑΖ : ΖΘ$· ἔγινε ἄρα τὸ ζητούμενον. Διότι ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ $ΟΠ : ΠΣ = ΑΖ : ΖΘ$, ἀνάπρὸς ΖΘ, ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΣΠ πρὸς ΠΟ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ. ὡς δὲ ἡ ΣΠ πρὸς ΠΟ, τὸ ΣΡ πρὸς ΡΟ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ. τοῦτο χρησιμεύει καὶ τοῖς ἑξῆς δύο θεωρήμασιν.

H218 Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ· δέδεικται μὲν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῆς στοιχειώσεως ἐν τῷ εἰκοστῷ τρίτῳ θεωρήματι, ὅτι τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ἐπεὶ δὲ ἐπακτικώτερον μᾶλλον καὶ οὐ κατὰ τὸν ἀναγκαῖον τρόπον ὑπὸ τῶν ὑπομνηματιστῶν ἐλέγετο, ἐζητήσαμεν αὐτὸ καὶ γέγραπται ἐν τοῖς ἐκδεδομένοις ἡμῖν εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Πτολεμαίου συντάξεως· οὐ χεῖρον δὲ καὶ ἐνταῦθα τοῦτο γραφῆναι διὰ τὸ μὴ πάντως τοὺς ἀναγινώσκοντας κἀκείνοις ἐντυγχάνειν, καὶ ὅτι σχεδὸν τὸ ὅλον σύνταγμα τῶν κωνικῶν κέχρηται αὐτῷ.

λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ λόγος. ἐπὶ μὲν οὖν τῶν πολλαπλασίων δυνατόν ἐστιν ἀριθμὸν ὁλόκληρον εἶναι τὴν πηλικότητα, ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν σχέσεων ἀνάγκη τὴν πηλικότητα ἀριθμὸν εἶναι καὶ μόριον ἢ μόρια, εἰ μὴ ἄρα τις ἐθέλοι καὶ ἀρρήτους εἶναι σχέσεις, οἷαί εἰσιν αἱ κατὰ τὰ ἄλογα μεγέθη. ἐπὶ πασῶν παλιν εἶναι ΣΠ : ΠΟ = ΘΖ:ΖΑ. Ὡς δὲ ΣΠ:ΠΟ=τὸ ΣΡ:ΡΟ,



τουτέστι τὸ $ΒΓ^2$:ΒΑxΑΓ. Τοῦτο χρησιμεύει καὶ εἰς τὰ ἑπόμενα δύο θεωρήματα.

«Τὸ δὲ $ΒΓ^2$:ΒΑxΑΓ = (ΒΓ:ΓΑ) x (ΒΓ:ΒΑ)»· ἀπεδείχθη μὲν εἰς τὸ 23ον θεώρημα τοῦ 6ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅτι τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα ἔχουσι λόγον, τὸν λόγον τοῦ γινομένου τῶν πλευρῶν των· ἐπειδὴ δὲ ἐπαγωγικώτερον μᾶλλον ἐλέγετο καὶ ὄχι κατὰ τὸν ἀναγκαῖον τρόπον ὑπὸ τῶν σχολιαστῶν, ἠρευνήσαμεν αὐτὸ καὶ τὸ ἔχομεν γράψει εἰς τὰ σχόλιά μας τοῦ 4ου θεωρήματος τοῦ β' βιβλίου περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ εἰς τὰ σχόλια τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Συντάξεως τοῦ Πτολεμαίου· δὲν εἶναι δὲ κακὸν νὰ τὸ γράψωμεν καὶ ἐδῶ, διότι εἶναι πιθανὸν οἱ ἀναγνῶσται νὰ μὴ τὰ ἔχουν αὐτά, καὶ ἐξ ἄλλου τὸ χρησιμοποιεῖ ὁλόκληρος ἡ θεωρία τῶν Κωνικῶν.

Λόγος λέγεται, ὅτι σύγκειται ἐκ λόγων, ὅταν οἱ λόγοι πολλαπλασιασθῶσι μεταξύ των καὶ δώσωσιν ἕνα λόγον. Ὅταν λοιπὸν γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι δυνατὸν τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ἀκέραιος, εἰς ἄλλας ὅμως σχέσεις εἶναι ἀνάγκη τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ κλάσμα ἢ μέρη κλάσματος, ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετροι σχέσεις, ὡς τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸν πολλαδὲ τῶν σχέσεων δῆλον, ὅτι αὐτὴ ἡ πηλικότης πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου ποιεῖ τὸν ἡγούμενον.

H220 ἔστω τοίνυν λόγος ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ εἰλήφθω τις αὐτῶν μέσος, ὡς ἔτυχεν, ὁ Γ, καὶ ἔστω τοῦ Α, Γ λόγου πηλικότης ὁ Δ, τοῦ δὲ Γ, Β ὁ Ε, καὶ ὁ Δ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω. λέγω, ὅτι τοῦ λόγου τῶν Α, Β πηλικότης ἐστὶν ὁ Ζ, τουτέστιν ὅτι ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖ. ὁ δὴ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν μὲν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Α. πάλιν ἐπεὶ ὁ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὁ Γ πρὸς τὸν Η. ἐναλλάξ, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἦν δέ, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Α· ἴσος ἄρα ὁ Η τῷ Α. ὥστε ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν.

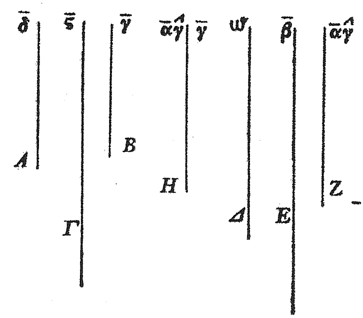
μὴ ταραττέτω δὲ τοὺς ἐντυγχάνοντας τὸ διὰ τῶν ἀριθμητικῶν δεδεῖχθαι τοῦτο· οἵ τε γὰρ παλαιοὶ κέχρηνται ταῖς τοιαύταις ἀποδείξεσι μαθηματικαῖς μᾶλλον οὔσαις ἢ ἀριθμητικαῖς διὰ τὰς ἀναλογίας, καὶ ὅτι τὸ ζητούμενον ἀριθμητικόν ἐστιν. λόγοι γὰρ καὶ πηλικότητες λόγων καὶ πολλαπλασιασμοὶ τοῖς ἀριθμοῖς πρώτως ὑπάρχουσι καὶ δι' αὐτῶν τοῖς μεγέθεσι, κατὰ τὸν εἰπόντα· ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶμεν ἀδελφά.

Εἰς τὸ ιγ'

Δεῖ σημειώσασθαι, ὅτι τοῦτο τὸ θεώρημα τρεῖς ἔχει καταγραφάς, ὡς καὶ πολλάκις εἴρηται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως·

πλασιασμὸν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι εἰς ὅλας τὰς σχέσεις τὸ αὐτὸ πηλίκον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον σχηματίζει τὸν προηγούμενον.

Ἔστω λόγος ὁ Α:Β καὶ ἂς ληφθῇ μέσος αὐτῶν, ὡς ἔτυχεν, ὁ Γ καὶ ἔστω πηλίκον τοῦ Α : Γ = Δ, τοῦ δὲ Γ : Β = Ε καὶ ΔxΕ = Ζ. Λέγω, ὅτι πηλικότης τοῦ Α : Β εἶναι ὁ Ζ, τουτέστιν, ὅτι ΖxΒ = Α. Ἔστω ΖxΒ = Η. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΔxΕ = Ζ, καὶ ΔxΓ = Α, εἶναι ἄρα Ε : Γ = Ζ:Α. Πάλιν, ἐπειδὴ ΒxΕ = Γ καὶ ΒxΖ = Η, εἶναι ἄρα Ε:Ζ = Γ:Η. Ἐναλλὰξ δὲ εἶναι Ε:Γ = Ζ:Η. Ἦτο δὲ Ε:Γ = Ζ:Α· εἶναι ἄρα Η = Α. Ὥστε Ζ x Β = Α.



Ἂς μὴ ἀνησυχῶσι δὲ οἱ ἀναγνῶσται, διότι τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀριθμητικῶς· διότι καὶ οἱ παλαιοὶ χρησιμοποιοῦσι τοιαύτας ἀποδείξεις, μᾶλλον γεωμετρικὰς ἢ ἀριθμητικὰς ἕνεκα τῶν ἀναλογιῶν, ἐνῷ τὸ ζητούμενον εἶναι ἀριθμητικόν. Διότι λόγοι καὶ πηλικότητες λόγων καὶ πολλαπλασιασμοὶ ἀριθμῶν ὑπάρχουσι πρῶτον, καὶ δι' αὐτῶν πολλαπλασιασμοὶ μεγεθῶν κατὰ τὸν εἰπόντα (Ἀρχύταν καὶ Νικόμαχον Ι 3,4), διότι τὰ μαθήματα αὐτὰ φαίνονται ἀδελφά.

Εἰς τὸ 13

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι τοῦτο τὸ θεώρημα ἔχει τρία σχήματα, ὅπως πολλάκις ἐλέχθη καὶ διὰ τὴν ἔλλειψιν· διότι ἡ ΔΕ *ἡ γὰρ ΔΕ ἢ ἀνωτέρω τοῦ Γ συμπίπτει τῇ ΑΓ ἢ κατ᾿ αὐτοῦ τοῦ Γ ἢ ἐξωτέρω ἐκβαλλομένη τῇ ΑΓ συμπίπτει.*

H222 *Εἰς τὸ ιδ′*

Δυνατὸν ἦν καὶ οὕτως δεῖξαι, ὅτι, τὸ ὡς ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ.

ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΞΟ, ἔστιν, ὡς ἡ ΓΣ πρὸς ΣΑ, ἡ ΞΤ πρὸς ΤΑ, καὶ διὰ τὰ αὐτά, ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΒ, ἡ ΑΤ πρὸς ΤΟ· δι᾿ ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓΣ πρὸς ΣΒ, ἡ ΞΤ πρὸς ΤΟ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΣΒ, τὸ ἀπὸ ΞΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ. ἔστι δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΓ, τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΤ· δι᾿ ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ.

καὶ ἔστιν, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ, ἡ ΘΕ πρὸς ΘΡ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ἡ ΕΘ πρὸς ΘΡ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΘΡ.

πτῶσιν μὲν οὖν οὐκ ἔχει, φανερὸς δέ ἐστιν ὁ σκοπὸς συνεχὴς ὢν τοῖς πρὸ αὐτοῦ τρισίν· ὁμοίως γὰρ ἐκείνοις τὴν διάμετρον τῶν ἀντικειμένων ζητεῖ τὴν ἀρχικὴν καὶ τὰς παρ᾿ ἃς δύνανται.

H224 *Εἰς τὸ ιϛ′*

Ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΚΑ τῷ ὑπὸ ΑΛΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΑ τῇ ΒΛ· ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΒΚΑ τῷ ὑπὸ ΑΛΒ ἐστιν ἴσον, ἀνάλογον ἔσται, ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΑΛ, ἡ ΛΒ πρὸς ΑΚ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΒΛ, ἡ ΛΑ ἢ συναντᾷ τὴν ΑΓ ἀνωτέρω τοῦ Γ, ἢ ἐπ' αὐτοῦ τοῦ Γ, ἢ προεκβαλλομένη ἔξω συμπίπτει πρὸς τὴν ΑΓ.

Εἰς τὸ 14

Εἶναι δυνατὸν νὰ δειχθῇ καὶ ὡς ἑξῆς, ὅτι, ὡς $ΑΣ^2$:ΒΣxΣΓ = τὸ $ΑΤ^2$: ΞΤ x ΤΟ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΞΟ, εἶναι ΓΣ:ΣΑ = ΞΤ:ΤΑ, καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ΑΣ:ΣΒ = ΑΤ:ΤΟ· δι' ἴσου ἄρα (= διὰ πολλ/σμοῦ κατὰ μέλη, Εὐκλ. 5,22) εἶναι ΓΣ:ΣΒ = ΞΤ:ΤΟ. Καὶ ὡς ἄρα $ΓΣ^2$: ΓΣxΣΒ = $ΞΤ^2$: ΞΤxΤΟ. Εἶναι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, $ΑΣ^2$: $ΣΓ^2$ = $ΑΤ^2$:$ΞΤ^2$· δι' ἴσου ἄρα εἶναι $ΑΣ^2$:ΒΣxΣΓ = $ΑΤ^2$:ΞΤxΤΟ.

Καὶ εἶναι $ΑΣ^2$:ΒΣxΣΓ = ΘΕ:ΕΠ, $ΑΤ^2$:ΞΤxΤΟ = ΘΕ:ΘΡ· καὶ ὡς ἄρα ΘΕ:ΕΠ = ΕΘ:ΘΡ. Εἶναι ἄρα ΕΠ = ΘΡ.

Περίπτωσιν μὲν δὲν ἔχει, εἶναι δὲ φανερὸς ὁ σκοπός, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὰ πρὸ αὐτοῦ τρία θεωρήματα· διότι, ὅπως εἰς αὐτὰ ζητεῖ τὴν διάμετρον τῶν ἀντικειμένων (κλάδων τῆς ὑπερβολῆς) καὶ τὰς πλευρὰς τῶν ἰσοδυνάμων τετραγώνων (παραμέτρους).

Εἰς τὸ 16

«Ἴσον ἄρα τὸ ΒΚxΚΑ πρὸς τὸ ΑΛxΛΒ· εἶναι ἄρα ΚΑ = ΒΛ»· διότι, ἐπειδὴ ΒΚxΚΑ = ΑΛxΛΒ, θὰ εἶναι ΚΒ:ΑΛ = ΛΒ:ΑΚ. Καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 12) ΚΒ:ΒΛ = ΛΑ:ΑΚ· καὶ διὰ πρὸς ΑΚ· καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΒ, ἡ ΛΚ πρὸς ΚΑ· ἴση ἄρα ἡ ΚΑ τῇ ΒΛ.

δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἐν τῷ πεντεκαιδεκάτῳ καὶ ἑκκαιδεκάτῳ θεωρήματι σκοπὸν ἔσχε ζητῆσαι τὰς καλουμένας δευτέρας καὶ συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς ἤτοι τῶν ἀντικειμένων· ἡ γὰρ παραβολὴ οὐκ ἔχει τοιαύτην διάμετρον· παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ μὲν τῆς ἐλλείψεως διάμετροι ἐντὸς ἀπολαμβάνονται, αἱ δὲ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ἐκτός. καταγράφοντας δὲ δεῖ τὰς μὲν παρ᾽ ἃς δύνανται ἤτοι τὰς ὀρθίας πλευρὰς πρὸς ὀρθὰς τάττειν καὶ δηλονότι καὶ τὰς παραλλήλους αὐταῖς, τὰς δὲ τεταγμένως καταγομένας καὶ τὰς δευτέρας διαμέτρους οὐ πάντως· μάλιστα γὰρ ἐν ὀξείᾳ γωνίᾳ δεῖ κατάγειν αὐτάς, ἵνα σαφεῖς ὦσιν τοῖς ἐντυγχάνουσιν ἕτεραι οὖσαι τῶν παραλλήλων τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ.

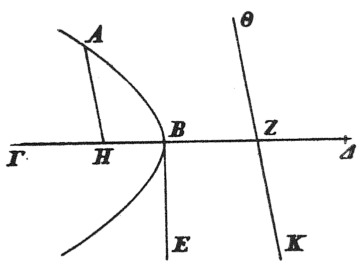
Μετὰ τὸ ἑκκαιδέκατον θεώρημα ὅρους ἐκτίθεται περὶ τῆς καλουμένης δευτέρας διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, οὓς διὰ καταγραφῆς σαφεῖς ποιήσομεν.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἔστω ἡ ΓΒΔ,
H226 παρ᾽ ἣν δὲ δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΒΓ καταγόμεναι ἡ ΒΕ. φανερὸν οὖν, ὅτι ἡ μὲν ΒΓ εἰς ἄπειρον αὔξεται διὰ τὴν τομήν, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ὀγδόῳ θεωρήματι, ἡ δὲ ΒΔ, ἥτις ἐστὶν ἡ ὑποτείνουσα τὴν ἐκτὸς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου γωνίαν πεπέρασται. ταύτην δὴ διχοτομοῦντες κατὰ τὸ Ζ καὶ ἀγαγόντες ἀπὸ τοῦ Α τεταγμένως κατηγμένην τὴν

συνθέσεως (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 14) εἶναι ΚΛ:ΛΒ = ΛΚ:ΚΑ· εἶναι ἄρα ΚΑ = ΒΛ.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι εἰς τὸ 15 καὶ 16 θ. εἶχε σκοπὸν νὰ ζητήσῃ τὰς καλουμένας δευτέρας καὶ συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς ἤτοι τῶν ἀντικειμένων (κλάδων τῆς ὑπερβολῆς)· διότι ἡ παραβολὴ δὲν ἔχει τοιαύτην διάμετρον. Πρέπει δὲ νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι αἱ μὲν διάμετροι τῆς ἐλλείψεως λαμβάνονται ἐντός, αἱ δὲ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ἐκτός. Πρέπει δὲ ἀφοῦ καταγράψωμεν τὰς πλευρὰς τῶν ἰσοδυνάμων τετραγώνων (παραμέτρους) ἤτοι τὰς ὀρθίας πλευρὰς (διαμέτρους) νὰ τὰς τάξωμεν καθέτους, δηλ. καὶ τὰς παραλλήλους πρὸς αὐτάς, τὰς δὲ τεταγμένως καταγομένας καὶ τὰς δευτέρας διαμέτρους, ὄχι πάντως· πρέπει δὲ νὰ φέρωμεν αὐτὰς εἰς ὀξεῖαν γωνίαν, ἵνα εἶναι φανεραὶ εἰς τοὺς ἀναγνώστας, ὅτι εἶναι ἄλλαι ἢ αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευράν.

Μετὰ τὸ 16 θεώρημα θέτει ὁρισμοὺς περὶ τῆς καλουμένης δευτέρας διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, τοὺς ὁποίους θὰ καταστήσωμεν σαφεῖς διὰ τῶν σχημάτων.



Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἔστω ἡ ΓΒΔ, παράμετρος δὲ ἡ ΒΕ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ μὲν ΒΓ αὐξάνεται ἐπ' ἄπειρον, διὰ τὴν τομήν, ὡς ἀπεδείχθη εἰς τὸ 8ον θεώρημα, ἡ δὲ ΒΔ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τὴν ἐκτὸς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου γωνίαν, εἶναι πεπερασμένη. Διχοτομοῦντες λοιπὸν αὐτὴν κατὰ τὸ Ζ καὶ

ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΗ παράλληλον τὴν ΘΖΚ καὶ ποιήσαντες τὴν ΘΖ τῇ ΖΚ ἴσην, ἔτι μέντοι καὶ τὸ ἀπὸ ΘΚ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΒΕ, ἕξομεν τὴν ΘΚ δευτέραν διάμετρον. τοῦτο γὰρ δυνατὸν διὰ τὸ τὴν ΘΚ ἐκτὸς οὖσαν τῆς τομῆς εἰς ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι καὶ δυνατὸν εἶναι ἀπὸ τῆς ἀπείρου προτεθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀφελεῖν. τὸ δὲ Ζ κέντρον καλεῖ, τὴν δὲ ΖΒ καὶ τὰς ὁμοίως αὐτῇ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὴν τομὴν φερομένας ἐκ τοῦ κέντρου.

ταῦτα μὲν ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων· καὶ φανερόν, ὅτι πεπερασμένη ἐστὶν ἑκατέρα τῶν διαμέτρων, ἡ μὲν πρώτη αὐτόθεν ἐκ τῆς γενέσεως τῆς τομῆς, ἡ δὲ δευτέρα, διότι μέση ἀνάλογόν ἐστι πεπερασμένων εὐθειῶν τῆς τε πρώτης διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως.

ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως οὔπω δῆλον τὸ λεγόμενον. ἐπειδὴ γὰρ εἰς ἑαυτὴν συννεύει, καθάπερ ὁ κύκλος, καὶ ἐντὸς ἀπολαμβάνει πάσας τὰς διαμέτρους καὶ ὡρισμένας αὐτὰς ἀπεργάζεται· ὥστε οὐ πάντως ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἡ μέση ἀνάλογον τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἀγομένη καὶ ὑπὸ τῆς διαμέτρου διχοτομουμένη ὑπὸ τῆς
H228 τομῆς περατοῦται· δυνατὸν δὲ αὐτὴν συλλογίζεσθαι δι' αὐτῶν τῶν εἰρημένων ἐν τῷ πεντεκαιδεκάτῳ θεωρήματι. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἐκεῖ δέδεικται, αἱ ἐπὶ τὴν ΔΕ καταγόμεναι παράλληλοι τῇ ΑΒ δύνανται τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν τρίτην αὐταῖς ἀνάλογον γινομένην, τουτέστι τὴν ΖΔ, ἔστιν, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ΑΒ πρὸς ΔΖ· ὥστε μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΑΒ τῶν ΕΔ, ΔΖ. καὶ διὰ τοῦτο καὶ αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν

φέροντες ἀπὸ τοῦ Α τεταγμένως κατηγμένην τὴν ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΗ τὴν ΘΖΚ, καὶ λαβόντες $ΘΖ = ΖΚ$, καὶ $ΘΚ^2 = ΔΒ x ΒΕ$, θὰ ἔχωμεν τὴν ΘΚ δευτέραν διάμετρον. Διότι τοῦτο εἶναι δυνατόν, διότι ἐνῷ ἡ ΘΚ εἶναι ἐκτὸς τῆς τομῆς εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκβάλληται ἐπ' ἄπειρον καὶ εἶναι δυνατὸν ἀπὸ τῆς ἀπείρου εὐθείας ν' ἀφαιρεθῇ ἴση πρὸς προταθεῖσαν εὐθεῖαν. Καλεῖ δὲ τὸ Ζ κέντρον, τὴν δὲ ΖΒ καὶ τὰς ὁμοίως πρὸς αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὴν τομὴν φερομένας ἐκ τοῦ κέντρου.

Ταῦτα μὲν ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων· καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἑκατέρα τῶν διαμέτρων εἶναι πεπερασμένη, ἡ μὲν πρώτη ἐκ τῆς γενέσεως τῆς τομῆς, ἡ δὲ δευτέρα, διότι εἶναι μέση ἀνάλογος πεπερασμένων εὐθειῶν, καὶ τῆς πρώτης διαμέτρου καὶ τῆς παραμέτρου.

Ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ὅμως δὲν εἶναι φανερὸν τὸ λεγόμενον. Διότι, ἐπειδὴ αὕτη συγκλίνει πρὸς ἑαυτήν, ὅπως ὁ κύκλος, καὶ ἐντὸς παρέχει ὅλας τὰς διαμέτρους καὶ καθιστᾷ αὐτὰς ὡρισμένας· ὥστε ὄχι πάντως ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, δὲν περατοῦται ὑπὸ τῆς τομῆς ἡ μέση ἀνάλογος τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἀγομένη καὶ ὑπὸ τῆς διαμέτρου διχοτομουμένη· εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ σκεφθῶμεν δι' αὐτὴν διὰ τῶν αὐτῶν, τῶν λεχθέντων εἰς τὸ 15 θεώρημα. Διότι, ἐπειδή, ὡς ἀπεδείχθη ἐκεῖ, τὰ τετράγωνα τῶν καταγομένων ἐπὶ τὴν ΔΕ παραλλήλων πρὸς τὴν ΑΒ, εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ εἰς τὴν τρίτην ἀνάλογον πρὸς αὐτὰς παραβαλλόμενα, τουτέστι τὴν ΖΔ, εἶναι $ΔΕ : ΑΒ = ΑΒ : ΔΖ$· ὥστε ἡ ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΕΔ, ΔΖ. Καὶ διὰ τοῦτο καὶ αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΑΒ παράλληλοι πρὸς τὴν ΔΕ, θὰ

AB παράλληλοι τῇ ΔE δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον παρακείμενα τῶν ΔE, AB, τουτέστι τὴν AN. διὰ δὴ τοῦτο μέση ἀνάλογον γίνεται ἡ ΔE δευτέρα διάμετρος τῶν BA, AN τοῦ εἴδους πλευρῶν.

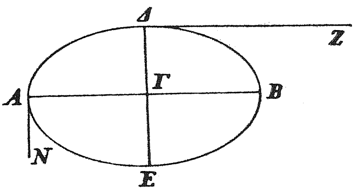
δεῖ δὲ εἰδέναι καὶ τοῦτο διὰ τὸ εὔχρηστον τῶν καταγραφῶν· ἐπεὶ γὰρ ἄνισοί εἰσιν αἱ AB, ΔE διάμετροι· ἐν μόνῳ γὰρ τῷ κύκλῳ ἴσαι εἰσίν· δῆλον, ὅτι ἡ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη τῇ ἐλάσσονι αὐτῶν ὡς ἐνταῦθα ἡ ΔZ ἅτε τρίτη ἀνάλογον οὖσα τῶν ΔE, AB μείζων ἐστὶν ἀμφοῖν, ἡ δὲ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη τῇ μείζονι ὡς ἐνταῦθα ἡ AN διὰ τὸ τρίτην ἀνάλογον εἶναι τῶν AB, ΔE ἐλάσσων ἐστὶν ἀμφοῖν· ὥστε καὶ συνεχῶς εἶναι τὰς τέσσαρας ἀνάλογον· ὡς γὰρ ἡ AN πρὸς ΔE, ἡ ΔE πρὸς AB καὶ ἡ AB πρὸς ΔZ.

Εἰς τὸ ιζ′

Ὁ μὲν Εὐκλείδης ἐν τῷ πεντεκαιδεκάτῳ θεωρήματι
H230 τοῦ τρίτου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως ἔδειξεν, ὅτι ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἀπ᾽ ἄκρας τῆς διαμέτρου ἐκτός τε πίπτει καὶ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ἐν τούτῳ καθολικόν τι δείκνυσι δυνάμενον ἐφαρμόσαι ταῖς τρισὶ τοῦ κώνου καὶ τῷ κύκλῳ.

τοσοῦτον διαφέρει ὁ κύκλος τῶν τοῦ κώνου τομῶν, ὅτι ἐπ᾽ ἐκείνου μὲν αἱ τεταγμένως κατηγμέναι πρὸς ὀρθὰς ἄγονται τῇ διαμέτρῳ· οὐδὲ γὰρ ἄλλαι εὐθεῖαι παράλληλοι ἑαυταῖς ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου διχοτομοῦνται· ἐπὶ ἔχωσι τὰ τετράγωνά των ἰσοδύναμα πρὸς τὰ παραβαλλόμενα εἰς τὴν τρίτην ἀνάλογον, τὰ τῶν ΔΕ, ΑΒ, τουτέστι τὴν ΑΝ. Διὰ τοῦτο λοιπὸν ἡ μέση ἀνάλογος ΔΕ γίνεται δευτέρα διάμετρος τῶν ΒΑ, ΑΝ τοῦ σχήματος τῶν πλευρῶν.

Πρέπει δὲ νὰ γνωρίζωμεν καὶ τοῦτο διὰ τὸ εὔχρηστον τῶν σχημάτων· διότι, ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἄνισοι διάμετροι· διότι μόνον εἰς τὸν κύκλον εἶναι ἴσαι· εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ μὲν κάθετος ἐπὶ τὴν μικροτέραν, ὡς ἐδῶ ἡ ΔΖ, ἐπειδὴ εἶναι τρίτη ἀνάλογος τῶν ΔΕ, ΑΒ, εἶναι μεγαλυτέρα καὶ τῶν δύο, ἡ δὲ κάθετος ἐπὶ τὴν μεγαλυτέραν, ὡς ἐδῶ ἡ ΑΝ, ἐπειδὴ εἶναι τρίτη ἀνάλογος τῶν ΑΒ, ΔΕ, εἶναι μικροτέρα καὶ τῶν δύο· ὥστε καὶ αἱ τέσσαρες εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· διότι εἶναι ΑΝ:ΔΕ = ΔΕ:ΑΒ = ΑΒ : ΔΖ.



Εἰς τὸ 17

Ὁ μὲν Εὐκλείδης εἰς τὸ 15 θεώρημα τοῦ τρίτου βιβλίου τῶν Στοιχείων ἀπέδειξεν, ὅτι ἡ ἀγομένη κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ἐφάπτεται τοῦ κύκλου καὶ πίπτει ἐκτός, ὁ δὲ Ἀπολλώνιος εἰς τοῦτο ἀποδεικνύει κάτι γενικώτερον, δυνάμενον νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὰς τρεῖς τομὰς τοῦ κώνου καὶ εἰς τὸν κύκλον.

Τόσον διαφέρει ὁ κύκλος τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν, ὅτι ἀπ' ἐκείνου μὲν αἱ τεταγμένως κατηγμέναι ἄγονται καθέτως ἐπὶ τὴν διάμετρον· διότι οὔτε ἄλλαι εὐθεῖαι παράλληλοι μεταξύ των διχοτομοῦνται ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου· ὁπωσδήποτε *δὲ τῶν τριῶν τομῶν οὐ πάντως πρὸς ὀρθὰς ἄγονται, εἰ μὴ ἐπὶ μόνους τοὺς ἄξονας.*

Εἰς τὸ ιη′

Ἔν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπὶ μόνης παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς ἐστιν, κάλλιον δὲ καθολικώτερον ἔχειν τὴν πρότασιν, εἰ μὴ ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐκείνοις ὡς ἀναμφίβολον παραλέλειπται· ἡ γὰρ ΓΔ ἐντὸς οὖσα τῆς τομῆς πεπερασμένης οὔσης καὶ αὐτὴ κατ᾽ ἀμφότερα τέμνει τὴν τομήν.

δεῖ δὲ ἐπιστῆσαι, ὅτι, κἂν ἡ ΑΖΒ τέμνῃ τὴν τομήν, ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόζει.

Εἰς τὸ κ′

Ἀπὸ τούτου τοῦ θεωρήματος ἀρχόμενος ἐφεξῆς ἐν πᾶσι τὰ συμπτώματα τῆς παραβολῆς αὐτῇ δείκνυσιν ὑπάρχοντα καὶ οὐκ ἄλλῃ τινί, ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ δὲ τῇ ὑπερβολῇ καὶ τῇ ἐλλείψει καὶ τῷ κύκλῳ τὰ αὐτὰ δείκνυσιν ὑπάρχοντα.

ἐπειδὴ δὲ οὐκ ἄχρηστον φαίνεται τοῖς τὰ μηχανικὰ
H232 *γράφουσι διὰ τὴν ἀπορίαν τῶν ὀργάνων καὶ πολλάκις διὰ συνεχῶν σημείων γράφειν τὰς τοῦ κώνου τομὰς ἐν ἐπιπέδῳ, διὰ τούτου τοῦ θεωρήματος ἔστι πορίσασθαι συνεχῆ σημεῖα, δι᾽ ὧν γραφήσεται ἡ παραβολὴ κανόνος παραθέσει. ἐὰν γὰρ ἐκθῶμαι εὐθεῖαν ὡς τὴν ΑΒ καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς λάβω συνεχῆ σημεῖα ὡς τὰ Ε, Ζ καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ καὶ ποιήσω ὡς τὰς ΕΓ, ΖΔ λαβὼν ἐπὶ τῆς ΕΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, εἰ μὲν εὐρυτέραν βουληθείην ποιῆσαι παραβολήν,*

ὅμως εἰς τὰς τρεῖς κωνικὰς τομὰς δὲν ἄγονται καθέτως παρὰ μόνον ἐπὶ τοὺς ἄξονας.

Εἰς τὸ 18

Εἰς μερικὰ χειρόγραφα τὸ θεώρημα τοῦτο ὑπάρχει μόνον διὰ τὴν παραβολὴν καὶ τὴν ὑπερβολήν, εἶναι δὲ καλλίτερον νὰ ὑπάρχῃ γενικώτερον ἡ πρότασις, ἐκτὸς ἐὰν τὸ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, εἰς ἐκεῖνα, ἔχει παραλειφθῆ ὡς ἀναμφίβολον· διότι ἡ ΓΔ εὑρισκομένη ἐντὸς τῆς τομῆς, ἡ ὁποία εἶναι πεπερασμένη καὶ αὐτή, τέμνει τὴν τομὴν καὶ εἰς τὰ δύο μέρη.

Πρέπει δὲ νὰ σημειωθῇ, ὅτι, καὶ ἂν ἡ ΑΖΒ τέμνῃ τὴν τομήν, ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόζει.

Εἰς τὸ 20

Ἀπὸ τούτου τοῦ θεωρήματος καὶ ἑξῆς εἰς ὅλα ἀποδεικνύει τὰς ἰδιότητας τῆς παραβολῆς, ὅτι μόνον εἰς αὐτὴν καὶ ὄχι ἄλλην τομὴν ἰσχύουσιν αὐταί, κατὰ τὸ πλεῖστον δὲ ἀποδεικνύει, ὅτι εἰς τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὴν ἔλλειψιν καὶ τὸν κύκλον ὑπάρχουσιν αἱ αὐταὶ ἰδιότητες.

Ἐπειδὴ δὲ δὲν φαίνεται ἄχρηστον διὰ τοὺς συγγραφεῖς μηχανικῶν πραγματειῶν, ὅταν δὲν ἔχωσι τὰ κατάλληλα ὄργανα καὶ γράφωσι διὰ συνεχῶν σημείων τὰς τομὰς τοῦ κώνου εἰς τὸ ἐπίπεδον, διὰ τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ εἶναι δυνατὸν νὰ λαμβάνωνται συνεχῆ σημεῖα διὰ τῶν ὁποίων μὲ τὴν βοήθειαν κανόνος θὰ γραφῇ ἡ παραβολή. Διότι, ἐὰν λάβω εὐθεῖαν ὡς τὴν ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτῆς λάβω συνεχῆ σημεῖα, ὡς τὰ Ε, Ζ, καὶ ἐξ αὐτῶν φέρω καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ κάμω, ὡς τὰς ΕΓ, ΖΔ, ἀφοῦ λάβω ἐπὶ τῆς ΕΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, ἐὰν μὲν ἤθελα νὰ κάμω εὐρυτέραν παραπόρρω τοῦ Ε, εἰ δὲ στενωτέραν, ἐγγύτερον, καὶ ποιήσω, ὡς τὴν ΑΕ πρὸς ΑΖ, τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὰ Γ, Δ σημεῖα ἐπὶ τῆς τομῆς ἔσται. ὁμοίως δὲ καὶ ἄλλα ληψόμεθα, δι' ὧν γραφήσεται ἡ παραβολή.

Εἰς τὸ κα'

Τὸ θεώρημα σαφῶς ἔκκειται καὶ πτῶσιν οὐκ ἔχει· δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ παρ' ἣν δύνανται, τουτέστιν ἡ ὀρθία πλευρά, ἐπὶ τοῦ κύκλου ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ. εἰ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ, ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ κύκλου μόνου, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ.

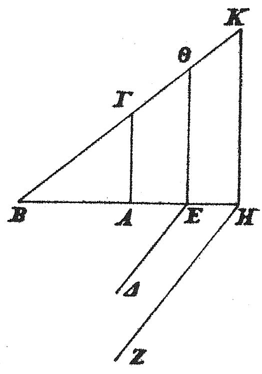
δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, ὅτι αἱ καταγόμεναι ἐν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ πρὸς ὀρθάς εἰσι πάντως τῇ διαμέτρῳ καὶ ἐπ' εὐθείας γίνονται ταῖς παραλλήλοις τῇ ΑΓ.

διὰ δὲ τούτου τοῦ θεωρήματος τῷ αὐτῷ τρόπῳ τοῖς
H234 ἐπὶ τῆς παραβολῆς εἰρημένοις προσέχοντες γράφομεν ὑπερβολὴν καὶ ἔλλειψιν κανόνος παραθέσει. ἐκκείσθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ' ἄπειρον ἐπὶ τὸ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ταύτῃ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς ΑΗ τὰ Ε, Η, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΗΚ, καὶ γινέσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΑΗΚ ἴσον τὸ ἀπὸ ΖΗ, τῷ δ' ὑπὸ ΑΕΘ ἴσον τὸ ἀπὸ ΔΕ· διὰ γὰρ τῶν Α, Δ, Ζ ἥξει ἡ ὑπερβολή. ὁμοίως δὲ κατασκευάσομεν καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως.

βολήν, μακρύτερον τοῦ Ε, ἐὰν δὲ στενωτέραν, πλησιέστερον, καὶ θὰ κάμω ὡς ΑΕ:ΑΖ=ΕΓ^2:ΖΔ^2, θὰ εἶναι τὰ σημεῖα Γ, Δ ἐπὶ τῆς τομῆς. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ λάβωμεν καὶ τὰ ἄλλα, διὰ τῶν ὁποίων θὰ γραφῇ ἡ παραβολή.

Εἰς τὸ 21

Τὸ θεώρημα ἐκτίθεται σαφῶς καὶ δὲν ἔχει περίπτωσιν (ἄλλην)· πρέπει ὅμως νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἡ παράμετρος, εἰς τὸν κύκλον εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον. Διότι, ἐὰν εἶναι ΔΕ^2:ΑΕxΕΒ=ΓΑ:ΑΒ, εἶναι δὲ ΔΕ^2=ΑΕxΕΒ ἐπὶ μόνου τοῦ κύκλου, εἶναι ἄρα καὶ ΓΑ = ΑΒ.



Πρέπει δὲ νὰ γνωρίζωμεν καὶ αὐτό, ὅτι αἱ καταγόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἶναι πάντως κάθετοι ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου καὶ γίνονται ἐπ' εὐθείας πρὸς τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ.

Διὰ τοῦ θεωρήματος δὲ τούτου, διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου, ὡς ἐλέχθη ἐπὶ τῆς παραβολῆς, γράφομεν ὑπερβολὴν καὶ ἔλλειψιν διὰ παραθέσεως κανόνος. Διότι ἂς ληφθῇ εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἂς προεκβληθῇ ἀπεριορίστως μέχρι τοῦ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπ' αὐτὴν ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΓ καὶ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἂς ληφθῶσι σημεῖά τινα ἐπὶ τῆς ΑΗ, τὰ Ε, Η, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Η ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὴν ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΗΚ, αἱ ἂς γίνῃ πρ ὸς μὲν τὸ ΑΗxΗΚ=ΖΗ^2, πρὸς δὲ τὸ ΑΕxΕΘ=ΔΕ^2· θὰ διέλθῃ λοιπὸν διὰ τῶν Α, Δ, Ζ ἡ ὑπερβολή. Ὁμοίως δὲ κατασκευάζονται καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως.

Εἰς τὸ κγʹ

Δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἐν τῇ προτάσει δύο διαμέτρους λέγει οὐχ ἁπλῶς τὰς τυχούσας, ἀλλὰ τὰς καλουμένας συζυγεῖς, ὧν ἑκατέρα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἦκται καὶ μέσον λόγον ἔχει τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν τῆς ἑτέρας διαμέτρου, καὶ διὰ τοῦτο δίχα τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ιεʹ θεωρήματι. εἰ γὰρ μὴ οὕτως ληφθῇ, συμβήσεται τὴν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν δύο διαμέτρων τῇ ἑτέρᾳ αὐτῶν παράλληλον εἶναι· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

ἐπειδὴ δὲ τὸ Η ἔγγιόν ἐστι τῆς διχοτομίας τῆς ΑΒ ἤπερ τὸ Θ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ ΒΗΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΜ
H236 *ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΜ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΘΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΜ ἴσον τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἀπὸ ΘΜ τοῦ ἀπὸ ΗΜ μεῖζον, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΗΑ μεῖζον τοῦ ὑπὸ ΒΘΑ.*

Εἰς τὸ κεʹ

Ἔν τισι φέρεται καὶ αὕτη ἡ ἀπόδειξις·

εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΖΕ. πάλιν δὴ εἰλήφθω, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΖ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ τῇ ΒΑ ἐκβαλλομένῃ· ὥστε καὶ ἡ ΖΗ.

Εἰς τὸ κϛʹ

Τὸ θεώρημα τοῦτο πτώσεις ἔχει πλείους, πρῶτον μέν, ὅτι ἡ ΕΖ ἢ ἐπὶ τὰ κυρτὰ μέρη τῆς τομῆς λαμβάνεται ὡς

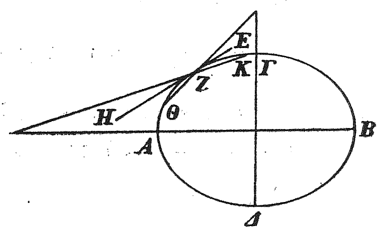
Εἰς τὸ 23

Πρέπει νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι εἰς τὴν πρότασιν λέγει δύο διαμέτρους, ὄχι ἁπλῶς τὰς τυχούσας, ἀλλὰ τὰς καλουμένας συζυγεῖς, ἑκατέρα τῶν ὁποίων ἔχει ἀχθῇ παραλλήλως πρὸς τεταγμένως κατηγμένην καὶ ἔχει μέσον λόγον τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τῆς ἄλλης διαμέτρου, καὶ διὰ τοῦτο τέμνουσιν εἰς τὸ μέσον τὰς παραλλήλους ἀλλήλων, ὡς ἀπεδείχθη εἰς τὸ 15 θεώρημα. Διότι, ἐὰν δὲν ληφθῇ τοιουτοτρόπως, θὰ συμβῇ, ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων, νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην ἐξ αὐτῶν· τὸ ὁποῖον δὲν ὑπετέθη.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ Η εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ μέσον τῆς ΑΒ ἢ τὸ Θ, καὶ εἶναι τὸ μὲν $\mathrm{BH} \times \mathrm{HA} + \mathrm{HM}^2 = \mathrm{AM}^2$, τὸ δὲ $\mathrm{A\Theta} \times \mathrm{\Theta B} + \mathrm{\Theta M}^2 = \mathrm{AM}^2$ (Εὐκλ. 2, 5), τὸ δὲ $\mathrm{\Theta M}^2 > \mathrm{HM}^2$, εἶναι ἄρα τὸ $\mathrm{BH} \times \mathrm{HA} > \mathrm{B\Theta} \times \mathrm{\Theta A}$.

Εἰς τὸ 25

Εἰς μερικὰ χειρόγραφα φέρεται καὶ ἡ ἑξῆς ἀπόδειξις·



Ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Θ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΘ· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκβαλλομένη συναντᾷ τὴν ΔΓ (θ. 23)· ὥστε καὶ ἡ ΖΕ. Ἂς ληφθῇ πάλιν σημεῖον καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΖ καὶ ἂς ἐκβληθῇ· θὰ συναντήσῃ τώρα αὔτη τὴν ΒΑ, ἐκβαλλομένην· ὥστε καὶ ἡ ΖΗ (θὰ τὴν συναντήσῃ).

Εἰς τὸ 26

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει πολλὰς περιπτώσεις, πρῶτον μέν, ὅτι ἡ ΕΖ ἢ εἰς τὰ κυρτὰ μέρη τῆς τομῆς λαμβάνεται, ὅπως ἐδῶ, ἐνταῦθα ἢ ἐπὶ τὰ κοῖλα, ἔπειτα, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ *Ε* παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἔσω μὲν καθ᾽ ἓν σημεῖον συμβάλλει ἀδιαφόρως τῇ διαμέτρῳ ἀπείρῳ οὔσῃ, ἔξω δὲ οὖσα καὶ μάλιστα ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἔχει θέσιν ἢ ἐξωτέρω τοῦ *Β* ἢ ἐπὶ τοῦ *Β* ἢ μεταξὺ τῶν *Α*, *Β*.

Εἰς τὸ κζ′

Ἔν τισιν ἀντιγράφοις τοῦ κζ′ θεωρήματος φέρεται τοιαύτη ἀπόδειξις·

ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ *ΑΒ*, καὶ ταύτην τε-
H238 μνέτω εὐθεῖά τις ἡ *ΗΔ* ἐντὸς τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι ἡ *ΗΔ* ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ἤχθω γάρ τις διὰ τοῦ *Α* παρατεταγμένως ἡ *ΑΕ*· ἡ *ΑΕ* ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

ἤτοι δὴ ἡ *ΗΔ* τῇ *ΑΕ* παράλληλός ἐστιν ἢ οὔ.

εἰ μὲν οὖν παράλληλός ἐστιν, αὐτὴ τεταγμένως κατῆκται· ὥστε ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα, ἐπεὶ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς διαμέτρου, συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

μὴ ἔστω δὴ παράλληλος τῇ *ΑΕ*, ἀλλὰ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω τῇ *ΑΕ* κατὰ τὸ *Ε* ὡς ἡ *ΗΔΕ*.

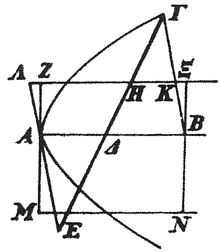
ὅτι μὲν οὖν τῇ τομῇ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη συμπίπτει, ἐφ᾽ ἅ ἐστι τὸ *Ε*, δῆλον· εἰ γὰρ τῇ *ΑΕ* συμβάλλει, πολὺ πρότερον τεμεῖ τὴν τομήν.

ἢ εἰς τὰ κοῖλα, ἔπειτα, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε παραλλήλως τεταγμένως κατηγμένη, πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν μὲν εἰς ἓν τυχὸν σημεῖον συναντᾷ τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία εἶναι ἀπεριόριστος, εἰς τὸ ἐξωτερικὸν δέ, ὅταν εἶναι, καὶ μάλιστα ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἔχει θέσιν ἢ ἔξω τοῦ Β ἢ ἐπὶ τοῦ Β ἢ μεταξὺ τῶν Α, Β.

Εἰς τὸ 27

Εἰς μερικὰ χειρόγραφα τοῦ 27 θεωρήματος φέρεται ἡ ἑξῆς ἀπόδειξις.

Ἔστω παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ αὐτὴν ἂς τὴν τέμνῃ εὐθεῖά τις ἡ ΗΔ ἐντὸς τῆς τομῆς. Λέγω, ὅτι ἡ ΗΔ ἐκβαλλομένη καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.



Διότι, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Α παραλλήλως τεταγμένη ἡ ΑΕ· θὰ πέσῃ ἄρα ἡ ΑΕ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Ἡ ΗΔ ἢ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ ἢ δὲν θὰ εἶναι.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν εἶναι παράλληλος, θὰ εἶναι τεταγμένως κατηγμένη· ὥστε ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, ἐπειδὴ τέμνεται εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς διαμέτρου, θὰ συναντᾷ τὴν τομήν.

Τώρα ἂς μὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ, ἀλλὰ ἐκβαλλομένη ἂς συναντᾷ τὴν ΑΕ κατὰ τὸ Ε, ὡς ἡ ΗΔΕ.

Ὅτι μὲν λοιπὸν θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν πρὸς τὰ ἄλλα μέρη, πρὸς τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ Ε, εἶναι φανερόν· διότι, ἐὰν συναντᾷ τὴν ΑΕ, πολὺ προηγουμένως θὰ τέμνῃ τὴν τομήν.

λέγω, ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ.

ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται ἡ ΜΑ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἡ ΑΖ· ἡ ΜΑ ἄρα τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. πεποιήσθω, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΕΔ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς ΑΖ, καὶ διὰ τῶν Μ, Ζ τῇ ΑΒ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΚ, ΜΝ· τετραπλεύρου οὖν ὄντος τοῦ ΛΑΔΗ καὶ θέσει οὔσης τῆς ΛΑ ἤχθω τῇ ΛΑ παράλληλος ἡ ΓΚΒ ἀποτέμνουσα τὸ ΓΚΗ τρίγωνον τῷ ΛΑΔΗ τετραπλεύρῳ ἴσον, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΖΑΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΞΒΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΕΔ τρίγωνον, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΖ, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΕΔ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΔΓΒ τρίγωνον· παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΓΒ, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΓΕ, ΑΒ· ὡς δὲ ἡ ΜΑ
H240 πρὸς ΑΖ, τὸ ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΑΞ παραλληλόγραμμον, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΓΔΒ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΑΖΞΒ παραλληλόγραμμον· ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ ΓΔΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΖΞΒ παραλληλόγραμμον. ἴσον δέ ἐστι τὸ ΖΑΒΞ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΒΔ τριγώνῳ· ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΗΚ τρίγωνον τῷ ΑΛΗΔ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ ΗΔΒΚ τετράπλευρον, τὸ ΛΑΒΚ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔΒ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· τὸ δὲ ΛΑΒΚ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΑΒΞ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΑΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΒ, ΖΚ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΔΒ τρίγωνον τῷ ΞΖΑΒ παραλληλογράμ-

Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς τὰ ἄλλα μέρη ἐκβαλλομένη θὰ συναντήση τὴν τομήν.

Διότι, ἔστω ἡ παράμετρος ἡ ΜΑ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἐπ' εὐθείας πρὸς αὐτὴν ἡ ΑΖ· ἡ ΜΑ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἂς γίνῃ, ὡς $ΑΕ^2$:τρίγωνον ΑΕΔ=ΜΑ:ΑΖ, καὶ διὰ τῶν Μ, Ζ πρὸς τὴν ΑΒ παράλληλοι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΖΚ, ΜΝ· ἐνῷ λοιπὸν τὸ ΛΑΔΗ εἶναι τετράπλευρον καὶ ἔχει δοθῇ κατὰ τὴν θέσιν ἡ ΛΑ, ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΛΑ παράλληλος ἡ ΓΚΒ ἀποτέμνουσα τὸ τρίγωνον ΓΚΗ ἴσον πρὸς τὸ τετράπλευρον ΛΑΔΗ, καὶ διὰ τοῦ Β πρὸς τὴν ΖΑΜ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΞΒΝ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ $ΑΕ^2$ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΕΔ=ΜΑ:ΑΖ, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΑΕ^2$:τρίγωνον ΑΕΔ=$ΓΒ^2$: τρίγωνον ΔΓΒ· διότι ἡ ΑΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΒ, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΓΕ, ΑΒ· ὡς δὲ ΜΑ:ΑΖ = παραλληλόγραμμον ΑΜΝΒ : παραλληλόγραμμον ΑΞ, ὡς ἄρα τὸ $ΓΒ^2$: ΓΔΒ τρίγωνον = ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον : ΑΖΞΒ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ δέ, ὡς $ΓΒ^2$:ΑΜΝΒ παραλλ. = ΓΔΒ τρίγ. : ΑΖΞΒ παραλλ. Εἶναι δὲ τὸ ΖΑΒΞ παραλλ. = ΓΒΔ τρίγ.· διότι, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΓΗΚ = τετράπλευρον ΑΛΗΔ, εἶναι δὲ κοινὸν τὸ τετράπλευρον ΗΔΒΚ, τὸ παραλληλόγραμμον ΛΑΒΚ = τρίγωνον ΓΔΒ· τὸ δὲ παραλλ. ΛΑΒΚ = παραλλ. ΖΑΒΞ (Εὐκλ. 1, 35)· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΑΒ, ΖΚ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΔΒ=παραλληλόγραμμον ΞΖΑΒ· ὥστε καὶ τὸ $ΓΒ^2$ = ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον. Τὸ δὲ μῳ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΓΒ τῷ ΑΜΝΒ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ ΜΑΒΝ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΑΒ· ἡ γὰρ ΜΑ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΒ. καὶ ἔστιν ἡ ΜΑ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά, ἡ δὲ ΑΒ διάμετρος, καὶ ἡ ΓΒ τεταγμένως· παράλληλος γάρ ἐστι τῇ ΑΕ· τὸ Γ ἄρα πρὸς τῇ τομῇ ἐστιν. ἡ ΔΗΓ ἄρα συμβάλλει τῇ τομῇ κατὰ τὸ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

σχόλια εἰς τὸ προτεθὲν θεώρημα

πεποιήσθω δή, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΕΔ τρίγωνον, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΖ]· τοῦτο δέδεικται ἐν σχολίῳ τοῦ ια´ θεωρήματος. ἀναγράψας γὰρ τὸ ἀπὸ ΑΕ καὶ παρὰ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τῷ ΑΕΔ τριγώνῳ ἴσον παραβαλὼν ἕξω τὸ ζητούμενον.

H242 εἰς τὸ αὐτό

τετραπλεύρου ὄντος τοῦ ΛΑΔΗ ἤχθω τῇ ΛΑ παράλληλος ἡ ΓΚΒ ἀποτέμνουσα τὸ ΓΗΚ τρίγωνον τῷ ΛΑΔΗ τετραπλεύρῳ ἴσον]· τοῦτο δὲ ποιήσομεν οὕτως· ἐὰν γάρ, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΛΑΔΗ τετραπλεύρῳ ἴσον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ ΑΕΔ τριγώνῳ ὅμοιον τὸ αὐτὸ συστησώμεθα τὸ ΣΤΥ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΣΥ τῇ ΑΔ, καὶ ἀπολάβωμεν τῇ μὲν ΣΥ ἴσην τὴν ΗΚ, τῇ δὲ ΤΥ ἴσην τὴν ΗΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΓΚ, ἔσται τὸ ζητούμενον. ἐπεὶ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Υ γωνία ἴση| ἐστὶ τῇ Δ, τουτέστι τῇ Η, διὰ τοῦτο ἴσον καὶ ὅμοιον τὸ ΓΗΚ τῷ

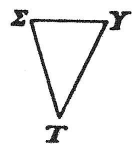
ΜΑΒΝ παραλλ. $=$ ΜΑxΑΒ· διότι ἡ ΜΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· εἶναι ἄρα τὸ ΜΑxΑΒ $=$ ΓΒ^2. Καὶ εἶναι ἡ ΜΑ παράμετρος, ἡ δὲ ΑΒ διάμετρος, καὶ ἡ ΓΒ ἔχει ἀχθῆ τεταγμένως· διότι εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ· τὸ σημεῖον Γ ἄρα εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τομῆς. Ἡ ΔΗΓ ἄρα συναντᾷ τὴν τομὴν κατὰ τὸ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σχόλια εἰς τὸ προτεθὲν θεώρημα.

Ἄς γίνῃ τώρα, ὡς τὸ ΑΕ^2:ΑΕΔ τρίγωνον $=$ ΜΑ:ΑΖ]· τοῦτο ἐδείχθη εἰς τὸ σχόλιον τοῦ 11 θεωρήματος. Διότι ἀφοῦ ἀναγράψω τὸ ΑΕ^2 καὶ παρὰ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ παραβάλω σχῆμα (ὀρθογ.) ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΕΔ θὰ ἔχω τὸ ζητούμενον.

Εἰς τὸ αὐτὸ

Ἐνῷ τὸ ΛΑΔΗ εἶναι τετράπλευρον, ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΛΑ παράλληλος ἡ ΓΚΒ ἀποτέμνουσα τὸ τρίγωνον ΓΗΚ ἴσον πρὸς τὸ τετράπλευρον ΛΑΔΗ]· τοῦτο δὲ θὰ τὸ κάμωμεν ὡς ἑξῆς· διότι, ἐάν, ὡς ἐμάθομεν εἰς τὰ στοιχεῖα, πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, τὸ τετράπλευρον ΛΑΔΗ ἴσον, καὶ ἄλλο ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ΑΕΔ τρίγωνον καὶ ὅμοιον, τὸ αὐτό, κατασκευάσωμεν τὸ ΣΤΥ, ὥστε νὰ εἶναι ὁμόλογος ἡ ΣΥ πρὸς τὴν ΑΔ, καὶ ἀπολάβωμεν (ἀποκόψωμεν) πρὸς μὲν τὴν ΣΥ$=$ΗΚ, πρὸς δὲ τὴν ΤΥ$=$ΗΓ, καὶ φέρωμεν τὴν ΓΚ, θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον. Διότι ἐπειδὴ ἡ παρὰ τὸ Υ γωνία εἶναι ἴση μὲ τὴν παρὰ τὸ Δ, τουτέστι τὴν Η, διὰ τοῦτο τὸ ΓΗΚ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΣΤΥ (Εὐκλ. 1,4).



ΣΤΥ. καὶ ἴση ἡ Γ γωνία τῇ Ε, καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΑΕ.

φανερὸν δή, ὅτι, ὅταν ἡ ΑΒ ἄξων ἐστίν, ἡ ΜΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, ὅταν δὲ μὴ ἄξων, τέμνει, εἰ πρὸς ὀρθὰς ἄγεται πάντως τῇ διαμέτρῳ.

Εἰς τὸ κη΄

Ὅτι, κἂν ἡ ΓΔ τέμνῃ τὴν ὑπερβολήν, τὰ αὐτὰ συμβήσεται, ὥσπερ ἐπὶ τοῦ ὀκτωκαιδεκάτου.

Εἰς τὸ λ΄

Καὶ ὡς ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως συνθέντι, ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν καὶ
H244 ἀναστρέψαντι] ἐπὶ μὲν οὖν τῆς ἐλλείψεως ἐροῦμεν· ἐπειδή ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ, τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ, δι᾽ ἴσου, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ, τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· συνθέντι, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ· ἡ γὰρ ΑΒ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ· οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων· ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ, τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, διότι δι᾽ ἴσου, ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ, τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ· ἀναστρέψαντι, ὡς τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, τὸ ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ· εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ

Καὶ ἡ γωνία Γ = γωνίαν Ε, καὶ εἶναι ἐναλλάξ· εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΑΕ (Εὐκλ. 1,27).

Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι, ἡ ΑΒ εἶναι ἄξων, ἡ ΜΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, ὅταν δὲ δὲν εἶναι ἄξων, τέμνει αὐτήν, ἐὰν πάντως ἄγεται καθέτως ἐπὶ τὴν διάμετρον.

Εἰς τὸ 28

Ὅτι, καὶ ἂν ἡ ΓΔ τέμνῃ τὴν ὑπερβολήν, θὰ συμβῶσι τὰ αὐτά, ὡς καὶ εἰς τὸ δέκατον ὄγδοον θεώρημα.

Εἰς τὸ 30

Καὶ ὡς ἄρα, ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 6, 18), ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 13) καὶ δι' ἀναστροφῆς] (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 16), ἐπὶ μὲν λοιπὸν τῆς ἐλλείψεως θὰ εἴπωμεν: ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ $ΑΖ x ΖΒ : ΔΖ^2 = ΑΗ x ΗΒ : ΗΕ^2$, ὡς δὲ τὸ $ΔΖ^2 : ΖΓ^2 = ΕΗ^2 : ΗΓ^2$, δι' ἴσου ἄρα (διὰ πολλ. κατὰ μέλη) εἶναι $ΑΖ x ΖΒ : ΖΓ^2 = ΑΗ x ΗΒ : ΗΓ^2$· καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 14), ὡς τὸ $ΑΖ x ΖΒ + ΖΓ^2 : ΖΓ^2$, τουτέστι $ΑΓ^2 : ΓΖ^2$ (Εὐκλ. 2,5)· διότι ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῆ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Γ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ζ· οὕτως $ΓΒ^2 : ΓΗ^2$· καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 12), ὡς τὸ $ΑΓ^2 : ΓΒ^2 = ΖΓ^2 : ΓΗ^2$. Ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων· ἐπειδὴ εἶναι $ΒΖ x ΖΑ : ΖΓ^2 = ΑΗ x ΗΒ : ΓΗ^2$, διότι διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 17), καὶ κατόπιν ἀνάπαλιν (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 13), ὡς τὸ $ΖΓ^2 : ΒΖ x ΖΑ = ΓΗ^2 : ΑΗ x ΗΒ$· καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 19), $ΖΓ^2 : ΓΑ^2 = ΗΓ^2 : ΓΒ^2$· διότι εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῆ εἰς τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται ἡ ΖΑ, καὶ τὸ ὑπὸ ΒΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΖ, ὥστε τὸ ἀπὸ ΓΖ τοῦ ὑπὸ ΒΖΑ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΑΓ, καὶ καλῶς εἴρηται τὸ ἀναστρέψαντι.

Εἰς τὸ λα΄

Διελόντι τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ]. ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ ΒΗ, τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΗ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΓΗ τοῦ ὑπὸ ΑΗΒ ὑπε-
H246 ρέχει τῷ ἀπὸ ΓΒ. διὰ δὲ τὴν αὐτὴν αἰτίαν καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τοῦ ὑπὸ ΑΘΒ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΓΒ· ὥστε ὀρθῶς εἴρηται τὸ διελόντι.

Εἰς τὸ λβ΄

Ἐν τῷ ἑπτακαιδεκάτῳ θεωρήματι ἁπλούστερον ἔδειξεν, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς παρὰ τὴν κατηγμένην τεταγμένως ἀγομένη ἐφάπτεται, ἐνταῦθα δὲ τὸ ἐν τοῖς στοιχείοις ἐπὶ τοῦ κύκλου μόνου δεδειγμένον καθολικώτερον ἐπὶ πάσης κώνου τομῆς ὑπάρχον ἐπιδείκνυσι.

δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅπερ κἀκεῖ ἐδείχθη, ὅτι καμπύλην μὲν ἴσως γραμμὴν οὐδὲν ἄτοπόν ἐστιν ἐμπίπτειν μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τῆς τομῆς, εὐθεῖαν δὲ ἀμήχανον· τεμεῖ γὰρ αὕτη τὴν τομὴν καὶ οὐκ ἐφάψεται· δύο γὰρ ἐφαπτομένας εὐθείας κατὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι ἀδύνατον.

πολυτρόπως δεδειγμένου τούτου τοῦ θεωρήματος ἐν διαφόροις ἐκδόσεσιν ἡμεῖς τὴν ἀπόδειξιν ἁπλουστέραν καὶ τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται εἰς αὐτὴν ἡ ΖΑ, καὶ τὸ $BZ \times ZA + A\Gamma^2 = \Gamma Z^2$ (Εὐκλ. 2,6), ὥστε τὸ $\Gamma Z^2 - BZ \times ZA = A\Gamma^2$, καὶ καλῶς ἐλέχθη τὸ δι᾽ ἀναστροφῆς τῶν λόγων.

Εἰς τὸ 31

Διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (διελόντι, Εὐκλ. 5 ὁρισ. 15), τὸ $\Gamma B^2 : AH \times HB > \Gamma B^2 : A\Theta \times \Theta B$]. Διότι ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἔχει τμηθῆ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται εἰς αὐτὴν ἡ ΒΗ, τὸ $AH \times HB + \Gamma B^2 = \Gamma H^2$ (Εὐκλ. 2,6)· ὥστε τὸ $\Gamma H^2 - AH \times HB = \Gamma B^2$. Διὰ τὴν αὐτὴν δὲ αἰτίαν εἶναι καὶ $\Gamma\Theta^2 - A\Theta \times \Theta B = \Gamma B^2$· ὥστε ὀρθῶς ἐλέχθη ἡ διαίρεσις τῶν λόγων.

Εἰς τὸ 32

Εἰς τὸ 17 θεώρημα ἔδειξεν ἁπλούστερον, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς παραλλήλως πρὸς τὴν κατηγμένην, ἀγομένη τεταγμένως ἐφάπτεται, ἐδῶ δὲ τὸ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἀποδεδειγμένον μόνον ἐπὶ τοῦ κύκλου, τὸ ἀπέδειξε γενικώτερον, ὅτι ὑπάρχει εἰς πᾶσαν τομὴν κώνου.

Πρέπει ὅμως νὰ παρατηρηθῇ, ὅ,τι καὶ ἐκεῖ ἐδείχθη, ὅτι ἴσως δὲν εἶναι ἄτοπον νὰ ἐμπίπτῃ καμπύλη γραμμὴ μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τῆς τομῆς, ὄχι ὅμως καὶ εὐθεῖα γραμμή· διότι αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν τομὴν καὶ δὲν θὰ ἐφάπτηται· διότι εἶναι ἀδύνατον δύο ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι νὰ ἐφάπτωνται τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἐνῷ δὲ τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ εἰς διαφόρους ἐκδόσεις κατὰ πολλοὺς τρόπους ἡμεῖς ἐκάμαμεν τὴν ἀπόδειξιν σαφεστέραν ἐποιήσαμεν.

Εἰς τὸ λδʹ

Δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ ΓΔ κατηγμένη ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὰς ΔΒ, ΔΑ ὁρίζουσα τὴν ΒΑ καταλιμπάνει ὀφείλουσαν τμηθῆναι εἰς τὸν τῶν ΒΔΑ λόγον, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἀνάπαλιν τὴν ΒΑ τέμνουσα εἰς ὡρισμένον λόγον τὸν τῶν ΒΔΑ ἐπιζητεῖν ἡμᾶς ποιεῖ τὸν τῶν ΒΕ, ΕΑ· οὐδὲν γὰρ δυσχερὲς λόγου δοθέντος ἴσον αὐτῷ πορίσασθαι.

H248 δεῖ μέντοι εἰδέναι, ὅτι καθ᾽ ἑκάστην τομὴν καταγραφαί εἰσι δύο τοῦ Ζ σημείου ἢ ἐσωτέρω τοῦ Γ λαμβανομένου ἢ ἐξωτέρω· ὥστε εἶναι τὰς πάσας πτώσεις ἕξ.

χρῆται δὲ καὶ δύο λήμμασιν, ἅπερ ἑξῆς γράψομεν.

μεῖζον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΝΞ τοῦ ὑπὸ ΑΟΞ· ἡ ΝΟ ἄρα πρὸς ΞΟ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ]· ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΝ, ΝΞ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΟ, ΟΞ, γινέσθω τῷ ὑπὸ ΑΝ, ΝΞ ἴσον τὸ ὑπὸ τῆς ΑΟ καὶ ἄλλης τινὸς τῆς ΞΠ, ἥτις μείζων ἔσται τῆς ΞΟ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΠ. ἡ δὲ ΝΞ πρὸς ΞΟ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΞΠ· καὶ ἡ ΟΑ ἄρα πρὸς ΑΝ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ.

φανερὸν δὴ καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ὅτι, κἂν ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ, τὸ ὑπὸ ΞΝ, ΝΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΟ, ΟΞ.

γινέσθω γάρ, ὡς ἡ ΑΟ πρὸς ΑΝ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς μείζονα δηλονότι τῆς ΞΟ ὡς τὴν ΞΠ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΞΝ, ΝΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΟ, ΞΠ· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ ΞΝ, ἁπλουστέραν καὶ σαφεστέραν.

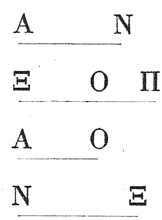
Εἰς τὸ 34

Πρέπει νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι ἡ κατηγμένη ἐπὶ τὴν διάμετρον ΓΔ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ὁρίζουσα τὰς ΔΒ, ΔΑ, ἀφίνει τὴν ΒΑ, ὀφείλουσαν νὰ τμηθῇ εἰς τὸν λόγον $B\Delta:\Delta A$, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἀντίθετα, τέμνουσα τὴν ΒΑ εἰς ὡρισμένον λόγον $B\Delta:\Delta A$, μᾶς κάμνει νὰ ἐπιζητήσωμεν τὸν λόγον $BE:EA$· διότι δὲν εἶναι δύσκολον, ὅταν δοθῇ λόγος νὰ εὕρωμεν ἴσον πρὸς αὐτόν.

Πρέπει λοιπὸν νὰ γνωρίζωμεν, ὅτι εἰς ἑκάστην τομὴν ὑπάρχουσι δύο καταγραφαὶ τοῦ σημείου Ζ ἤ, ὅταν ληφθῇ ἐντὸς τοῦ Γ ἢ ἐκτὸς τούτου· ὥστε ὅλαι αἱ περιπτώσεις εἶναι ἕξ.

Χρησιμοποιεῖ δὲ καὶ δύο λήμματα, τὰ ὁποῖα θὰ γράψωμεν κατωτέρω.

Εἶναι ἄρα τὸ $AN \times N\Xi > AO \times O\Xi$· εἶναι ἄρα $NO:\Xi O > OA:AN$]· διότι, ἐπειδὴ τὸ $AN \times N\Xi > AO \times O\Xi$, ἄς γίνῃ $AN \times N\Xi = AO \times \Xi\Pi$, ὅπου $\Xi\Pi > \Xi O$· εἶναι ἄρα, ὡς $AO:AN = N\Xi:\Xi\Pi$. Εἶναι δὲ $N\Xi:\Xi O > N\Xi:\Xi\Pi$ (Εὐκλ. 5,8)· εἶναι ἄρα καὶ $OA : AN < N\Xi : \Xi O$.



Εἶναι δὲ φανερὸν καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι, καὶ ἂν $N\Xi : \Xi O > OA : AN$, εἶναι $\Xi N \times NA > AO \times O\Xi$.

Διότι ἄς γίνῃ, ὡς $OA : AN = N\Xi : \Xi\Pi$, ὅπου $\Xi\Pi > \Xi O$ (Εὐκλ. 5, 8)· εἶναι ἄρα $\Xi N \times NA = AO \times \Xi\Pi$·

ΝΑ τοῦ ὑπὸ ΑΟ, ΟΞ.

εἰς τὸ αὐτὸ

ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΒΚ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ]· ἐπεὶ οὖν διὰ H250 τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΑΝ, ΕΓ, ΚΒ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΝ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΕΓ πρὸς ΚΒ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΒ, δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΑΝ πρὸς ΚΒ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝ, ΚΒ, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ, τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝ, ΚΒ, τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ.

Εἰς τὸ λζ'

Διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων φανερόν, ὅπως ἐστὶ δυνατὸν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν.

Εἰς τὸ λη'

Ἔν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπὶ μόνης τῆς ὑπερβολῆς εὑρίσκεται δεδειγμένον, καθολικῶς δὲ ἐνταῦθα δέδεικται· τὰ γὰρ αὐτὰ συμβαίνει καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τομῶν. καὶ τῷ Ἀπολλωνίῳ δὲ δοκεῖ μὴ μόνον τὴν ὑπερβολήν, ἀλλὰ καὶ τὴν ἔλλειψιν ἔχειν δευτέραν διάμετρον, ὡς πολλάκις αὐτοῦ ἠκούσαμεν ἐν τοῖς προλαβοῦσιν.

ὥστε εἶναι $\Xi N \times NA > AO \times O\Xi$.

Εἰς τὸ αὐτὸ

Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $BK \times AN : \Gamma E^2 = B\Delta \times \Delta A : E\Delta^2$]· ἐπειδὴ λοιπόν, διότι εἶναι παράλληλοι αἱ AN, ΕΓ, KB, εἶναι $AN : E\Gamma = A\Delta : \Delta E$, ὡς δὲ $E\Gamma : KB = E\Delta : \Delta B$ (Εὐκλ. 1, 29 · 6, 4), δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη, Εὐκλ. 5 ορισ. 17) εἶναι ὡς $AN : KB = A\Delta : \Delta B$· καὶ ὡς ἄρα $AN^2 : AN \times KB = A\Delta^2 : A\Delta \times \Delta B$. Ὡς δὲ $E\Gamma^2 : AN^2 = E\Delta^2 : \Delta A^2$· δι' ἴσου ἄρα εἶναι $E\Gamma^2 : AN \times KB = E\Delta^2 : A\Delta \times \Delta B$· καὶ ἀνάπαλιν (ἀντιστροφὴ τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας, Εὐκλ. 5 ορισ. 13) εἶναι $KB \times AN : E\Gamma^2 = B\Delta \times \Delta A : E\Delta^2$.

Εἰς τὸ 37

Διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατὸν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην.

Εἰς τὸ 38

Εἰς μερικὰ χειρόγραφα (ἀντίγραφα) τὸ θεώρημα τοῦτο εὑρίσκεται ἀποδεδειγμένον ἐπὶ μόνης τῆς ὑπερβολῆς, γενικῶς δὲ ἀποδεικνύεται ἐδῶ· διότι τὰ αὐτὰ συμβαίνουσι καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τομῶν. Καὶ ὁ Ἀπολλώνιος δὲ νομίζει, ὅτι ὄχι μόνον ἡ ὑπερβολή, ἀλλὰ καὶ ἡ ἔλλειψις ἔχει δευτέραν διάμετρον, ὅπως πολλὰς φορὰς εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα.

καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως πτῶσιν οὐκ ἔχει, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς τρεῖς· τὸ γὰρ Ζ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ H252 ἐφαπτομένη τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, ἢ κατωτέρω τοῦ Δ ἐστὶν ἢ ἐπὶ τοῦ Δ ἢ ἀνωτέρω τοῦ Δ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ Θ ὁμοίως αὐτῷ τρεῖς ἕξει τόπους, καὶ προσεκτέον, ὅτι, εἴτε κατωτέρω πέσῃ τὸ Ζ τοῦ Δ, καὶ τὸ Θ τοῦ Γ ἔσται κατωτέρω, εἴτε τὸ Ζ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ τὸ Θ ἐπὶ τὸ Γ, εἴτε ἀνωτέρω τὸ Ζ τοῦ Δ, καὶ τὸ Θ τοῦ Γ ἔσται ἀνωτέρω.

Εἰς τὸ μα'

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς πτῶσιν οὐκ ἔχει, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, ἐὰν ἡ καταγομένη ἐπὶ τὸ κέντρον πίπτῃ, τὰ δὲ λοιπὰ γένηται τὰ αὐτά, τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἶδος ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει.

ἔστω γὰρ ἔλλειψις, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον τὸ Δ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπό τε τῆς ΓΔ καὶ τῆς ΑΔ εἴδη ἰσογώνια τὰ ΑΖ, ΔΗ, ἐχέτω δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν.

λέγω, ὅτι τὸ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΗ.

ἐπεὶ γὰρ ἐν τῷ ῥητῷ δέδεικται, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ΔΗ, φημί, ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ, οὕτως τὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΔΗ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ ΑΔΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΑΖ τῷ ΔΗ.

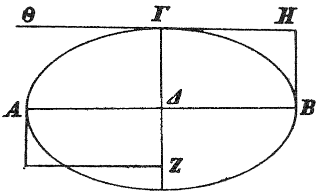
Εἰς τὸ μβ'

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει πτώσεις ια, μίαν μέν, εἰ ἐσωτέρω

Καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως δὲν ὑπάρχει περίπτωσις, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς ὑπάρχουσι τρεῖς· διότι τὸ σημεῖον Ζ, εἰς τὸ ὁποῖον συναντᾷ ἡ ἐφαπτομένη τὴν δευτέραν διάμετρον, ἢ εἶναι κάτω τοῦ Δ ἢ ἐπὶ τοῦ Δ ἢ ἄνω τοῦ Δ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ Θ ὁμοίως πρὸς αὐτὸ θὰ ἔχῃ τρεῖς τόπους, καὶ δέον νὰ προσέξωμεν ὅτι, εἴτε κάτω τοῦ Δ πέσῃ τὸ Ζ, καὶ τὸ Θ θὰ πέσῃ κάτω τοῦ Γ, εἴτε ἐπὶ τοῦ Δ πέσῃ τὸ Ζ, καὶ τὸ Θ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, εἴτε ἄνω τοῦ Δ πέσῃ τὸ Ζ, καὶ τὸ Θ θὰ πέσῃ ἄνω τοῦ Γ.

Εἰς τὸ 41

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς δὲν ἔχει περίπτωσιν ἄλλην, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, ἐὰν ἡ καταγομένη πίπτῃ εἰς τὸ κέντρον, τὰ δὲ λοιπὰ γίνωσι τὰ αὐτά, τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἶδος (σχῆμα) θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σχῆμα τῆς ἀκτῖνος.



Διότι ἔστω ἔλλειψις, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Δ, καὶ ἃς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ ἃς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῆς ΑΔ ἰσογώνια σχήματα τὰ ΑΖ, ΔΗ, ἃς εἶναι δὲ ΔΓ:ΓΗ = (ΑΔ:ΔΖ) x (παράμετρος : πλάγιος ἄξων).

Λέγω, ὅτι τὸ ΑΖ = ΔΗ.

Διότι ἐπειδὴ εἰς τὸ λεχθὲν (θ. τοῦ Ἀπολλωνίου 41) ἀπεδείχθη, ὡς $ΑΔ^2$:ΑΖ = ΑΔxΔΒ:ΔΗ, λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ εἶναι $ΑΔ^2$:ΑΔxΔΒ = ΑΖ:ΔΗ. Εἶναι δὲ $ΑΔ^2$ = ΑΔxΔΒ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΑΖ = ΔΗ.

Εἰς τὸ 42

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει 11 περιπτώσεις, μίαν μέν, ἐὰν τὸ

H254 λαμβάνοιτο τὸ Δ τοῦ Γ· δῆλον γάρ, ὅτι καὶ αἱ παράλληλοι ἐσωτέρω πεσοῦνται τῶν ΑΓΘ. ἑτέρας δὲ πέντε οὕτως· ἐὰν τὸ Δ ἐξωτέρω ληφθῇ τοῦ Γ, ἡ μὲν ΔΖ παράλληλος δηλονότι ἐξωτέρω πεσεῖται τῆς ΘΓ, ἡ δὲ ΔΕ ἢ μεταξὺ τῶν Α, Β ἢ ἐπὶ τὸ Β ἢ μεταξὺ τῶν Β, Θ ἢ ἐπὶ τὸ Θ ἢ ἐξωτέρω τοῦ Θ· τοῦ γὰρ Α ἐξωτέρω πεσεῖν αὐτὴν ἀδύνατον, ἐπειδὴ τὸ Δ ἐξωτέρω ἐστὶ τοῦ Γ καὶ δηλονότι καὶ ἡ δι᾽ αὐτοῦ παράλληλος ἀγομένη τῇ ΑΓ. ἐὰν δὲ τὸ Δ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ληφθῇ τῆς τομῆς, ἢ ἀμφότεραι αἱ παράλληλοι μεταξὺ τῶν Θ, Β περατωθήσονται, ἢ ἡ μὲν ΔΖ ἐσωτέρω τοῦ Θ, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Θ, ἢ τῆς ΔΖ ὡσαύτως μενούσης τὸ Ε ἐξωτέρω τοῦ Θ ἐλεύσεται· τοῦ δὲ Ε πάλιν ἐξωτέρω πίπτοντος τὸ Ζ ἢ ἐπὶ τὸ Θ πεσεῖται, ὡς εἶναι τὴν ΓΘΔ μίαν εὐθεῖαν, εἰ καὶ μὴ σῴζεται κυρίως τότε τὸ τῆς παραλλήλου ἰδίωμα, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Θ. δεῖ δὲ ἐπὶ τῆς ἀποδείξεως τῶν τελευταίων πέντε πτώσεων τὴν ΔΖ ἐκβάλλειν ἕως τῆς τομῆς καὶ τῆς ΗΓ παραλλήλου καὶ οὕτως ποιεῖσθαι τὴν ἀπόδειξιν.

δυνατὸν δὲ καὶ ἄλλην μίαν καταγραφὴν ἐπινοεῖν ἐκ τούτων, ὅταν δὴ λαμβανομένου ἑτέρου σημείου αἱ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖαι ποιῶσι τὸ λεγόμενον, ἀλλὰ τοῦτο θεώρημα μᾶλλόν ἐστιν ἢ πτῶσις.

Εἰς τὸ μγ´

Ἔν τισι φέρεται ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου τοιαύτη·

H256 ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΓΔ τῷ ἀπὸ ΓΒ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΒ, ἡ ΓΒ πρὸς ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς

Δ ἐλαμβάνετο ἐσωτερικῶς τοῦ Γ· διότι εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ αἱ παράλληλοι θὰ πέσουν ἐσωτερικῶς τῶν ΑΓ, ΓΘ. Ἄλλας δὲ πέντε περιπτώσεις τὰς ἑξῆς· ἐὰν τὸ Δ ληφθῇ ἔξω τοῦ Γ, ἡ μὲν παράλληλος ΔΖ θὰ πέσῃ ἔξω τῆς ΘΓ, ἡ δὲ ΔΕ ἢ μεταξὺ τῶν Α, Β ἢ ἐπὶ τὸ Β ἢ μεταξὺ τῶν Β, Θ ἢ ἐπὶ τὸ Θ ἢ ἔξω τοῦ Θ· διότι εἶναι ἀδύνατον νὰ πέσῃ αὕτη ἔξω τοῦ Α, ἐπειδὴ τὸ Δ εἶναι ἔξω τοῦ Γ καὶ φανερὸν εἶναι, ὅτι καὶ ἡ δι' αὐτοῦ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ (εἶναι ἔξω τοῦ Γ). Ἐὰν δὲ τὸ Δ ληφθῇ εἰς τὰ ἄλλα μέρη τῆς τομῆς, ἢ καὶ αἱ δύο παράλληλοι θὰ περατοῦνται μεταξὺ τῶν Θ, Β, ἢ ἡ μὲν ΔΖ ἐσωτερικῶς τοῦ Θ, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Θ, ἢ ἐὰν ἡ ΔΖ μένῃ, τὸ Ε θὰ ἔλθῃ ἔξω τοῦ Θ· ἐὰν δὲ τὸ Ε πίπτῃ ἔξω, τὸ Ζ ἢ θὰ πέσῃ εἰς τὸ Θ, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΘΔ, καίτοι τότε δὲν σῴζεται κυρίως ἡ ἰδιότης τῆς παραλλήλου, ἢ ἔξω τοῦ Θ. Πρέπει δὲ κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν τελευταίων πέντε περιπτώσεων νὰ ἐκβληθῇ ἡ ΔΖ μέχρι τῆς τομῆς καὶ τῆς παραλλήλου ΗΓ καὶ οὕτω νὰ γίνῃ ἡ ἀπόδειξις.

Εἶναι δὲ δυνατὸν καὶ ἄλλο σχῆμα νὰ ἐπινοηθῇ ἐκ τούτων, ὅταν δηλ. ἐνῷ ληφθῇ ἄλλο σημεῖον, αἱ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖαι νὰ πληρῶσι τὴν συνθήκην, ἀλλὰ τοῦτο εἶναι μᾶλλον θεώρημα παρὰ περίπτωσις.

Εἰς τὸ 43

Εἰς μερικὰ χειρόγραφα ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι ὡς ἑξῆς·

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΖΓxΓΔ = ΓΒ², εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΖΓ:ΓΒ = ΓΒ:ΓΔ (Εὐκλ. 6, 17)· καὶ ὡς ἄρα τὸ σχῆμα ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς

τὴν ΓΔ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ΕΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΓΒ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ, τὸ ΕΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΓΔ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΛΓ τρίγωνον, τὸ ΕΓΖ πρὸς τὸ ΕΓΔ τρίγωνον. ἴσον ἄρα τὸ ΕΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΓΛ. καὶ ὡς ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἀναστρέψαντι, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἀνάπαλιν καὶ διελόντι, [ὡς] τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον, οὕτως τὸ ΕΓΖ πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον· ἴσον ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΕΛΒΖ τετραπλεύρῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ΕΓΖ πρὸς τὸ ΛΓΒ τρίγωνον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς διελόντι, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΒΛΓ τρίγωνον. ὁμοίως δὲ καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ, οὕτως τὸ ΛΓΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΛΒΚ τετράπλευρον· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ, τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΛΒΚΜ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ, τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ΗΘΚ, τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΜΛΒΚ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ΕΛΒΖ, οὕτως τὸ ΗΘΚ πρὸς
H258 *τὸ ΜΛΒΚ. ἴσον δὲ τὸ ΕΔΖ τῷ ΕΛΒΖ ἐδείχθη· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘΚ τῷ ΜΛΒΚ τετραπλεύρῳ. τὸ ἄρα ΜΓΚ τρίγωνον τοῦ ΗΘΚ διαφέρει τῷ ΛΒΓ.*

ἐπιστῆσαι δεῖ ταύτῃ τῇ δείξει· ὀλίγην γὰρ ἀσάφειαν ἔχει ἐν ταῖς ἀναλογίαις τῆς ἐλλείψεως· ἵνα τὰ διὰ τὴν συντομίαν τοῦ ῥητοῦ ὁμοῦ λεγόμενα διῃρημένως ποιήσωμεν, τὸ σχῆμα ἀπὸ τῆς ΓΒ=ΖΓ:ΓΔ (Εὐκλ. 6, 19, πόρισ.). Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΖΓ^2:ΓΒ^2$= τρίγωνον ΕΖΓ: τρίγωνον ΛΓΒ, ὡς δὲ ΖΓ:ΓΔ= τρίγωνον ΕΖΓ: τρίγωνον ΕΓΔ (Εὐκλ. 6,1)· ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΓΖ: τρίγωνον ΒΛΓ= τρίγωνον ΕΓΖ: τρίγωνον ΕΓΔ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΓΔ= τρίγ. ΒΓΛ (Εὐκλ. 5,9). Καὶ ὡς ἄρα, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5, 19).

Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἀνάπαλιν καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5 ὁρισμ. 13 καὶ 5 ὁρισ. 15), τρίγ. ΕΖΓ: τετραπλ. ΕΛΒΖ= τρίγ. ΕΓΖ : τρίγ. ΕΔΖ· εἶναι ἄρα τὸ τρίγ. ΕΔΖ= τετράπλ. ΕΛΒΖ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς $ΓΖ^2:ΓΒ^2$=τρίγ. ΕΓΖ: τρίγ. ΛΓΒ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 15), ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἀνάπαλιν καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5 ὁρισμ. 13 καὶ ὁρισ. 19) εἶναι τὸ $ΑΖ\text{x}ΖΒ:ΒΓ^2$= τετράπλ. ΕΛΒΖ : τρίγ. ΒΛΓ. Ὁμοίως δὲ καί, ὡς $ΓΒ^2:ΑΚ\text{x}ΚΒ$=τρίγ. ΛΓΒ : τετράπλ. ΜΛΒΚ· διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἄρα κατὰ μέλη εἶναι ΑΖxΖΒ:ΑΚxΚΒ =τετράπλ. ΕΛΒΖ: τετράπλ. ΛΒΚΜ. Ὡς δὲ τὸ $ΑΖ\text{x}ΖΒ:ΑΚ\text{x}ΚΒ=ΕΖ^2:ΗΚ^2$, ὡς δὲ $ΕΖ^2:ΗΚ^2$=τρίγ. ΕΔΖ:τρίγ. ΗΘΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ: ΗΘΚ = ΕΛΒΖ:ΜΛΒΚ. Καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 12), ὡς τὸ ΕΔΖ:ΕΛΒΖ=ΗΘΚ:ΜΛΒΚ. Ἐδείχθη δὲ τὸ ΕΔΖ=ΕΛΒΖ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΗΘΚ=ΜΛΒΚ τετράπλ. Τὸ τρίγ. ἄρα ΜΓΚ — ΛΒΓ=ΗΘΚ.

Πρέπει δὲ νὰ προσέξωμεν αὐτὴν τὴν ἀπόδειξιν· διότι ἔχει ὀλίγην ἀσάφειαν εἰς τὰς ἀναλογίας τῆς ἐλλείψεως· διὰ νὰ διαχωρίσωμεν δὲ εἰς τὰ εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Ἀπολλωνίου ἕνεκα *οἷον —φησὶ γάρ· ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΓ, ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι καὶ ἀνάπαλιν— ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ, τὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΕΖΓ· ἀναστρέψαντι, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ, τουτέστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ διὰ τὸ διχοτομίαν εἶναι τὸ Γ τῆς ΑΒ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΖΕ τετράπλευρον· ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, τὸ ΕΑΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον.*

ἔχει δὲ πτώσεις ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ια, ὅσας εἶχε καὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, καὶ ἄλλην μίαν, ὅταν τὸ ἐπὶ τοῦ Η λαμβανόμενον σημεῖον ταὐτὸν ᾖ τῷ Ε· τότε γὰρ συμβαίνει τὸ ΕΔΖ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΑΒΓ ἴσον εἶναι τῷ ΓΕΖ· δέδεικται μὲν γὰρ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΒΖΕ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΒΖΕ τοῦ ΓΖΕ τριγώνου διαφέρει τῷ ΑΒΓ. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἢ ταὐτόν ἐστι τὸ Η τῷ Ε ἢ ἐσωτέρω λαμβάνεται τοῦ Ε· καὶ δῆλον, ὅτι ἀμφότεραι
H260 *αἱ παράλληλοι μεταξὺ πεσοῦνται τῶν Δ, Ζ, ὡς ἔχει ἐν τῷ ῥητῷ. εἰ δὲ ἐξωτέρω ληφθῇ τὸ Η τοῦ Ε, καὶ ἡ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ παράλληλος μεταξὺ πέσῃ τῶν Ζ, Γ, τὸ Θ σημεῖον ποιεῖ πτώσεις πέντε· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Δ, Β πίπτει ἢ ἐπὶ τὸ Β ἢ μεταξὺ τῶν Β, Ζ ἢ ἐπὶ τὸ Ζ ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ. ἐὰν δὲ ἡ διὰ τοῦ Η τῇ κατηγμένῃ παράλληλος ἐπὶ τὸ Γ κέντρον πίπτῃ, τὸ Θ πάλιν σημεῖον ποιήσει ἄλλας πέντε πτώσεις ὡσαύτως· καὶ δεῖ ἐπὶ τούτῳ σημειώσασθαι, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ταῖς ΕΔ, ΕΖ γιγνόμενον τρίγωνον ἴσον γίνεται τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ· ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ, τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ· ὅμοια γάρ· ὡς*

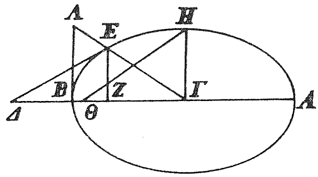
συντομίας λεγόμενα, ὅπως — διότι λέγει· ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ $ΖΓ^2$:$ΓΒ^2$ = τρίγ. ΕΓΖ: τρίγ. ΛΒΓ, ἀνάπαλιν καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων καὶ πάλιν ἀνάπαλιν (Εὐκλ. 5 ορισ. 13 καὶ ορισ. 16) — ὡς τὸ $ΒΓ^2$:$ΖΓ^2$ = ΛΒΓ:ΕΖΓ· καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων, ὡς τὸ $ΒΓ^2$:ΑΖxΖΒ, τουτέστιν ἡ διαφορὰ $ΓΒ^2 — ΓΖ^2$ (Εὐκλ. 2, 5), διότι τὸ Γ εἶναι διχοτομία τῆς ΑΒ = τρίγ. ΛΒΓ: τετράπλ. ΛΒΖΕ· ἀνάπαλιν δέ, ὡς ΑΖxΖΒ:$ΒΓ^2$ = τετράπλ. ΕΛΒΖ:τρίγ. ΛΒΓ.

Ἔχει δὲ περιπτώσεις εἰς μὲν τὴν ὑπερβολὴν 11, ὅσας εἶχε καὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ θεώρημα ἐπὶ τῆς παραβολῆς, καὶ ἄλλην μίαν, ὅταν τὸ ἐπὶ τοῦ Η λαμβανόμενον σημεῖον εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸ τὸ Ε· διότι τότε συμβαίνει τὸ τρίγ. ΕΔΖ + τρίγ. ΛΒΓ = ΓΕΖ· διότι ἀπεδείχθη μὲν τὸ τρίγ. ΕΔΖ = τετράπλ. ΛΒΖΕ, εἶναι δὲ ΛΒΖΕ = ΛΒΓ—ΓΖΕ. Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἢ συμπίπτει τὸ Η μὲ τὸ Ε ἢ λαμβάνεται ἐσωτερικῶς τοῦ Ε· καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ αἱ δύο παράλληλοι θὰ πέσωσι μεταξὺ τῶν Δ, Ζ, ὡς ἔχει εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Ἀπολλωνίου. Ἐὰν δὲ τὸ Η ληφθῇ ἔξω τοῦ Ε, καὶ ἡ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ πέσῃ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ, τὸ σημεῖον Θ κάμνει πέντε περιπτώσεις· διότι τοῦτο πίπτει ἢ μεταξὺ τῶν Δ,Β ἢ εἰς τὸ Β ἢ μεταξὺ τῶν Β,Ζ ἢ εἰς τὸ Ζ ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ. Ἐὰν δὲ ἡ διὰ τοῦ Η παράλληλος πρὸς τὴν κατηγμένην πίπτει εἰς τὸ κέντρον Γ, τὸ σημεῖον Θ θὰ κάμῃ ἐπίσης ἄλλας πέντε περιπτώσεις· καὶ ἐπὶ τούτου πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τὰς ΕΔ, ΕΖ γινόμενον τρίγωνον γίνεται ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΒΓ· διότι, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ $ΕΖ^2$:$ΗΓ^2$ = τρίγ. ΕΔΖ:τρίγ. ΗΘΓ (Εὐκλ. 6, 19)·

δὲ τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ, τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΓ, ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ, τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως ἐδείχθη ἔχον τὸ ΛΒΖΕ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΛΒΓ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ, τὸ ΛΒΖΕ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΛΒΓ τρίγωνον. καὶ ἐναλλάξ. καὶ ἄλλως δὲ ταύτας δυνατὸν δεῖξαι λέγοντας, ὅτι ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν παραλληλογράμμων ταῦτα δέδεικται ἐν τῷ σχολίῳ τοῦ μα΄ θεωρήματος.

ἐὰν δὲ ἡ διὰ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἀγομένη μεταξὺ πέσῃ τῶν Γ, Α, ἐκβληθήσεται μέν, ἕως ὅτε ἡ ΓΕ αὐτῇ
H262 συμπέσῃ, τὸ δὲ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις ζ̅· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Β, Δ ἢ ἐπὶ τὸ Β πίπτει ἢ μεταξὺ τῶν Β, Ζ ἢ ἐπὶ τὸ Ζ ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ ἢ ἐπὶ τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α· καὶ ἐπὶ τούτων τῶν πτώσεων συμβαίνει τὴν διαφορὰν τῶν ΛΒΓ, ΗΘΚ τριγώνων κατωτέρω συνίστασθαι τῆς ΑΒ εὐθείας ὑπὸ τῆς ΛΓ ἐκβαλλομένης.

ἐὰν δὲ τὸ Η ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ληφθῇ τῆς τομῆς, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος μεταξὺ πίπτῃ τῶν Β, Ζ, ἐκβληθήσεται μὲν διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ἕως οὗ τέμῃ τὴν ΛΓ, τὸ δὲ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις ζ̅ ἢ μεταξὺ ὂν τῶν Β, Ζ ἢ ἐπὶ τὸ Ζ πῖπτον ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ ἢ ἐπὶ τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α ἢ ἐπὶ τὸ Α ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἐπὶ τὸ Ζ πίπτῃ, ὥστε μίαν εὐθεῖαν εἶναι τὴν ΕΖΗ, τὸ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις ε̅· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ πεσεῖται ἢ ἐπὶ τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α ἢ ἐπὶ τὸ Α ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ μεταξὺ πίπτῃ διότι εἶναι ὅμοια· ὡς δὲ τὸ $EZ^2:H\Gamma^2 = BZ \times ZA : B\Gamma \times \Gamma A = BZ \times ZA : B\Gamma^2$, ὡς ἄρα τὸ τρίγ. ΕΔΖ : τρίγ. $H\Theta\Gamma = BZ \times ZA : B\Gamma^2$. Ὡς δὲ τὸ $BZ \times ZA : B\Gamma^2$ ἐδείχθη = τετράπλ. ΛΒΖΕ : τρίγ. ΛΒΓ· καὶ ὡς ἄρα τρίγ. ΕΔΖ : τρίγ. ΗΘΓ = τετράπλ. ΛΒΖΕ : τρίγ. ΛΒΓ. Καὶ ἐναλλάξ. Εἶναι δὲ δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ τοῦτο καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, λέγοντες ὅτι διὰ τὰ διπλάσια αὐτῶν παραλληλόγραμμα ἀπεδείχθη εἰς τὸ σχόλιον τοῦ 41 θεωρήματος.



Ἐὰν δὲ ἡ ἀγομένη διὰ τοῦ Η παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ πέσῃ μεταξὺ τῶν Γ, Α, θὰ ἐκβληθῇ μὲν μέχρις ὅτου ἡ ΓΕ συναντήσῃ αὐτήν, τὸ δὲ σημεῖον Θ θὰ κάμῃ περιπτώσεις 7· διότι πίπτει ἢ μεταξὺ τῶν Β, Δ ἢ εἰς τὸ Β ἢ μεταξὺ τῶν Β, Ζ ἢ εἰς τὸ Ζ ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ ἢ εἰς τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α· καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς συμβαίνει, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τριγώνων ΛΒΓ, ΗΘΚ νὰ γίνεται κατωτέρω τῆς εὐθείας ΑΒ ὑπὸ τῆς ΛΓ ἐκβαλλομένης.

Ἐὰν δὲ τὸ Η ληφθῇ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὴν ΕΖ παράλληλος πίπτῃ μεταξὺ τῶν Β,Ζ, θὰ ἐκβληθῇ μὲν διὰ τὴν ἀπόδειξιν μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν ΛΓ, τὸ δὲ σημεῖον Θ θὰ κάμῃ περιπτώσεις 7 ἢ εὑρισκόμενον μεταξὺ τῶν Β, Ζ ἢ πῖπτον εἰς τὸ Ζ ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ ἢ εἰς τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α ἢ εἰς τὸ Α ἢ ἔξω τοῦ Α. Ἐὰν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Η παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ πίπτῃ εἰς τὸ Ζ, ὥστε νὰ εἶναι μία εὐθεῖα ἡ ΕΖΗ, τὸ σημεῖον Θ νὰ κάμῃ 5 περιπτώσεις· διότι ἢ θὰ πέσῃ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ ἢ εἰς τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α ἢ εἰς τὸ Α ἢ ἔξω τοῦ Α. Ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ πίπτῃ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ, τὸ Θ θὰ κάμῃ τῶν Ζ, Γ, τὸ Θ ποιήσει πτώσεις ε̅· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ πεσεῖται ἢ ἐπὶ τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α ἢ ἐπὶ τὸ Α ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ ἐπὶ τὸ Γ κέντρον πίπτῃ, τὸ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις τρεῖς ἢ μεταξὺ πῖπτον τῶν Γ, Α ἢ ἐπὶ τὸ Α ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α· καὶ ἐπὶ τούτων τῶν πτώσεων συμβήσεται πάλιν τὸ ΗΘΚ τρίγωνον ἴσον γίνεσθαι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ μεταξὺ πίπτῃ τῶν Γ, Α, τὸ Θ σημεῖον ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α πεσεῖται ἢ ἐπὶ τὸ Α ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α.

συμβαίνει οὖν ἐπί τινος ἐλλείψεως τὰς πάσας πτώσεις
H264 εἶναι μ̅β̅ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου δὲ περιφερείας τοσαύτας, ὡς εἶναι τὰς πάσας πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος ϙ̅ϛ̅.

Εἰς τὸ μδʹ

Ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΖΑ, ΒΕ, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΓΕ καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΔΕ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΖΗ τῇ ΕΔ]· ἐπεὶ γὰρ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΖ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΖΗ καὶ κατηγμένη ἡ ΖΟ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΟΓΗ τῷ ἀπὸ ΓΑ διὰ τὸ λζʹ θεώρημα· ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ὑπὸ ΞΓΔ τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐστιν ἴσον. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΟΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΞΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΟΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΓΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τῷ ἀπὸ ΓΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΟΓΗ τῷ ὑπὸ ΞΓΔ. καὶ ἔστιν ἡ ΟΓ τῇ ΓΞ ἴση· καὶ ἡ ΗΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΓΕ διὰ τὸ λʹ· αἱ ἄρα ΖΓΗ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ΕΓΔ. καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι τὰς πρὸς τῷ Γ· κατὰ κορυφὴν γάρ. ὥστε καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση

5 περιπτώσεις· διότι ἢ θὰ πέσῃ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ ἢ εἰς τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α ἢ εἰς τὸ Α ἢ ἔξω τοῦ Α. Ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ πίπτῃ εἰς τὸ κέντρον Γ, τὸ σημεῖον Θ θὰ κάμῃ περιπτώσεις τρεῖς, πίπτον μεταξὺ τῶν Γ, Α ἢ εἰς τὸ Α ἢ ἔξω τοῦ Α· καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς θὰ συμβῇ πάλιν, ὥστε τὸ τρίγωνον ΗΘΚ νὰ γίνηται ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΒΓ. Ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ πίπτῃ μεταξὺ τῶν Γ, Α, τὸ σημεῖον Θ θὰ πέσῃ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α ἢ εἰς τὸ Α ἢ ἔξω τοῦ Α.

Συμβαίνει λοιπὸν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ὅλαι αἱ περιπτώσεις νὰ εἶναι 42, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας δὲ τοῦ κύκλου, τόσαι ὅσαι εἶναι αἱ περιπτώσεις ὅλαι τοῦ θεωρήματος τούτου, 96.

Εἰς τὸ 44

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΖΑ, ΒΕ εἶναι ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, ἡ δὲ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΓΕ καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΔΕ, εἶναι παράλληλος ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΕΔ]· διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι ὑπερβολὴ καὶ ἡ ΖΗ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ΖΟ κατηγμένη, εἶναι τὸ $ΟΓ \times ΓΗ = ΓΑ^2$, διὰ τὸ 37 θεώρημα· ὁμοίως δὲ εἶναι καὶ $ΞΓ \times ΓΔ = ΓΒ^2$. Εἶναι ἄρα, ὡς $ΟΓ \times ΓΗ : ΑΓ^2 = ΞΓ \times ΓΔ : ΒΓ^2$, καὶ ἐναλλάξ, $ΟΓ \times ΓΗ : ΞΓ \times ΓΔ = ΑΓ^2 : ΓΒ^2$. Εἶναι δὲ $ΑΓ^2 = ΓΒ^2$· εἶναι ἄρα καὶ $ΟΓ \times ΓΗ = ΞΓ \times ΓΔ$. Καὶ εἶναι $ΟΓ = ΓΞ$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΗΓ = ΓΔ$· εἶναι δὲ καὶ $ΖΓ = ΓΕ$, διὰ τὸ 30 θεώρημα· εἶναι ἄρα αἱ ΖΓ, ΓΗ ἴσαι πρὸς τὰς ΕΓ, ΓΔ. Καὶ περιέχουσι τὰς περὶ τὸ Γ γωνίας ἴσας· διότι εἶναι κατὰ κορυφήν. Ὥστε καὶ ἡ $ΖΗ = ΕΔ$ καὶ ἡ *καὶ ἡ ὑπὸ ΓΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΕΔ. καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΕΔ.*

αἱ πτώσεις αὐτοῦ ιβ εἰσιν, καθάπερ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἐν τῷ μγ΄ ἔχει, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

Εἰς τὸ με΄

Ἐπιστῆσαι χρὴ τῷ θεωρήματι τούτῳ πλείους ἔχοντι H266 *πτώσεις. ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς ὑπερβολῆς ἔχει κ· τὸ γὰρ ἀντὶ τοῦ Β λαμβανόμενον σημεῖον ἢ ταὐτόν ἐστι τῷ Α ἢ ταὐτὸν τῷ Γ· τότε γὰρ συμβαίνει τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τρίγωνον ὅμοιον τῷ ΓΔΛ ταὐτὸν εἶναι τῷ ἀποτεμνομένῳ τριγώνῳ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ταῖς ΔΛΓ. ἐὰν δὲ μεταξὺ ληφθῇ τὸ Β σημεῖον τῶν Α, Γ, καὶ τὰ Δ, Λ ἀνωτέρω ὦσι τῶν περάτων τῆς δευτέρας διαμέτρου, γίνονται πτώσεις τρεῖς· τὰ γὰρ Ζ, Ε ἢ ἀνωτέρω τῶν περάτων φέρονται ἢ ἐπ᾽ αὐτὰ ἢ κατωτέρω. ἐὰν δὲ τὰ Δ, Λ ἐπὶ τὰ πέρατα ὦσι τῆς δευτέρας διαμέτρου, τὰ Ζ, Ε κατωτέρω ἐνεχθήσονται. ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἐξωτέρω ληφθῇ τοῦ Γ τὸ Β, [καὶ] ἡ ΘΓ ἐπὶ τὸ Γ ἐκβληθήσεται, συμβαίνει δὲ οὕτως γίνεσθαι ἄλλας πτώσεις τρεῖς· τοῦ γὰρ Δ σημείου ἢ ἀνωτέρω φερομένου τοῦ πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου ἢ ἐπ᾽ αὐτὸ ἢ κατωτέρω καὶ τὸ Ζ ὁμοίως φερόμενον ποιήσει τὰς τρεῖς πτώσεις. ἐὰν δὲ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς τομῆς ληφθῇ τὸ Β σημεῖον, ἡ μὲν ΓΘ ἐκβληθήσεται ἐπὶ τὸ Θ διὰ τὴν ἀπόδειξιν, αἱ δὲ ΒΖ, ΒΕ ποιοῦσι πτώσεις τρεῖς, ἐπειδὴ τὸ Λ ἐπὶ τὸ πέρας φέρεται τῆς δευτέρας διαμέτρου ἢ ἀνωτέρω ἢ κατωτέρω.*

ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας γωνία ΓΖΗ = ΓΕΔ. Καὶ εἶναι ἐναλλάξ· εἶναι ἄρα ἡ ΖΗ παράλληλος τῆς ΕΔ (Εὐκλ. 1, 27).

Αἱ περιπτώσεις τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ εἶναι 12, ὡς καὶ εἰς τὴν ὑπερβολὴν κατὰ τὸ 43 θεώρημα, καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτή.

Εἰς τὸ 45

Πρέπει νὰ προσέξωμεν τὸ θεώρημα τοῦτο, διότι ἔχει πολλὰς περιπτώσεις. Διότι ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἔχει 20 περιπτώσεις· διότι τὸ σημεῖον τὸ λαμβανόμενον ἀντὶ τοῦ Β, εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ Α ἢ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ Γ· διότι τότε συμβαίνει τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΓΔΛ νὰ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἀποτεμνόμενον τρίγωνον ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τὰς ΔΛ, ΛΓ. Ἐὰν δὲ ληφθῇ τὸ σημεῖον Β μεταξὺ τῶν Α, Γ καὶ τὰ σημεῖα Δ, Λ εἶναι ἄνω τῶν περάτων τῆς δευτέρας διαμέτρου, αἱ περιπτώσεις γίνονται τρεῖς· διότι τὰ Ζ, Ε ἢ φέρονται ἄνω τῶν περάτων ἢ ἐπάνω εἰς αὐτὰ ἢ κάτω. Ἐὰν τὰ Δ, Λ εἶναι εἰς τὰ πέρατα τῆς δευτέρας διαμέτρου, τὰ Ζ, Ε θὰ φερθῶσι κατωτέρω. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν τὸ Β ληφθῇ ἔξω τοῦ Γ, [καὶ] ἡ ΘΓ ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Γ, θὰ συμβῇ τότε νὰ γίνωσιν ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις· διότι, ὅταν τὸ σημεῖον Δ ἢ φερθῇ ἀνωτέρω τοῦ πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου ἢ ἐπάνω εἰς αὐτὸ ἢ κατωτέρω καὶ τὸ Ζ ὁμοίως φερόμενον θὰ κάμῃ τὰς τρεῖς περιπτώσεις. Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον Β ληφθῇ πρὸς τὰ ἄλλα μέρη τῆς τομῆς, ἡ μὲν ΓΘ θὰ ἐκβληθῇ πρὸς τὸ Θ διὰ τὴν ἀπόδειξιν, αἱ δὲ ΒΖ, ΒΕ σχηματίζουσι τρεῖς περιπτώσεις, ἐπειδὴ τὸ Λ φέρεται εἰς τὸ πέρας τῆς δευτέρας διαμέτρου ἢ ἀνωτέρω ἢ κατωτέρω.

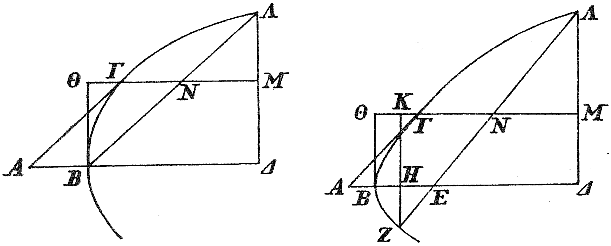
Διὰ τὴν ἔλλειψιν δὲ καὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἐν οὐδὲν ποικίλον ἐροῦμεν, ἀλλὰ ὅσα ἐν τῷ προλαβόντι θεωρήματι ἐλέχθη· ὡς εἶναι τὰς πτώσεις τοῦ θεωρήματος τούτου $\overline{\rho\delta}$.

H268 δύναται δὲ τὰ τῆς προτάσεως δείκνυσθαι καὶ ἐπὶ ἀντικειμένων.

Εἰς τὸ μϛʹ

Τοῦτο τὸ θεώρημα πτώσεις ἔχει πλείους, ἃς δείξομεν προσέχοντες ταῖς πτώσεσι τοῦ μβʹ.

ὑποδείγματος δὲ χάριν, ἐὰν τὸ Z ἐπὶ τὸ B πίπτοιτο, αὐτόθεν ἐροῦμεν· ἐπεὶ τὸ $B\Delta\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τῷ $\Theta B\Delta M$, κοινὸν



ἀφῃρήσθω τὸ $NM\Delta B$· λοιπὸν ἄρα τὸ ΛNM τῷ $N\Theta B$ ἐστιν ἴσον.

ἐπὶ δὲ τῆς λοιπῆς ἐροῦμεν· ἐπειδὴ τὸ $\Lambda E\Delta$ τῷ $\Theta B\Delta M$ ἐστιν ἴσον, τουτέστι τῷ $KH\Delta M$ καὶ τῷ HZE, τουτέστι τῷ ZKN καὶ τῷ $NE\Delta M$, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ $NE\Delta M$· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΛNM τῷ KZN ἴσον.

Εἰς τὸ μζʹ

Τοῦτο τὸ θεώρημα ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς πτώσεις
H270 ἔχει, ὅσας τὸ πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς παραβολῆς εἶχεν, τὰς δὲ ἀποδείξεις αὐτῶν ποιησόμεθα προσέχοντες ταῖς πτώσεσι τοῦ

προκειμένῳ οὐδὲν ἄλλο θὰ εἴπωμεν, ἀλλὰ ὅσα ἐλέχθησαν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα· ὅτι αἱ περιπτώσεις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι 104. Εἶναι δὲ δυνατὸν ν' ἀποδειχθῶσι τὰ τῆς προτάσεως καὶ εἰς τὰς ἀντικειμένας.

Εἰς τὸ 46

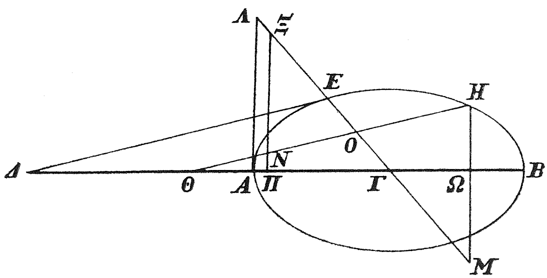
Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει πολλὰς περιπτώσεις, τὰς ὁποίας θ' ἀποδείξωμεν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς περιπτώσεις τοῦ 42 θεωρήματος.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν τὸ Ζ ἤθελε πέσει εἰς τὸ Β, τότε θὰ εἴπωμεν· ἐπειδὴ τὸ ΒΔΛ (θ. 42) = ΘΒΔΜ, ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΝΜΔΒ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΛΝΜ = ΝΘΒ.

Εἰς τὴν ὑπόλοιπον περίπτωσιν θὰ εἴπωμεν· ἐπειδὴ τὸ ΛΕΔ = ΘΒΔΜ (θ. 42), τουτέστι = ΚΗΔΜ + ΗΖΕ = ΖΚΝ + ΝΕΔΜ, ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΝΕΔΜ· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΛΝΜ = ΚΖΝ.

Εἰς τὸ 47

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἔχει περιπτώ-



σεις, ὅσας ἐπὶ τῆς παραβολῆς εἶχε τὸ πρὸ αὐτοῦ, τὰς δὲ ἀποδείξεις αὐτῶν θὰ κάμωμεν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς περιπτώμγ′ θεωρήματος, καὶ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως δὲ τὰς ἀποδείξεις ἐκ τῶν πτώσεων τοῦ μγ′, οἷον ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς τοῦ Η σημείου ἐκτὸς εἰλημμένου, ἐπειδὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΔΓ τρίγωνον τοῖς ΘΗΩ, ΩΓΜ, τουτέστι τοῖς ΟΘΓ, ΟΗΜ τριγώνοις, τῷ δὲ ΛΔΓ ἴσον ἐστὶ τό τε ΞΠΓ τρίγωνον καὶ τὸ ΛΔΠΞ τετράπλευρον, τουτέστι τὸ ΝΘΠ τρίγωνον διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μγ′ θεωρήματι, καὶ τὰ ΞΠΓ, ΝΘΠ ἄρα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ΟΘΓ, ΟΜΗ τριγώνοις. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΘΟΓ τρίγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΞΟΝ τῷ ΗΟΜ ἴσον ἐστίν. καὶ παράλληλος ἡ ΝΞ τῇ ΜΗ· ἴση ἄρα ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

Εἰς τὸ μη′

Καὶ τούτου αἱ πτώσεις ὡσαύτως ἔχουσι τοῖς προειρημένοις ἐπὶ τοῦ μζ′ κατὰ τὴν τῆς ὑπερβολῆς καταγραφήν.

Εἰς τὸ μθ′

Λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΔΛΠΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΛΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΛΝ γωνίᾳ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τοῦ ὑπὸ ΛΔΓ]· ἐκκείσθω γὰρ χωρὶς τὸ ΚΛΝ τρίγωνον καὶ τὸ ΔΛΠΓ παρα-
H272 ραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΔΠ παραλληλογράμμῳ, ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΛΚ παράλληλος ἡ ΝΡ, διὰ δὲ τοῦ Κ τῇ ΛΝ ἡ ΚΡ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΡ καὶ διπλάσιον τοῦ ΚΛΝ τριγώνου· ὥστε καὶ τοῦ ΔΠ παραλληλογράμμου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ΔΓ, ΛΠ ἐπὶ τὰ Σ, Τ καὶ κείσθω τῇ ΔΓ ἴση ἡ ΓΣ, τῇ δὲ ΛΠ ἡ ΠΤ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΣΤ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ

σεις τοῦ 43 θεωρήματος, καὶ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως δὲ τὰς ἀποδείξεις τῶν περιπτώσεων τοῦ 43, ὡς π.χ. εἰς τὸ ληφθὲν σχῆμα (τοῦ θ. 43), ὅπου τὸ σημεῖον Η ἐλήφθη ἐκτὸς τοῦ ληφθέντος (Ε), ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΛΑΓ = τρίγωνα ΘΗΩ + ΩΓΜ = ΟΘΓ + ΟΗΜ, καὶ τρίγ. ΛΑΓ = ΞΠΓ τρίγωνον + ΛΑΠΞ τετράπλευρον = ΛΑΓ = ΞΠΓ + ΝΘΠ, διὰ τὰ ἀποδειχθέντα εἰς τὸ 43 θεώρημα, καὶ ἄρα τὰ τρίγωνα ΞΠΓ+ΝΘΠ = ΟΘΓ+ΟΜΗ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινόν, τὸ τρίγωνον ΘΟΓ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα, τὸ τρίγωνον ΞΟΝ = ΗΟΜ. Καὶ εἶναι παράλληλος ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΜΗ· εἶναι ἄρα ἡ ΝΟ = ΟΗ.

Εἰς τὸ 48

Καὶ αἱ περιπτώσεις τούτου εἶναι αἱ αὐταὶ πρὸς τὰς τοῦ 47 θ. εἰς τὸ σχῆμα τῆς ὑπερβολῆς.

Εἰς τὸ 49

Τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΚΛΝ τρίγωνον = παραλληλόγραμμον ΔΛΠΓ. Καὶ ἡ γωνία ΔΛΠ = γων. ΚΛΝ· εἶναι ἄρα τὸ ΚΛxΛΝ = 2ΛΔxΔΓ]· διότι ἂς ληφθῇ μόνον του τὸ τρίγωνον ΚΛΝ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΛΠΓ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγ. ΚΛΝ = παραλληλόγραμμον ΔΠ, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ν πρὸς τὴν ΛΚ παράλληλος ἡ ΝΡ, διὰ δὲ τοῦ Κ πρὸς τὴν ΛΝ ἡ ΚΡ· εἶναι ἄρα τὸ ΛΡ παραλληλόγραμμον καὶ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΚΛΝ· ὥστε εἶναι διπλάσιον καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΔΠ. Ἂς ἐκβληθῶσι τώρα αἱ ΔΓ, ΛΠ μέχρι τῶν σημείων Σ, Τ, καὶ ἂς ληφθῇ ΔΓ = ΓΣ, καὶ ΛΠ = ΠΤ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΣΤ· εἶναι ἄρα παραλληλόγραμμον τὸ ΔΤ διπλάσιον τοῦ ΔΠ· ὥστε ἴσον τὸ ΛΡ τῷ ΛΣ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον διὰ τὸ τὰς πρὸς τῷ Λ γωνίας κατὰ κορυφὴν οὔσας ἴσας εἶναι· τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΤ, τουτέστι πρὸς ΔΣ, ἡ ΔΛ πρὸς ΛΝ, καὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΔΣ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΣ τῆς ΔΓ, τὸ ὑπὸ ΚΛΝ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΛΔΓ.

ἐὰν δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΛΠ ἐστι παράλληλος, ἡ δὲ ΓΠ τῇ ΛΔ μή ἐστι παράλληλος, τραπέζιον μὲν δηλονότι ἐστὶ τὸ ΔΓΠΛ, καὶ οὕτως δέ φημι, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΛ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΓΔ, ΛΠ. ἐὰν γὰρ τὸ μὲν ΛΡ ἀναπληρωθῇ, ὡς προείρηται, ἐκβληθῶσι δὲ καὶ αἱ ΔΓ, ΛΠ, καὶ τεθῇ τῇ μὲν ΛΠ ἴση ἡ ΓΣ, τῇ δὲ ΔΓ ἡ ΠΤ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΣΤ, παραλληλόγραμμον ἔσται τὸ ΔΤ διπλάσιον τοῦ ΔΠ, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει. χρησιμεύσει δὲ τοῦτο εἰς τὸ ἑξῆς.

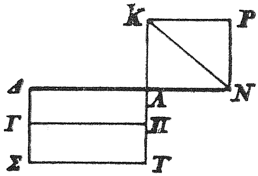
Εἰς τὸ ν′

Αἱ πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος ὡσαύτως ἔχουσι ταῖς τοῦ μγ′, ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ να′.

H274

Εἰς τὸν ἐπίλογον

Τὴν ἐκ τῆς γενέσεως διάμετρον λέγει τὴν γενομένην ἐν τῷ κώνῳ κοινὴν τομὴν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ταύτην δὲ καὶ ἀρχικὴν διάμετρον λέγει. καί φησιν, ὅτι πάντα τὰ δεδειγμένα τὸ ΔΤ καὶ = 2ΔΠ (Εὐκλ. 6,1)· ὥστε τὸ ΛΡ=ΛΣ. Εἶναι δὲ καὶ ἰσογώνιον πρὸς αὐτό, διότι αἱ παρὰ τὸ Λ γωνίαι εἶναι ἴσαι ὡς κατὰ κορυφήν· τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι (Εὐκλ. 6, 14)· εἶναι ἄρα ΚΛ : ΛΤ = ΔΛ : ΛΝ = ΚΛ : ΔΣ, καὶ ΚΛxΛΝ = ΛΔ x ΔΣ. Καὶ ἐπειδὴ ΔΣ =2ΔΓ, εἶναι καὶ ΚΛ x ΛΝ=2ΛΔxΔΓ.



Ἐὰν δὲ ἡ μὲν ΔΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΛΠ, ἡ δὲ ΓΠ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΛΔ, εἶναι μὲν τραπέζιον τὸ ΔΓΠΛ, καὶ λέγω, ὅτι τὸ ΚΛxΛΝ=ΔΛx(ΓΔ+ΛΠ). Διότι, ἐὰν τὸ μὲν ΛΡ ἀναπληρωθῇ, ὡς προελέχθη, ἐκβληθῶσι δὲ καὶ αἱ ΔΓ, ΛΠ, καὶ τεθῇ ΛΠ=ΓΣ, ΔΓ=ΠΤ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΣΤ, θὰ εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΔΤ=2ΔΠ καὶ θὰ ἁρμόζῃ ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις. Θὰ χρησιμεύσῃ δὲ τοῦτο εἰς τὸ ἑπόμενον.

Εἰς τὸ 50

Αἱ περιπτώσεις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι αἱ αὐταί, ὅπως τοῦ 43 θ., ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ 51.

Εἰς τὸν ἐπίλογον

«Τὴν ἐκ τῆς γενέσεως διάμετρον» λέγει τὴν προκύψασαν εἰς τὸν κῶνον κοινὴν τομὴν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ταύτην δὲ καὶ ἀρχικὴν διάμετρον λέγει. Καὶ συμπτώματα τῶν τομῶν ἐν τοῖς προειρημένοις θεωρήμασιν ὑποθεμένων ἡμῶν τὰς ἀρχικὰς διαμέτρους συμβαίνειν δύνανται καὶ τῶν ἄλλων πασῶν διαμέτρων ὑποτιθεμένων.

Εἰς τὸ νδʹ

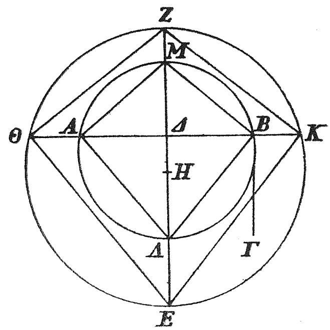
Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἐν αὐτῷ περὶ τὴν ΑΒ γεγράφθω κύκλος ὁ ΑΕΒΖ, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τὸ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι πρὸς τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τὸ ἐν τῷ ΑΖΒ τμήματι μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ]· ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ δέον ἔστω περὶ τὴν ΑΒ κύκλον γράψαι, ὥστε τὴν διάμετρον αὐτοῦ τέμνεσθαι ὑπὸ τῆς ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τῷ Γ μέρος αὐτῆς πρὸς τὸ λοιπὸν μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΓ.

ὑποκείσθω μὲν νῦν τὸν αὐτόν, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ ἤχθω ἡ ΕΔΖ,
H276 καὶ γεγονέτω, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΕΖ· δῆλον δή, ὅτι, εἰ μὲν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ, διχοτομία ἔσται τῆς ΕΖ τὸ Δ, εἰ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μείζων καὶ ἡ ΕΔ τῆς ΔΖ, ἡ διχοτομία κατωτέρω ἐστὶ τοῦ Δ, εἰ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ ἐλάσσων, ἀνωτέρω.

ἔστω δὲ νῦν τέως κατωτέρω ὡς τὸ Η, καὶ κέντρῳ τῷ Η διαστήματι τῷ ΗΖ κύκλος γεγράφθω· δεῖ δὴ διὰ τῶν Α, Β σημείων ἥξειν ἢ ἐσωτέρω ἢ ἐξωτέρω. καὶ εἰ μὲν διὰ προσθέτει, ὅτι ὅλαι αἱ ἀποδειχθεῖσαι ἰδιότητες τῶν τομῶν εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα δύνανται νὰ συμβαίνωσιν, ἐνῷ ὑποθέτομεν τὰς ἀρχικὰς διαμέτρους καὶ ὅλας τὰς ἄλλας διαμέτρους.

Εἰς τὸ 54

Καὶ ἂς ὑψωθῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ εἰς αὐτὸ μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΑΕΒΖ, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τὸ εἰς τὸ τμῆμα ΑΕΒ πρὸς τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τὸ εἰς τὸ τμῆμα ΑΖΒ νὰ μὴ ἔχῃ μεγαλύτερον λόγον ἐκείνου, ὃν ἔχει ἡ ΑΒ:ΒΓ]· ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ δέον ἔστω μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ νὰ γραφῇ κύκλος, ὥστε ἡ διάμετρος αὐτοῦ νὰ τέμνηται ὑπὸ τῆς ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τὸ Γ μέρος αὐτῆς νὰ ἔχῃ λόγον ὄχι μεγαλύτερον τοῦ ΑΒ:ΒΓ (ἴσον ἢ μικρότερον).



Ἂς ὑποτεθῇ τώρα ὅτι ἔχει ἴσον λόγον, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΔΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἂς γίνῃ, ΑΒ:ΒΓ$=$ΕΔ:ΔΖ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΕΖ· εἶναι φανερὸν τώρα, ὅτι, ἐὰν μὲν ἡ ΑΒ$=$ΒΓ, καὶ ἡ ΕΔ$=$ΔΖ, τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΖ, ἐὰν δὲ ΑΒ $>$ ΒΓ καὶ ἡ ΕΔ $>$ ΔΖ, τὸ μέσον εἶναι κατωτέρω τοῦ Δ, ἐὰν δὲ ἡ ΑΒ $<$ ΒΓ εἶναι τοῦτο ἀνωτέρω (τοῦ Δ).

Ἔστω δὲ τώρα κατωτέρω ὡς τὸ Η, καὶ μὲ κέντρον τὸ Η καὶ ἀκτῖνα τὴν ΗΖ ἂς γραφῇ κύκλος· πρέπει τώρα νὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Α, Β ἢ ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς. Καὶ ἐὰν

τῶν Α, Β σημείων ἔρχοιτο, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· ὑπερπιπτέτω δὲ τὰ Α, Β, καὶ ἐκβληθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα ἡ ΑΒ συμπιπτέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὰ Θ, Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΖ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ μὲν ΖΚ παράλληλος ἡ ΜΒ, τῇ δὲ ΚΕ ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΑ, ΑΛ· ἔσονται δὴ καὶ αὗται παράλληλοι ταῖς ΖΘ, ΘΕ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΔ τῇ ΔΒ, τὴν δὲ ΔΘ τῇ ΔΚ καὶ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τὴν ΖΔΕ τῇ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Κ γωνία, καὶ παράλληλοι αἱ ΜΒΛ ταῖς ΖΚΕ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Β· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α. ὥστε ὁ περὶ τὴν ΜΛ κύκλος γραφόμενος ἥξει διὰ τῶν Α, Β. γεγράφθω ὡς ὁ ΜΑΛΒ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΒ τῇ ΖΚ, ἔστιν, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΜ, ἡ ΚΔ πρὸς ΔΒ. ὁμοίως δὴ καί, ὡς ἡ ΚΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΛ. καὶ
H278 ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΛΔ πρὸς ΔΜ.

ὁμοίως δέ, κἂν ὁ γραφόμενος περὶ τὴν ΖΕ κύκλος τέμνοι τὴν ΑΒ, τὸ αὐτὸ δειχθήσεται.

Εἰς τὸ νε'

Καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΔ, καὶ ἤχθω τις εἰς τὸ [ἡμικύκλιον παράλληλος τῇ ΑΘ ἡ ΖΗ ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ]· ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΑΓ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΗ, καὶ δέον ἔστω ποιῆσαι τὰ προκείμενα.

κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ τετμήσθω ἡ ΘΗ δίχα κατὰ μὲν διήρχετο διὰ τῶν σημείων Α, Β τὸ ἐπιταχθὲν θὰ ἦτο γεγονός· ἂς διέρχηται ὅμως ἄνω τῶν Α, Β, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἡ ΑΒ ἂς συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν κατὰ τὰ σημεῖα Θ, Κ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΖΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Β πρὸς μὲν τὴν ΖΚ παράλληλος ἡ ΜΒ, πρὸς δὲ τὴν ΚΕ παράλληλος ἡ ΒΛ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΜΑ, ΑΛ· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ αὗται παράλληλοι πρὸς τὰς ΖΘ, ΘΕ, διότι εἶναι ΑΔ=ΔΒ καὶ ΔΘ=ΔΚ καὶ ἡ ΖΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΚ (Εὐκλ. 1, 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ παρὰ τὸ Κ γωνία εἶναι ὀρθή, καὶ αἱ ΜΒ, ΒΛ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ΖΚ, ΚΕ, εἶναι ἄρα καὶ ἡ παρὰ τὸ Β γωνία ὀρθή· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ παρὰ τὸ Α γωνία. Ὥστε καὶ ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν ΜΛ θὰ διέλθῃ διὰ τῶν Α, Β (Εὐκλ. 3, 31). Ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΜΑΛΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΜΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΚ, εἶναι ΖΔ:ΔΜ=ΚΔ:ΔΒ (Εὐκλ. 6, 4). Ὁμοίως τώρα καί, ὡς ΚΔ: ΔΒ=ΕΔ:ΔΛ. Καὶ ἐναλλάξ, εἶναι ΕΔ:ΔΖ=ΛΔ:ΔΜ=ΑΒ:ΒΓ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ ἂν ὁ μὲ διάμετρον τὴν ΖΕ γραφόμενος κύκλος τέμνῃ τὴν ΑΒ.

Εἰς τὸ 55

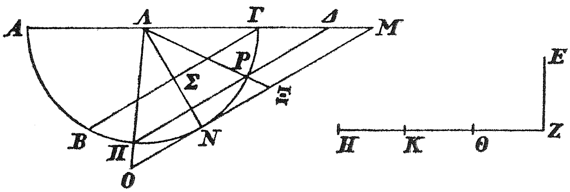
Καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ ἡμικύκλιον παράλληλος πρὸς τὴν ΑΘ ἡ ΖΗ σχηματίζουσα τὸν λόγον $ΖΗ^2$:ΔΗxΗΑ=ΓΑ:2ΑΔ]· ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΑΓ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ ΕΖ:ΖΗ, καὶ πρέπει νὰ γίνουν τὰ ζητηθέντα.

Ἂς ληφθῇ ΕΖ=ΖΘ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΘΗ εἰς τὸ μέσον τὸ Κ, καὶ ἤχθω ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ ΓΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ κέντρου ἤχθω ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἡ ΛΣ καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΜ· ἐφάψεται ἄρα τοῦ κύκλου. καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ, ἡ ΜΞ πρὸς ΞΝ, καὶ κείσθω τῇ ΞΝ ἴση ἡ ΝΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΛΟ τέμνουσαι τὸ ἡμικύκλιον κατὰ τὰ Π, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΡΔ.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΞΝ τῇ ΝΟ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΝΛ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΟ τῇ ΛΞ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΠ τῇ
H280 ΛΡ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΠΟ τῇ ΡΞ ἐστιν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΡΔ τῇ ΜΟ. καὶ ἔστιν, ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ, ἡ ΜΞ πρὸς ΝΞ· ὡς δὲ ἡ ΘΚ πρὸς ΘΗ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ· δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΘΗ, ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ· ἀνάπαλιν, ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ, ἡ ΟΞ πρὸς ΞΜ· συνθέντι, ὡς ἡ ΗΖ πρὸς ΖΘ, τουτέστι πρὸς ΖΕ, ἡ ΟΜ πρὸς ΜΞ, τουτέστιν ἡ ΠΔ πρὸς ΔΡ. ὡς δὲ ἡ ΠΔ πρὸς ΔΡ, τὸ ὑπὸ ΠΔΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΡ, ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΠΔΡ τῷ ὑπὸ ΑΔΓ· ὡς ἄρα ἡ ΗΖ πρὸς ΖΕ, τὸ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΡ. ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ, τὸ ἀπὸ ΔΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΓ.

Εἰς τὸ νη´

Καὶ ἐπὶ τῆς ΑΕ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΖ, καὶ τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἐν αὐτῷ ἡ ΖΗ λόγον ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ τὸν τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΕ] ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις κατὰ τὸ Κ, καὶ ἃς ἀχθῇ εἰς τὸ ἡμικύκλιον τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ ΓΒ εἰς τὴν γωνίαν ΑΓΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Λ ἃς ἀχθῇ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΛΣ καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἃς συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν ἃς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΓΒ παράλληλος ἡ ΝΜ· αὕτη θὰ ἐφάπτηται ἄρα τοῦ κύκλου (Εὐκλ. 3, 16



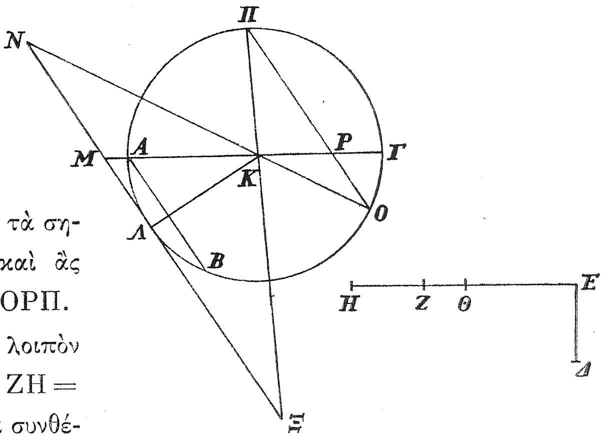
πόρισ.). Καὶ ἃς γίνῃ ΖΘ:ΘΚ=ΜΞ:ΞΝ, καὶ ἃς ληφθῇ ΞΝ=ΝΟ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΛΞ, ΛΟ τέμνουσαι τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὰ σημεῖα Π, Ρ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ ΠΡΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ΞΝ=ΝΟ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΝΛ, εἶναι ἄρα καὶ ΛΟ=ΛΞ (Εὐκλ. 1, 4). Εἶναι δὲ καὶ ΛΠ=ΛΡ· καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΠΟ=ΡΞ. Εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ ΠΡΔ πρὸς τὴν ΜΟ (Εὐκλ. 6, 2). Καὶ εἶναι ΖΘ:ΘΚ=ΜΞ:ΝΞ· ὡς δὲ ΘΚ:ΘΗ=ΝΞ:ΞΟ· διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἄρα κατὰ μέλη εἶναι ΘΖ:ΘΗ=ΜΞ:ΞΟ· ἀνάπαλιν εἶναι ΗΘ:ΘΖ=ΟΞ:ΞΜ· καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 6 ὁρισ. 14) εἶναι ΗΖ:ΖΘ=ΟΜ:ΜΞ=ΗΖ:ΖΕ=ΠΔ:ΔΡ. Ὡς δὲ ΠΔ:ΔΡ=ΠΔxΔΡ:ΔΡ^2, καὶ εἶναι ΠΔxΔΡ=ΑΔxΔΓ (Εὐκλ. 3, 36)· ὡς ἄρα ΗΖ:ΖΕ=ΑΔxΔΓ:ΔΡ^2· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ΕΖ:ΖΗ=ΔΡ^2:ΑΔxΔΓ.

Εἰς τὸ 58

Καὶ ἐπὶ τῆς ΑΕ ἃς γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΖ, καὶ εἰς αὐτὸ ἃς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΖΗ σχηματίζουσα λόγον τὸν ΖΗ^2:ΑΗxΗΕ=ΓΑ:2ΑΕ]· ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ ἡ ΑΒ, καὶ κείσθωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΖ ἐπὶ τὸ Η, καὶ τῇ ΔΕ ἴση κείσθω ἡ ΖΗ, καὶ τετμήσθω ὅλη ἡ ΕΗ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἤχθω καὶ συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ ἐκβλη- H282 θεῖσα ἡ ΚΛ συμβαλλέτω τῇ ΛΜ κατὰ τὸ Μ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΛΜ πρὸς ΜΝ, καὶ τῇ ΛΝ ἴση ἔστω ἡ ΛΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΚ, ΚΞ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἀναπληρωθεὶς ὁ κύκλος τεμνέτω αὐτὰς κατὰ τὰ Π, Ο, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΡΠ.

ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΖΗ, ἡ ΛΜ πρὸς ΜΝ, συνθέντι, ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΛΝ πρὸς ΝΜ· ἀνάπαλιν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, ἡ ΝΜ πρὸς ΝΛ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ, ἡ ΜΝ πρὸς ΝΞ· διελόντι, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΖΕ, ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΝΛ τῇ ΛΞ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΚ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΝ τῇ ΚΞ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΟ τῇ ΚΠ ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ ΝΞ τῇ ΟΠ. ὅμοιον ἄρα τὸ ΚΜΝ τρίγωνον τῷ ΟΚΡ τριγώνῳ καὶ τὸ ΚΜΞ τῷ ΠΡΚ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΚΜ πρὸς ΚΡ, ἡ ΜΝ πρὸς ΡΟ. ἀλλὰ καί, ὡς αὐτὴ ἡ ΚΜ πρὸς ΚΡ, ἡ ΜΞ πρὸς ΠΡ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΜ πρὸς ΡΟ, ἡ ΜΞ πρὸς ΠΡ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ, ἡ ΟΡ πρὸς ΡΠ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΟΡ πρὸς ΡΠ, τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΡΠ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς εἰς αὐτὸ εὐθεῖα ἡ AB, καὶ ἂς ληφθῶσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΔΕ, EZ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ EZ μέχρι τοῦ H, καὶ ἂς ληφθῇ ΔΕ = ZH, καὶ ἂς τμηθῇ ὅλη ἡ EH εἰς τὸ μέσον εἰς τὸ Θ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον K τοῦ κύκλου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν AB καὶ ἂς συναντᾷ αὕτη τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν AB ἡ ΛΜ, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ KA ἂς συναντᾷ τὴν ΛΜ εἰς τὸ M, καὶ ἂς γίνῃ, ὡς ἡ ΘZ:ZH = ΛΜ:ΜΝ, καὶ ἔστω ΛΝ = ΛΞ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ NK, KΞ καὶ ἂς ἐκβληθῶσιν, καὶ ἀναπληρωθεὶς ὁ κύκλος ἂς τέμνῃ αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Π, O, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΟΡΠ.



Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ἡ ZΘ : ZH = ΛΜ:ΜΝ, διὰ συνθέσεως εἶναι (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 14), ἡ ΘΗ:ΗΖ = ΛΝ:ΝΜ· ἀνάπαλιν δὲ εἶναι ZH:HΘ = NM:NΛ, ὡς δὲ ZH:HE = MN:NΞ· καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 15) εἶναι ZH:ZE = NM:MΞ. Καὶ ἐπειδὴ ΝΛ = ΛΞ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΛΚ, εἶναι ἄρα KN = KΞ (Εὐκλ. 1, 4). Εἶναι δὲ καὶ KO = KΠ· εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΟΠ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον KMN ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον OKP καὶ τὸ KMΞ πρὸς τὸ ΠΡΚ (Εὐκλ. 1, 29). Εἶναι ἄρα ὡς ἡ KM:KP = MN:PO (Εὐκλ. 6, 4). Ἀλλὰ καὶ KM:KP = MΞ:ΠΡ· καὶ ὡς ἄρα NM:PO = MΞ:ΠΡ· καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 12). ὡς ἡ NM:MΞ = OP:PΠ. Ἀλλὰ NM:MΞ = HZ:ZE = ΔΕ:EZ, ὡς δὲ OP:PΠ = OP^2:OPxPΠ· καὶ

ΕΖ, τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΡΠ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΟΡΠ τῷ ὑπὸ ΑΡΓ. ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΡΓ.

H284 *Εἴρηται μὲν ἐν τοῖς μετὰ τὸ ι′ θεώρημα σχολίοις ὁ σκοπὸς τῶν ιγ̅ πρώτων θεωρημάτων καὶ ἐν τοῖς εἰς τὸ ἑκκαιδέκατον ὁ τῶν ἑξῆς τριῶν, δεῖ δὲ εἰδέναι, ὅτι ἐν μὲν τῷ ιζ′ φησίν, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη ἐκτὸς πίπτει, ἐν δὲ τῷ ιη′ φησίν, ὅτι ἡ παράλληλος τῇ ὁπωσοῦν ἐφαπτομένῃ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη τεμεῖ τὴν τομήν, ἐν τῷ ιθ′, ὅτι ἡ ἀπό τινος σημείου τῆς διαμέτρου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμπίπτει τῇ τομῇ, ἐν τῷ κ′ καὶ κα′ τὰς καταγομένας ζητεῖ τῶν τομῶν, ὅπως ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας καὶ τὰ τῆς διαμέτρου ὑπ᾽ αὐτῶν γινόμενα τμήματα, ἐν τῷ κβ′ καὶ κγ′ λέγει περὶ τῆς εὐθείας τῆς κατὰ δύο σημεῖα τῇ τομῇ συμπιπτούσης, ἐν τῷ κδ′ καὶ κε′ περὶ τῆς εὐθείας τῆς καθ᾽ ἓν τῇ τομῇ συμπιπτούσης, τουτέστιν ἐφαπτομένης, ἐν τῷ κϛ′ περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἐν τῷ κζ′ περὶ τῆς τεμνούσης τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ὅτι κατ᾽ ἀμφότερα μέρη συμπίπτει τῇ τομῇ, ἐν τῷ κη′ περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου τῇ ἐφαπτομένῃ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ἐν τῷ κθ′ περὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῶν ἀντικειμένων ἐκβαλλομένης, ἐν τῷ λ′ φησίν, ὅτι διχοτομεῖται ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἐκβαλλομένη τῆς ἐλλείψεως καὶ τῶν ἀντικειμένων, ἐν τῷ λα′ φησίν, ὅτι ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἡ ἐφαπτομένη τὴν διάμετρον τέμνει μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ* ὡς ἄρα ἡ $ΔΕ:ΕΖ = ΟΡ^2:ΟΡ x ΡΠ$. Εἶναι δὲ $ΟΡ x ΡΠ = ΑΡ x ΡΓ$ (Εὐκλ. 3, 35).

Ὡς ἄρα $ΔΕ : ΕΖ = ΟΡ^2 : ΑΡ x ΡΓ$.

Ἐλέχθη μὲν εἰς τὰ σχόλια μετὰ τὸ 10 θεώρημα ὁ σκοπὸς τῶν 13 πρώτων θεωρημάτων καὶ εἰς τὰ σχόλια τοῦ 16 ὁ σκοπὸς τῶν ἑπομένων τριῶν, πρέπει δὲ νὰ γνωρίζωμεν, ὅτι εἰς μὲν τὸ 17 λέγει, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς ἀγομένη παραλλήλως πρὸς τὴν τεταγμένως κατηγμένην πίπτει ἐκτός, εἰς δὲ τὸ 18 λέγει, ὅτι ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ὁπωσδήποτε ἐφαπτομένην ἀγομένη ἐντὸς τῆς τομῆς θὰ τμήσῃ τὴν τομήν, εἰς δὲ τὸ 19, ὅτι ἡ ἀπό τινος σημείου τῆς διαμέτρου παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην συναντᾷ τὴν τομήν, εἰς τὸ 20 καὶ τὸ 21 ζητεῖ τὰς καταγομένας τῶν τομῶν, πῶς ἔχουσι μεταξύ των καὶ τὰ τμήματα τῆς διαμέτρου τὰ γινόμενα ὑπ' αὐτῶν, εἰς τὸ 22 καὶ 23, λέγει, περὶ τῆς εὐθείας τῆς συναντώσης τὴν τομὴν εἰς δύο σημεῖα, εἰς τὸ 24 καὶ 25 περὶ τῆς εὐθείας τῆς συναντώσης τὴν τομὴν εἰς ἓν σημεῖον, τουτέστιν τῆς ἐφαπτομένης, εἰς τὸ 26 περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ὑπερβολῆς, εἰς τὸ 27 περὶ τῆς τεμνούσης τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ὅτι καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη συναντᾷ τὴν τομήν, εἰς τὸ 28 περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου πρὸς τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, εἰς τὸ 29 περὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῶν ἀντικειμένων ἐκβαλλομένης, εἰς τὸ 30 λέγει, ὅτι ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως καὶ τῶν ἀντικειμένων ἐκβαλλομένη διχοτομεῖται, εἰς τὸ 31 λέγει, ὅτι εἰς τὴν ὑπερβολὴν ἡ ἐφαπτομένη τέμνει τὴν διάμετρον μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ κέντρου, εἰς τὸ 32 καὶ 33 *κέντρου, ἐν τῷ λβʹ καὶ γʹ καὶ δʹ καὶ εʹ καὶ ϛʹ περὶ τῶν* H286 *ἐφαπτομένων ποιεῖται τὸν λόγον, ἐν τῷ λζʹ περὶ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένων τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἐν τῷ ληʹ περὶ τῶν ἐφαπτομένων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ὅπως ἔχουσι πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, ἐν τῷ λθʹ καὶ μʹ περὶ τῶν αὐτῶν ποιεῖται τὸν λόγον τοὺς συγκειμένους ἐκ τούτων λόγους ἐπιζητῶν, ἐν τῷ μαʹ περὶ τῶν ἀναγραφομένων παραλληλογράμμων ἀπὸ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐν τῷ μβʹ ἐπὶ τῆς παραβολῆς λέγει ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς κατηγμένης καταλαμβανόμενον τρίγωνον τῷ ἰσοϋψεῖ αὐτῷ παραλληλογράμμῳ, ἡμίσειαν δʼ ἔχοντι βάσιν, ἐν τῷ μγʹ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ζητεῖ, πῶς ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν κατηγμένων ἀπολαμβανόμενα τρίγωνα, ἐν τῷ μδʹ τὸ αὐτὸ ἐν ταῖς ἀντικειμέναις, ἐν τῷ μεʹ τὸ αὐτὸ ἐπὶ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐν τῷ μϛʹ περὶ τῶν μετὰ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς ἑτέρων, ἐν τῷ μζʹ περὶ τῶν ἑτέρων διαμέτρων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐν τῷ μηʹ περὶ τῶν ἑτέρων διαμέτρων τῶν ἀντικειμένων, ἐν τῷ μθʹ περὶ τῶν παρʼ ἃς δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὰς ἑτέρας διαμέτρους τῆς παραβολῆς, ἐν τῷ νʹ περὶ τοῦ αὐτοῦ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐν τῷ ναʹ περὶ τοῦ αὐτοῦ τῶν ἀντικειμένων.* H288 *ταῦτα εἰπὼν καὶ προσθεὶς τοῖς εἰρημένοις ἐπίλογόν τινα ἐν τῷ νβʹ καὶ νγʹ δεικνύει πρόβλημα, ὡς δυνατὸν ἐν ἐπιπέδῳ γράψαι τὴν παραβολήν, ἐν τῷ νδʹ καὶ νεʹ λέγει, πῶς δεῖ γράψαι τὴν ὑπερβολήν, ἐν τῷ νϛʹ καὶ νζʹ καὶ νηʹ, πῶς* καὶ 34 καὶ 35 καὶ 36 κάμνει λόγον περὶ τῶν ἐφαπτομένων, εἰς τὸ 37 περὶ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν κατηγμένων, τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἀπὸ τῆς ἀφῆς, εἰς τὸ 38 περὶ τῶν ἐφαπτομένων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, πῶς ἔχουσι πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, εἰς τὸ 39 καὶ 40 κάμνει λόγον περὶ τῶν αὐτῶν, ἀναζητῶν τοὺς συγκειμένους ἐκ τούτων λόγους (δηλ. γινόμενα λόγων), εἰς τὸ 41 περὶ τῶν ἀναγραφομένων παραλληλογράμμων ἀπὸ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, εἰς τὸ 42 εἰς τὴν παραβολὴν λέγει, ὅτι εἶναι ἴσον τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς κατηγμένης πρὸς τὸ ἰσοϋψὲς πρὸς αὐτὸ παραλληλόγραμμον, ἔχον τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως, εἰς τὸ 43 ζητεῖ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, πῶς ἔχουσι μεταξύ των τὰ τρίγωνα τὰ ἀπολαμβανόμενα ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν κατηγμένων, εἰς τὸ 44 τὸ αὐτὸ εἰς τὰς ἀντικειμένας, εἰς τὸ 45 τὸ αὐτὸ ἐπὶ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, εἰς τὸ 46 περὶ τῶν ἄλλων διαμέτρων τῶν μετὰ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, εἰς τὸ 47 περὶ τῶν ἄλλων διαμέτρων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, εἰς τὸ 48 περὶ τῶν ἄλλων διαμέτρων τῶν ἀντικειμένων, εἰς τὸ 49 περὶ τῶν παραμέτρων τῶν ἄλλων διαμέτρων τῆς παραβολῆς, εἰς τὸ 50 περὶ τοῦ αὐτοῦ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, εἰς τὸ 51 περὶ τοῦ αὐτοῦ τῶν ἀντικειμένων. Ἀφοῦ εἶπε αὐτὰ καὶ προσέθεσεν εἰς τὰ λεχθέντα κάποιον ἐπίλογον, ἀποδεικνύει εἰς τὸ 52 καὶ τὸ 53 πρόβλημα, ὅτι εἶναι δυνατὸν εἰς τὸ ἐπίπεδον νὰ γραφῇ προβολή, εἰς τὸ 54 καὶ 55 λέγει, πῶς πρέπει νὰ γράφηται ἡ ὑπερβολή, εἰς τὸ 56 καὶ 57 καὶ 58, πῶς πρέπει νὰ γράφηται ἡ ἔλλειψις, εἰς τὸ 59 *δεῖ γράψαι τὴν ἔλλειψιν, ἐν τῷ νθ′ λέγει, πῶς δεῖ γράφειν ἀντικειμένας, ἐν τῷ ξ′ περὶ τῶν συζυγῶν ἀντικειμένων.*

λέγει, πῶς πρέπει νὰ γράφωνται αἱ ἀντικείμεναι, εἰς τὸ 60 λέγει περὶ τῶν συζυγῶν ἀντικειμένων.

H290

Εἰς τὸ δεύτερον

Ἀρχόμενος τοῦ β′ βιβλίου τῶν Κωνικῶν, ὦ φίλτατέ μοι Ἀνθέμιε, τοσοῦτον οἶμαι δεῖν προειπεῖν, ὅτι τοσαῦτα μόνα εἰς αὐτὸ γράφω, ὅσα ἂν μὴ ᾖ δυνατὸν διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ νοηθῆναι.

Εἰς τὸ α′

Τὸ πρῶτον θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει, εἰ μὴ ἄρα.... τοῦτο γὰρ τῇ καταγραφῇ διαφορὰν οὐ ποιεῖ· αἱ γὰρ ΔΓ, ΓΕ ἀσύμπτωτοί τέ εἰσι τῇ τομῇ καὶ αἱ αὐταὶ διαμένουσι κατὰ πᾶσαν διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην.

Εἰς τὸ β′

Τοῦτο τὸ θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει. ἡ μέντοι ΒΘ πάντως τεμεῖ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ, συμπεσεῖται τῇ ΓΘ· ὥστε πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται.

Εἰς τὸ ια′

Ἔν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεώρημα τοῦτο ἄλλως δείκνυται.

Σχόλια εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον

Ἀρχίζων τὰ σχόλια τοῦ 2ου βιβλίου τῶν Κωνικῶν, ἀγαπητέ μου Ἀνθέμιε, νομίζω, ὅτι τόσον πρέπει νὰ προλογίσω, ὅτι γράφω εἰς αὐτὸ τόσα, ὅσα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ νοηθῶσι διὰ τῶν σχολίων τοῦ πρώτου βιβλίου.

Εἰς τὸ 1

Τὸ πρῶτον θεώρημα δὲν ἔχει ἄλλην περίπτωσιν, εἰ μὴ ἄρα.... διότι τοῦτο δὲν κάμνει τὴν διαφορὰν εἰς τὸ σχῆμα· διότι αἱ ΔΓ, ΓΕ εἶναι ἀσύμπτωτοι τῆς τομῆς καὶ παραμένουσιν αἱ ἴδιαι εἰς πᾶσαν διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην.

Εἰς τὸ 2

Τὸ θεώρημα τοῦτο δὲν ἔχει περίπτωσιν. Διότι ἡ ΒΘ πάντως θὰ τμήσῃ τὴν τομὴν εἰς δύο σημεῖα. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ, θὰ συναντήσῃ τὴν ΓΘ· ὥστε προηγουμένως θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

Εἰς τὸ 11

Εἰς μερικὰ χειρόγραφα (ἀντίγραφα) τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδεικνύεται κατ' ἄλλον τρόπον.

H292 Ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕΔ, καὶ ἤχθω τις ἡ ΕΖ, ὡς ἔτυχεν, τέμνουσα τὰς ΔΒ, ΒΑ. λέγω, ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ. ἡ ΒΗ ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ἀπὸ ΒΗ ἴσον παραλληλόγραμμον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ καὶ ποιείτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΒΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛΔ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ· ὥστε καὶ τῷ ὑπὸ ΕΘΖ· ὅπερ ἄτοπον, ἐπείπερ ἡ ΛΔ παράλληλός ἐστι τῇ ΕΘ. ἡ ΕΖ ἄρα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

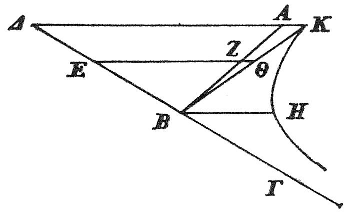
φανερὸν δή, ὅτι καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον· παράλληλος γάρ ἐστι τῇ ΒΗ διαμέτρῳ.

Εἰς τὸ ιβ'

Ηὑρέθη ἔν τισιν ἀντιγράφοις τοῦτο τὸ θεώρημα δεικνύμενον διὰ δύο παραλλήλων ἀγομένων τῇ ἐφαπτομένῃ, μιᾶς μὲν διὰ τοῦ Δ, ἑτέρας δὲ διὰ τοῦ Η· καὶ ἡ ἀπόδειξις διὰ συν-
H294 θέσεως λόγων ἐδείκνυτο. ἐπελεξάμεθα δὲ ταύτην τὴν κατασκευὴν ὡς τὰ αὐτὰ δεικνῦσαν ἁπλουστέρως.

ἔχει δὲ καὶ πτώσεις ἕξ· τῶν γὰρ ΕΔΖ ἀχθεισῶν τὸ Ε σημεῖον ἢ μεταξὺ ἔσται τῶν Θ, Β ἢ ἐπὶ τοῦ Β ἢ ἔξω τοῦ

Ἔστω ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἀσύμπτωτοι εἶναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἃς ἐκβληθῇ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕΔ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΕΖ, ὡς ἔτυχεν, τέμνουσα τὰς ΔΒ, ΒΑ. Λέγω, ὅτι αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.



Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἃς μὴ τὴν συναντήσῃ, καὶ διὰ τοῦ Β ἃς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ ἡ ΒΗ. Εἶναι ἄρα ἡ ΒΗ διάμετρος τῆς τομῆς. Καὶ ἃς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἴσον πρὸς τὸ $ΒΗ^2$, ὑπερβάλλον κατὰ σχῆμα τετράγωνον, καὶ ἔστω τὸ ΕΘxΘΖ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΒ καὶ ἃς ἐκβληθῇ· αὕτη θὰ συναντήσῃ τότε τὴν τομήν. Ἃς τὴν συναντήσῃ εἰς τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἃς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΗ ἡ ΚΑΔ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΔΚ \times ΚΑ = ΒΗ^2$· ὥστε εἶναι ἴσον καὶ μὲ τὸ ΕΘxΘΖ· ὅπερ ἄτοπον, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΘ. Ἡ ΕΖ ἄρα θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

Τώρα εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ τὴν συναντήσῃ μόνον εἰς ἓν σημεῖον· διότι εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΒΗ.

Εἰς τὸ 12

Εἰς μερικὰ ἀντίγραφα τὸ θεώρημα τοῦτο εὑρέθη ἀποδεικνυόμενον διὰ δύο παραλλήλων ἀγομένων πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, μιᾶς μὲν διὰ τοῦ Δ, ἄλλης δὲ διὰ τοῦ Η· καὶ ἡ ἀπόδειξις ἐγίνετο διὰ συνθέσεως λόγων. Ἐξελέξαμεν δὲ τὴν κατασκευὴν αὐτήν, ὡς ἀποδεικνύουσαν τὰ αὐτὰ κατ' ἁπλούστερον τρόπον.

Ἔχει δὲ καὶ 6 περιπτώσεις· διότι, ὅταν ἀχθῶσιν αἱ ΕΔ, ΔΖ τὸ σημεῖον Ε ἢ θὰ εἶναι μεταξὺ τῶν Θ, Β ἢ ἐπὶ τοῦ Β ἢ ἐκτὸς

Β, ὡς γίνονται τρεῖς, καὶ ὁμοίως ἐπὶ τοῦ Ζ ἄλλαι τρεῖς.

Εἰς τὸ ιδʹ

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις ηὑρέθη ἄλλως δεικνύμενον, ὅτι παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα.

τῶν γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω τοῦ δοθέντος διαστήματος ἔλαττον τὸ ΕΚ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΘ, ἡ ΘΑ πρὸς ΑΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΖ παράλληλος ἡ ΜΛΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΞΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΒ, ἡ ΞΒ ἄρα πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΛΒ πρὸς ΘΖ. ὡς δὲ ἡ ΞΒ πρὸς ΘΖ, ἡ ΘΕ πρὸς ΜΞ διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΖΘΕ τῷ ὑπὸ ΒΞΜ· καὶ ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΜΞ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΛΒ πρὸς ΖΘ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΛΒ πρὸς ΖΘ, ἡ ΛΑ πρὸς ΑΘ, ὡς δὲ ἡ ΛΑ πρὸς ΑΘ, ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ· καὶ ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΜΞ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ. ἐλάσσων ἄρα ἡ ΞΜ τῆς ΚΕ.

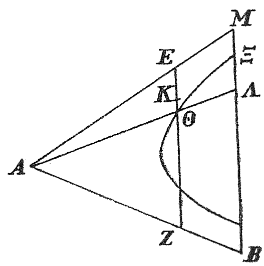
Ηὑρέθησαν δὲ ἔν τισι καὶ ταῦτα τὰ θεωρήματα ἐγγε-
H296 γραμμένα, ἅπερ ὡς περιττὰ ἀφῃρέθη ὑφ᾽ ἡμῶν· δεδειγμένου γὰρ τούτου, ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι ἔγγιον προσάγουσι τῇ τομῇ καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται, περιττὸν ἦν ταῦτα ζητεῖν. ἀμέλει οὐδὲ ἀποδείξεις ἔχουσί τινας, ἀλλὰ διαφορὰς καταγραφῶν. ἵνα δὲ τοῖς ἐντυγχάνουσι τὴν ἡμέραν δήλην ποιήσωμεν, ἐκκείσθω ἐνταῦθα τὰ ὡς περιττὰ ἀφῃρημένα.

Εἴ τινές εἰσιν ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ ἕτεραι τῶν προειτοῦ Β, ὁπότε ἔχομεν τρεῖς περιπτώσεις, καὶ ὁμοίως ἐπὶ τοῦ Ζ ἄλλας τρεῖς.

Εἰς τὸ 14

Εἰς μερικὰ ἀντίγραφα εὑρέθη ἀποδεικνυόμενον κατ' ἄλλον τρόπον, ὅτι δηλ. καταλήγουσιν εἰς μικρότερον διάστημα ἀπὸ πᾶν δοθὲν διάστημα.

Διότι, μὲ τὰς αὐτὰς ὑποθέσεις, ἂς ληφθῇ μικρότερον τοῦ δοθέντος διαστήματος τὸ ΕΚ, καὶ ἂς γίνῃ ΚΕ:ΕΘ = ΘΑ:ΑΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ ἡ ΜΛΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΞΒ > ΛΒ, εἶναι ἄρα ΞΒ:ΘΖ > ΛΒ:ΘΖ (Εὐκλ. 5, 8). Ὡς δὲ ΞΒ:ΘΖ = ΘΕ:ΜΞ, διότι εἶναι ΖΘ x ΘΕ = ΒΞ x ΞΜ (θ. 10)· εἶναι ἄρα καὶ ΘΕ : ΜΞ > ΛΒ : ΖΘ. Ἀλλὰ ΛΒ : ΖΘ = ΛΑ : ΑΘ, καὶ ΛΑ : ΑΘ = ΘΕ : ΕΚ· εἶναι ἄρα καὶ ΘΕ : ΜΞ > ΘΕ : ΕΚ.



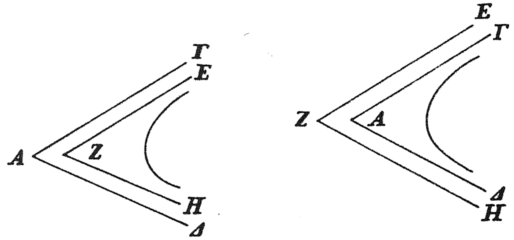
Εἶναι ἄρα καὶ ΞΜ < ΚΕ (Εὐκλ. 5, 10).

Εὑρέθησαν δὲ καὶ εἰς μερικὰ ἀντίγραφα καὶ τὰ θεωρήματα αὐτά, τὰ ὁποῖα ὡς περιττὰ ἀφηρέθησαν ὑφ' ἡμῶν· διότι ἔχει ἀποδειχθῇ αὐτό, ὅτι δηλ. αἱ ἀσύμπτωτοι πλησιάζουσι πλησιέστερον πρὸς τὴν τομὴν καὶ ἡ ἀπόστασίς των ἀπ' αὐτῆς, δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης (μικρᾶς) ἀποστάσεως, ἦτο περιττὸν νὰ σπουδάζωνται τὰ θεωρήματα αὐτά. Βεβαίως, δὲν ἔχουσιν οὔτε μερικὰς ἀποδείξεις, ἀλλὰ μόνον διαφορὰς σχημάτων. Διὰ νὰ καταστήσωμεν δὲ σαφῆ εἰς τοὺς ἀναγνώστας τὴν γνώμην ἡμῶν, ἂς ἐκθέσωμεν ἐδῶ τὰ ὡς περιττὰ ἀφαιρεθέντα.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν εἰς τὴν τομὴν μερικαὶ ἀπὸ τὰς προλεχθείσας *ρημένων, ἔγγιόν εἰσιν αἱ προειρημέναι τῇ τομῇ.*

ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ. λέγω, ὅτι, εἴ τινές εἰσιν ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ, ἐκείνων ἔγγιόν εἰσιν αἱ ΓΑ, ΑΔ.

ὅτι μὲν οὖν, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, οὐ δύνανται αἱ ΕΖΗ ἀσύμπτωτοι εἶναι, φανερόν, ὥστε εἶναι παράλληλον τὴν μὲν ΕΖ τῇ ΓΑ, τὴν δὲ ΖΗ τῇ ΑΔ· δέδεικται γάρ, ὅτι συμπεσοῦνται τῇ τομῇ· ἐν γὰρ τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς εἰσιν.



εἰ δέ, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας πτώσεώς εἰσιν, ἀσύμπτωτοι αἱ ΕΖ, ΖΗ παράλληλοι οὖσαι ταῖς ΓΑ, ΑΔ, ἔγγιον μᾶλλόν εἰσιν αἱ ΓΑ, ΑΔ τῆς τομῆς ἤπερ αἱ ΕΖ, ΖΗ.

εἰ δέ, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης πτώσεως, καὶ οὕτως αἱ μὲν H298 *ΓΑ, ΑΔ, ἐὰν ἐκβληθῶσιν εἰς ἄπειρον, ἐγγίζουσι τῆς τομῆς καὶ εἰς ἔλαττον διάστημα παντὸς τοῦ δοθέντος ἀφικνοῦνται, αἱ δὲ ΕΖΗ κατὰ μὲν τὸ Ζ καὶ τὰ ἐγγὺς αὐτοῦ ἐντὸς ὄντα τῆς γωνίας σύνεγγύς εἰσι τῆς τομῆς, ἐκβληθεῖσαι δὲ ἀφίστανται τῆς τομῆς μᾶλλον· παντὸς γὰρ τοῦ δοθέντος, ὃ νῦν ἀφεστήκασιν, ἔστιν ἔλασσον.*

ἔστωσαν δὴ πάλιν, ὡς ἐπὶ τῆς τετάρτης καταγραφῆς, ἀσύμπτωτοι αἱ ΕΖ, ΖΗ· φανερὸν δὴ καὶ οὕτως, ὅτι ἡ μὲν ΓΑ ἔγγιόν ἐστι τῆς τομῆς ἤπερ ἡ ΕΖ, ἐάν τε ἡ ΕΖ τῇ ΓΑ ἄλλαι ἀσύμπτωτοι, πλησιέστεραι εἶναι πρὸς τὴν τομὴν αἱ προλεχθεῖσαι.

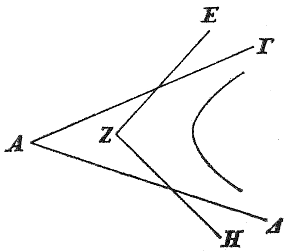
Ἔστω ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἀσύμπτωτοι εἶναι αἱ ΓΑ, ΑΔ. Λέγω, ὅτι, ἐὰν ὑπάρχωσι μερικαὶ ἄλλαι ἀσύμπτωτοι τῆς τομῆς, αἱ ΓΑ, ΑΔ εἶναι πλησιέστερον ἐκείνων.

Ὅτι μὲν λοιπόν, ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα, δὲν εἶναι δυνατὸν αἱ ΕΖ, ΖΗ νὰ εἶναι ἀσύμπτωτοι, εἶναι φανερόν, ὥστε νὰ εἶναι παράλληλος ἡ μὲν ΕΖ πρὸς τὴν ΓΑ, ἡ δὲ ΖΗ πρὸς τὴν ΑΔ· διότι ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι θὰ συναντήσωσι τὴν τομήν· διότι εὑρίσκονται αὗται εἰς τὸν τόπον τὸν καθοριζόμενον ὑπὸ τῆς τομῆς καὶ τῶν ἀσυμπτώτων.

Ἐὰν δὲ εἶναι, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας περιπτώσεως, ἀσύμπτωτοι αἱ ΕΖ, ΖΗ, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ΓΑ, ΑΔ, εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν τομὴν αἱ ΓΑ, ΑΔ παρὰ αἱ ΕΖ, ΖΗ.

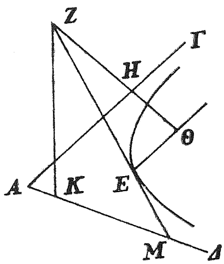
Ἐὰν δὲ εἶναι ἀσύμπτωτοι, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης περιπτώσεως αἱ ΓΑ, ΑΔ, ἐὰν ἐκβληθῶσιν ἐπ' ἄπειρον, πλησιάζουσι πρὸς τὴν τομὴν καὶ φθάνουσι πάντοτε εἰς μικρότερον διάστημα (ἀπόστασιν) παντὸς δοθέντος διαστήματος (ὁσονδήποτε μικροῦ), αἱ δὲ ΕΖ, ΖΗ κατὰ μὲν τὸ Ζ καὶ τὰ πλησίον αὐτοῦ, εὑρισκόμενα ἐντὸς τῆς γωνίας, εἶναι πλησίον τῆς τομῆς, ἀφοῦ ὅμως προεκβληθῶσιν ἀπομακρύνονται τῆς τομῆς περισσότερον· διότι ἡ τωρινή των ἀπόστασις εἶναι μικροτέρα πάσης δοθείσης.

Ἔστωσαν τώρα πάλιν, ὡς εἰς τὸ τέταρτον σχῆμα, ἀσύμπτωτοι αἱ ΕΖ, ΖΗ· καὶ τώρα εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ μὲν ΓΑ εἶναι πλησιέστερον τῆς τομῆς παρὰ ἡ ΕΖ, εἴτε ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος παράλληλός ἐστιν, ἐάν τε συμπίπτῃ τῇ ΓΑ. καὶ ἐὰν μὲν ἡ σύμπτωσις ἀνώτερον ᾖ τῆς διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένης τῆς τομῆς, τέμνει τὴν τομήν, ἐὰν δὲ ἡ σύμπτωσις ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ ᾖ τῆς τε ἐφαπτομένης καὶ τῆς γωνίας, ὥσπερ καὶ ἡ ΖΗ, κατὰ τὰ αὐτὰ τῷ ἐπάνω ἡ ΘΗ τῆς τομῆς οὐκ ἀφέξει ἔλασσον διάστημα παντὸς τοῦ δοθέντος· ὥστε ἡ ΓΑ ἔγγιόν ἐστι τῆς τομῆς, ἤπερ ἡ ΕΖ ἐστιν. ἡ δὲ ΔΑ ἔγγιον τῆς τομῆς ἤπερ ἡ ΖΗ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς.



ὅτι δὲ ἡ ἀνωτέρω τῆς διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένης συμπί-
H300 πτουσα τῇ ΓΑ συμπίπτει καὶ τῇ τομῇ, οὕτως δείκνυται.

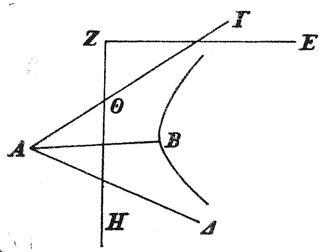
...... καὶ ἡ ΖΕ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς κατὰ τὸ Ε, ἡ δὲ σύμπτωσις τῇ ΓΑ ἀνώτερον τῇ ΖΗ. λέγω, ὅτι ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.



ἤχθω γὰρ διὰ τῆς Ε ἁφῆς παράλληλος τῇ ΓΑ ἀσυμπτώτῳ ἡ ΕΘ· ἡ ΕΘ ἄρα κατὰ μόνον τὸ Ε τέμνει τὴν τομήν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΑ τῇ ΕΘ παράλληλός ἐστιν, καὶ τῇ ΑΗ συμπίπτει ἡ ΖΗ, καὶ τῇ ΕΘ ἄρα συμπεσεῖται· ὥστε καὶ τῇ τομῇ.

Εἴ τίς ἐστιν εὐθύγραμμος γωνία περιέχουσα τὴν ὑπερβολὴν ἑτέρα τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολήν, οὐκ ἔστιν ἐλάσσων τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολήν.

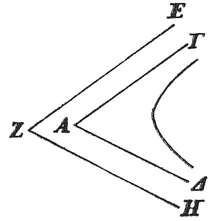
πρὸς τὴν ΓΑ, εἴτε συναντᾷ τὴν ΓΑ. Καὶ ἐὰν μὲν ἡ συνάντησις εἶναι ὑψηλότερον τῆς διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένης τῆς τομῆς, τέμνει τὴν τομήν, ἐὰν δὲ ἡ συνάντησις γίνεται εἰς τὸν τόπον, τὸν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς γωνίας, ὅπως ἡ ΖΗ, κατὰ τὰ αὐτά, ὡς ἀνωτέρω, ἡ ΘΗ δὲν θὰ ἀπέχῃ τῆς τομῆς μικρότερον διάστημα ἀπὸ πᾶν δοθὲν (ὁσονδήποτε μικρόν)· ὥστε ἡ ΓΑ εἶναι πλησιέστερον τῆς τομῆς, παρὰ ἡ ΕΖ. Ἡ δὲ ΔΑ εἶναι πλησιέστερον τῆς τομῆς παρὰ ἡ ΖΗ, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ὡς εἰς τὸ τρίτον σχῆμα.



Ὅτι δὲ ἡ ὑψηλότερον τῆς διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένης συναντῶσα τὴν ΓΑ συναντᾷ καὶ τὴν τομήν, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

......καὶ ἡ ΖΕ ἂς ἐφάπτηται τῆς τομῆς κατὰ τὸ Ε, ἡ δὲ συνάντησις μὲ τὴν ΓΑ ἂς εἶναι ὑψηλότερον εἰς τὴν ΖΗ. Λέγω, ὅτι ἐκβληθεῖσα θὰ συναντᾷ τὴν τομήν.

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Ε παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον ΓΑ ἡ ΕΘ· ἡ ΕΘ ἄρα μόνον εἰς τὸ Ε τέμνει τὴν τομὴν (θ. 13). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΘ καὶ ἡ ΖΗ συναντᾷ τὴν ΑΗ, θὰ συναντᾷ ἄρα καὶ τὴν ΕΘ· ὥστε καὶ τὴν τομήν.

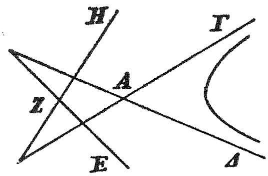


Ἐὰν ὑπάρχῃ καὶ ἄλλη εὐθύγραμμος γωνία περιέχουσα τὴν ὑπερβολήν, ἐκτὸς ἐκείνης, ἡ ὁποία περιέχει τὴν ὑπερβολήν, αὕτη δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολήν.

ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ, ἕτεραι δέ τινες ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ ἔστωσαν αἱ ΕΖΗ. λέγω, ὅτι οὐκ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία τῆς πρὸς τῷ Α.

ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ΕΖΗ ταῖς ΓΑ, ΑΔ παράλληλοι. ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία τῇ πρὸς τῷ Α· οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ τῆς πρὸς τῷ Α.

μὴ ἔστωσαν δὴ παράλληλοι, καθὼς ἐπὶ τῆς δευτέρας
H302 καταγραφῆς. φανερὸν οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία τῆς ὑπὸ ΘΑΗ.



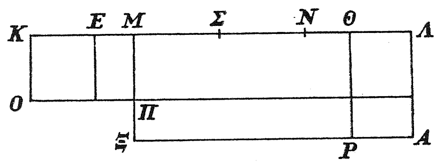
ἐπὶ δὲ τῆς γ' μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΘΑ τῆς πρὸς τῷ Α, καὶ ἔστιν ἴση ἡ πρὸς τῷ Ζ τῇ πρὸς τῷ Θ.

ἐπὶ δὲ τῆς δ' ἡ κατὰ κορυφὴν τῆς κατὰ κορυφήν ἐστι μείζων.

οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ τῆς πρὸς τῷ Α.

Εἰς τὸ κγ'

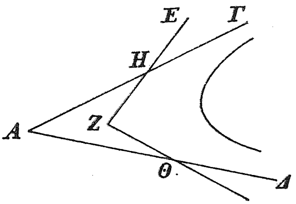
Τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ διὰ τὸ τὰς ἄκρας ἴσας εἶναι]. ἔστω εὐθεῖα ἡ ΛΚ, καὶ ἔστω ἡ ΛΘ ἴση τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΘΝ ἴση τῇ ΕΜ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Μ, Κ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΜΞ, ΚΟ, καὶ κείσθω τῇ ΜΚ ἴση ἡ ΜΞ, τῇ δὲ ΚΕ ἡ ΚΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΞΘ,

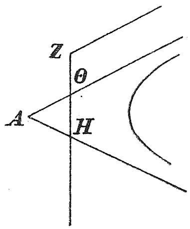


Ἔστω ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ἀσύμπτωτοι εἶναι αἱ ΓΑ, ΑΔ, ἄλλαι δὲ ἀσύμπτωτοι τῆς τομῆς ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ. Λέγω, ὅτι ἡ γωνία παρὰ τὸ Ζ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς παρὰ τὸ Α.

Διότι ἔστωσαν πρῶτον αἱ ΕΖ, ΖΗ παράλληλοι πρὸς τὰς ΓΑ, ΑΔ. Εἶναι ἄρα ἡ παρὰ τὸ Ζ γωνία ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Α· δὲν εἶναι ἄρα μικροτέρα ἡ γωνία παρὰ τὸ Ζ τῆς παρὰ τὸ Α.

Ἀλλ' ἂς μὴ εἶναι παράλληλοι ὡς εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι εἶναι ἡ παρὰ τὸ Ζ γωνία > γων. ΘΑΗ (Εὐκλείδης 1, 21).





Εἰς δὲ τὸ τρίτον σχῆμα ἡ γων. ΖΘΑ > γων. Α, καὶ γων. Ζ = γων. Θ.

Εἰς δὲ τὸ τέταρτον σχῆμα ἡ κατὰ κορυφὴν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κατὰ κορυφήν.

Δὲν εἶναι ἄρα γων. Ζ μικροτέρα τῆς γων. Α.

Εἰς τὸ 23

Τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΘΜxΜΕ + ΘΚxΚΕ = ΛΜxΜΚ, διότι τὰ ἄκρα εἶναι ἴσα]. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΛΚ καὶ ἡ ΛΘ = ΕΚ, καὶ ΘΝ = ΕΜ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Μ, Κ κάθετοι αἱ ΜΞ, ΚΟ, καὶ ἂς ληφθῇ ΜΚ = ΜΞ, καὶ ΚΕ = ΚΟ, καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ παραλληλό-

ΘΑ παραλληλόγραμμα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΞ, τουτέστι τῇ ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΕΚ, τουτέστι τῇ ΚΟ, ἴσον ἄρα τὸ ΘΑ τῷ ΜΟ.

H304 κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΛΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΘ καὶ ΜΟ, τουτέστι τῷ ΘΟ καὶ ΠΡ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΛΞ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΜΚ, τὸ δὲ ΘΟ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ, τὸ δὲ ΠΡ τὸ ὑπὸ ΘΜΕ [τουτέστιν ὑπὸ ΠΞΡ].

ἔστι δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι τὸ αὐτό.

τετμήσθω ἡ ΜΝ δίχα κατὰ τὸ Σ. φανερὸν δή, ὅτι καὶ ἡ ΛΚ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Σ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΕΚ· ἴση γὰρ ἡ ΘΚ τῇ ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΛΚ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Σ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ὑπὸ ΛΕΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΣ. τὸ δὲ ἀπὸ ΣΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΣΚ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΛΕΚ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΘΚΕ, καὶ τῷ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ. διὰ ταὐτὰ δὴ τὸ ἀπὸ ΣΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΘΚΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΣΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΣΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΚΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΜΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ.

Εἰς τὸ κδ'

Δεῖ σημειώσασθαι, ὅτι συμπτώσεις καλεῖ τὰ σημεῖα,
H306 καθ᾽ ἃ συμβάλλουσι τῇ τομῇ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι. καὶ δεῖ, φησίν, παρατηρεῖν, ὥστε ἐκτὸς εἶναι ἀλλήλων τὰ σημεῖα, ἀλλὰ μὴ τὰ Α, Β . . . . .

γραμμα ΞΘ, ΘΑ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ $MK = M\Xi = \Pi O$, εἶναι δὲ καὶ $\Lambda\Theta = EK = KO$, εἶναι ἄρα τὸ $\Theta A = MO$.

Ἂς προστεθῇ τὸ ΞΘ· ὅλον ἄρα τὸ $\Lambda\Xi = \Xi\Theta + MO = \Theta O + \Pi P$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $\Lambda\Xi = \Lambda M x MK$, τὸ δὲ $\Theta O = \Theta K x KE$, τὸ δὲ $\Pi P = \Theta M x ME = [\Pi\Xi x \Xi P]$.

Τὸ ἴδιον δὲ εἶναι δυνατὸν νὰ δειχθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον.

Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Σ. Εἶναι τώρα φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ΛΚ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Σ, καὶ ὅτι τὸ $\Theta K x KE = \Lambda E x EK$· διότι εἶναι $\Theta K = \Lambda E$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΛΚ ἔχει τμηθῇ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Σ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ε, εἶναι τὸ $\Lambda E x EK + \Sigma E^2 = K\Sigma^2$ (Εὐκλ. 2, 5). Εἶναι δὲ $\Sigma E^2 = \Theta M x ME + \Sigma M^2$ (Εὐκλ. 2, 6)· ὥστε $\Sigma K^2 = \Lambda E x EK + \Theta M x ME + \Sigma M^2 = \Theta K x KE + \Theta M x ME + \Sigma M^2$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ $\Sigma K^2 = \Lambda M x MK + \Sigma M^2$ (Εὐκλ. 2, 5)· ὥστε τὸ $\Theta K x KE + \Theta M x ME + \Sigma M^2 = \Lambda M x MK + \Sigma M^2$. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΣM^2· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $\Theta K x KE + \Theta M x ME = \Lambda M x MK$.

Εἰς τὸ 24

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι συναντήσεις καλεῖ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ συναντῶσι τὴν τομήν. Καὶ πρέπει, λέγει, νὰ παρατηρηθῇ, ὥστε τὰ σημεῖα νὰ μὴ συμπίπτωσιν, ἀλλ' ὄχι τὰ Α, Β . . .

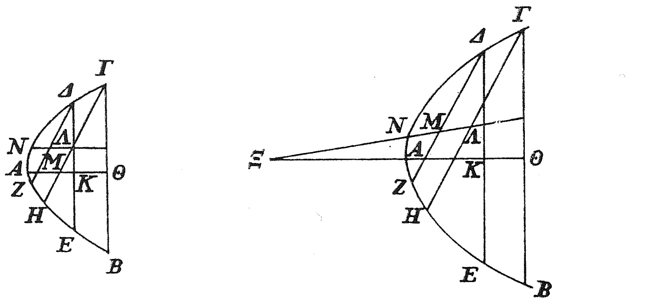
δεῖ δὲ εἰδέναι, ὅτι καὶ ἐπὶ ἐφαπτομένων τὰ αὐτὰ συμβαίνει.

Εἰς τὸ κη´

Ἄξιον ἐπισκέψασθαι τὴν δοθεῖσαν ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλην γραμμήν, πότερον κύκλου ἐστὶ περιφέρεια ἢ ἑτέρα τις τῶν τριῶν τοῦ κώνου τομῶν ἢ ἄλλη παρὰ ταύτας.

ἔστω δὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ προκείσθω τὸ εἶδος αὐτῆς ἐπισκέψασθαι τὸν εἰρημένον τρόπον.

εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὰ Γ, Δ, καὶ



ἤχθωσαν διὰ τῶν Γ, Δ σημείων παράλληλοι ἀλλήλαις εὐθεῖαί τινες αἱ ΓΒ, ΔΕ ἐντὸς ἀπολαμβανόμεναι τῆς γραμμῆς,
H308 *καὶ πάλιν ἀπὸ τῶν Γ, Δ ἕτεραι παράλληλοι αἱ ΓΗ, ΔΖ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα αἱ μὲν ΓΒ, ΔΕ κατὰ τὰ Θ, Κ, αἱ δὲ ΓΗ, ΔΖ κατὰ τὰ Λ, Μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΚ, ΛΜ.*

εἰ μὲν οὖν πᾶσαι αἱ τῇ ΒΓ παράλληλοι ὑπὸ τῆς ΚΘ διχοτομοῦνται, πᾶσαι δὲ αἱ τῇ ΓΗ ὑπὸ τῆς ΜΛ, μία ἐστὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἡ ΒΑΓ διαμέτρους ἔχουσα τὰς ΘΚ, ΜΛ, εἰ δὲ μή, οὔ.

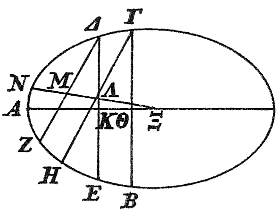
Πρέπει δὲ νὰ γνωρίζωμεν, ὅτι τὰ αὐτὰ συμβαίνουσι καὶ ἐπὶ ἐφαπτομένων.

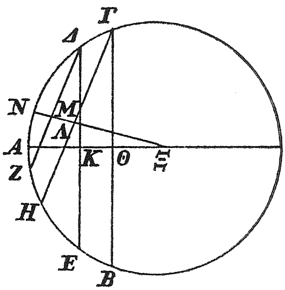
Εἰς τὸ 28

Ἀξίζει νὰ ἐρευνηθῇ ἂν ἡ δοθεῖσα εἰς τὸ ἐπίπεδον καμπύλη γραμμή, εἶναι τόξον κύκλου ἢ ἄλλη τις ἐκ τῶν τριῶν τομῶν τοῦ κώνου, ἢ ἄλλη ἐκτὸς τούτων.

Ἔστω λοιπὸν ἡ ΑΒΓ καὶ ἃς προτεθῇ νὰ ἐρευνηθῇ τὸ εἶδος αὐτῆς κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον.

Ἂς ληφθῶσι μερικὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὰ Γ, Δ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν διὰ τῶν σημείων Γ, Δ παράλληλοι μεταξύ των εὐ-





θεῖαι αἱ ΓΒ, ΔΕ ἀπολαμβανόμεναι ἐντὸς τῆς γραμμῆς, καὶ πάλιν ἀπὸ τῶν Γ, Δ ἄλλαι παράλληλοι αἱ ΓΗ, ΔΖ, καὶ ἃς τμηθῶσιν εἰς τὸ μέσον αἱ μὲν ΓΒ, ΔΕ κατὰ τὰ Θ, Κ, αἱ δὲ ΓΗ, ΔΖ κατὰ τὰ Λ, Μ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΘΚ, ΛΜ.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν ὅλαι αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ διχοτομοῦνται ὑπὸ τῆς ΚΘ, ὅλαι δὲ αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ΓΗ διχοτομοῦνται ὑπὸ τῆς ΜΛ, ὑπάρχει μία τῶν τομῶν τοῦ κώνου ἡ ΒΑΓ ἔχουσα διαμέτρους τὰς ΘΚ, ΜΛ, ἐὰν δὲ δὲν διχοτομοῦνται δὲν ὑπάρχει.

πάλιν δέ, ποία τῶν $\overline{δ}$ ἐστίν, εὑρίσκομεν ἐκβάλλοντες εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη τὰς ΘΚ, ΛΜ. ἤτοι γὰρ παράλληλοί εἰσιν, καὶ ἔστι παραβολή, ἢ ἐπὶ τὰ Θ, Λ μέρη συμπίπτουσιν, καὶ ἔστιν ἔλλειψις ἢ κύκλος, ἢ ἐπὶ τὰ ἕτερα, καὶ ἔστιν ὑπερβολή. τὴν δὲ ἔλλειψιν τοῦ κύκλου διακρινοῦμεν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς συμπτώσεως τῶν ΑΘ, ΝΛ, ὅπερ κέντρον γίνεται. εἰ μὲν γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν γραμμὴν προσπίπτουσαι, δῆλον, ὅτι κύκλου ἐστὶ περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, εἰ δὲ μή, ἔλλειψις.

Ἔστιν αὐτὰς διακρῖναι καὶ ἄλλως ἀπὸ τῶν τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον καταγομένων, οἷον τῶν ΓΘ, ΔΚ. εἰ μὲν γὰρ εἴη, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΚ, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, παραβολή ἐστιν, εἰ δὲ τὸ ἀπὸ ΘΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, ὑπερβολή, εἰ δὲ ἐλάττονα, ἔλλειψις.

Καὶ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων δυνατόν ἐστιν αὐτὰς διακρῖναι ἀναμνησθέντας τῶν εἰρημένων αὐταῖς ὑπάρχειν ἀνωτέρω.

Η310 Εἰς τὸ μη′

Ἔστωσαν δύο μεγέθη ἴσα τὰ ΑΒ, ΓΔ καὶ διῃρήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὰ Ε, Ζ. λέγω, ὅτι, ᾧ διαφέρει τὸ ΑΕ τοῦ ΖΓ, τούτῳ διαφέρει τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ.

κείσθω τῷ ΓΖ ἴσον τὸ ΑΗ· τὸ ΕΗ ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν ΑΗ, ΑΕ, τουτέστι τῶν ΓΖ, ΑΕ· τὸ γὰρ ΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΖ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ τῷ ΖΔ ἐστιν ἴσον. ὥστε τὸ ΕΗ ὑπεροχή ἐστι τῶν ΕΒ, ΒΗ ἤτοι τῶν ΕΒ, ΖΔ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν $\overline{δ}$ μεγέθη τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, καὶ

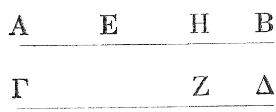
Πάλιν δέ, ποία εἶναι ἐκ τῶν τεσσάρων, τὸ εὑρίσκομεν προεκτείνοντες εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τὰς ΘΚ, ΛΜ. Διότι ἢ εἶναι παράλληλοι, καὶ εἶναι παραβολή, ἢ συμπίπτουσι πρὸς τὰ μέρη Θ, Λ, καὶ εἶναι ἔλλειψις ἢ κύκλος, ἢ πρὸς τὰ ἄλλα, καὶ εἶναι ὑπερβολή. Θὰ διακρίνωμε δὲ τὴν ἔλλειψιν ἀπὸ τὸν κύκλον ἐκ τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως τῶν ΑΘ, ΝΛ, τὸ ὁποῖον γίνεται κέντρον. Διότι, ἐὰν εἶναι ἴσαι αἱ ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ πρὸς τὴν γραμμὴν προσπίπτουσαι, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΑΒΓ εἶναι περιφέρεια κύκλου, εἰ δὲ μή, εἶναι ἔλλειψις.

Εἶναι δυνατὸν νὰ διακρίνῃ κανεὶς αὐτὰς καὶ ἄλλως ἐκ τῶν καταγομένων τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὡς τῶν ΓΘ, ΔΚ. Διότι, ἐὰν ἦτο $\Gamma\Theta^2:\Delta K^2=\Theta A:AK$, εἶναι παραβολή, ἐὰν δὲ $\Theta\Gamma^2:\Delta K^2 > \Theta A:AK$, εἶναι ὑπερβολή, ἐὰν δὲ $\Theta\Gamma^2:\Delta K^2 < \Theta A:AK$, εἶναι ἔλλειψις.

Καὶ ἐκ τῶν ἐφαπτομένων εἶναι δυνατὸν νὰ διακρίνῃ κανεὶς αὐτάς, ὅταν λάβῃ ὑπ' ὄψιν τὰς ἀνωτέρω ἐκτεθείσας ἰδιότητας αὐτῶν.

Εἰς τὸ 48

Ἔστωσαν δύο μεγέθη ἴσα τὰ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἂς διαιρεθῶσιν εἰς ἄνισα κατὰ τὰ Ε, Ζ. Λέγω, ὅτι $Z\Gamma - AE = EB - Z\Delta$.



Ἂς ληφθῇ $\Gamma Z = AH$· εἶναι ἄρα $EH = AH - AE = \Gamma Z - AE$· διότι εἶναι $AH = \Gamma Z$. Ἀλλὰ καὶ $AB = \Gamma\Delta$· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα $HB = Z\Delta$. Ὥστε $EH = EB - BH = EB - Z\Delta$.

Ἀλλὰ τώρα ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ διαφερέτω, ᾧ διαφέρει τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. λέγω, ὅτι συναμφότερα τὰ ΑΕΒ συναμφοτέροις τοῖς ΓΖ, ΖΔ ἐστιν ἴσα.

κείσθω πάλιν τῷ ΓΖ ἴσον τὸ ΑΗ· τὸ ΕΗ ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν ΑΕ, ΓΖ. τῷ δὲ αὐτῷ διαφέρειν ὑπόκεινται ἀλλήλων τὰ ΕΑ, ΓΖ καὶ τὰ ΕΒ, ΖΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΒ τῷ ΖΔ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΑΗ τῷ ΓΖ· τὸ ΑΒ ἄρα τῷ ΓΔ ἐστὶν ἴσον.

φανερὸν δή, ὅτι, ἐὰν πρῶτον δευτέρου ὑπερέχῃ τινί, καὶ τρίτον τετάρτου ὑπερέχῃ τῷ αὐτῷ, ὅτι τὸ πρῶτον καὶ τὸ τέταρτον ἴσα ἐστὶ τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ κατὰ τὴν καλουμένην ἀριθμητικὴν μεσότητα. ἐὰν γὰρ τούτων H312 ὑποκειμένων ὑπάρχῃ, ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, τὸ δεύτερον πρὸς τὸ τέταρτον, ἴσον ἔσται τὸ μὲν πρῶτον τῷ τρίτῳ, τὸ δὲ δεύτερον τῷ τετάρτῳ. δυνατὸν γὰρ ἐπὶ ἄλλων τοῦτο δειχθῆναι διὰ τὸ δεδεῖχθαι ἐν τῷ κε′ θεωρήματι τοῦ ε′ βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως· ἐὰν δ̄ μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον καὶ τὸ τέταρτον δύο τῶν λοιπῶν μείζονα ἔσται.

ΖΔ, καὶ ΓΖ—ΑΕ=ΕΒ—ΖΔ. Λέγω, ὅτι ΑΕ + ΕΒ = ΓΖ + ΖΔ.

Ἄς ληφθῇ πάλιν ΓΖ=ΑΗ· εἶναι ἄρα ΕΗ=ΓΖ—ΑΕ. Ὑπετέθη δὲ ΓΖ—ΕΑ = ΕΒ—ΖΔ· εἶναι ἄρα ΗΒ=ΖΔ. Ἀλλ' εἶναι καὶ ΑΗ=ΓΖ· εἶναι ἄρα καὶ ΑΒ=ΓΔ.

Τώρα εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν πρῶτον ὑπερέχῃ δευτέρου κατά τινα ποσότητα, καὶ τρίτον ὑπερέχῃ τετάρτου κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα, ὅτι τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ τετάρτου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα δευτέρου καὶ τρίτου [συμφώνως πρὸς τὴν καλουμένην ἀριθμητικὴν μεσότητα.

Τούτων δοθέντων, ἐὰν εἶναι, ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον = δεύτερον πρὸς τέταρτον, θὰ εἶναι ἴσον τὸ μὲν πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, τὸ δὲ δεύτερον πρὸς τὸ τέταρτον. Διότι εἶναι δυνατὸν νὰ δεχθῇ τοῦτο ἐπὶ ἄλλων, διότι ἀπεδείχθη εἰς τὸ 25ον θεώρημα τοῦ 5ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου· ἤτοι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ τετάρτου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων (Σημείωσις: Τὸ θεώρημα 5, 25 τοῦ Εὐκλείδου δὲν λέγει αὐτά, ἀλλ' ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων).

H314 ## Εἰς τὸ τρίτον

Τὸ τρίτον τῶν Κωνικῶν, ὦ φίλτατέ μοι Ἀνθέμιε, πολλῆς μὲν φροντίδος ὑπὸ τῶν παλαιῶν ἠξίωται, ὡς αἱ πολύτροποι αὐτοῦ ἐκδόσεις δηλοῦσιν, οὔτε δὲ ἐπιστολὴν ἔχει προγεγραμμένην, καθάπερ τὰ ἄλλα, οὐδὲ σχόλια εἰς αὐτὸ ἄξια λόγου τῶν πρὸ ἡμῶν εὑρίσκεται, καίτοι τῶν ἐν αὐτῷ ἀξίων ὄντων θεωρίας, ὡς καὶ αὐτὸς Ἀπολλώνιος ἐν τῷ προοιμίῳ τοῦ παντὸς βιβλίου φησίν. πάντα δὲ ὑφ᾿ ἡμῶν σαφῶς ἔκκειταί σοι δεικνύμενα διὰ τῶν προλαβόντων βιβλίων καὶ τῶν εἰς αὐτὰ σχολίων.

Εἰς τὸ α′

Ἔστι δὲ καὶ ἄλλη ἀπόδειξις.

ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς, ἐπειδὴ ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, καὶ κατῆκται ἡ ΑΖ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΖ. ἀλλὰ ἡ ΒΖ τῇ ΑΔ ἴση· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ παράλληλος· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ.

ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ λεκτέον· ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ· παράλληλος γὰρ ἡ
H316 ΑΖ τῇ ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ.

Σχόλια εἰς τὸ τρίτον βιβλίον

Τὸ τρίτον τῶν Κωνικῶν, ὦ φίλτατέ μου Ἀνθέμιε, ἠξιώθη πολλῆς προσοχῆς ἀπὸ τοὺς παλαιούς, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰς ποικίλας ἐκδόσεις αὐτοῦ, δὲν ἔχει δὲ προεισαγωγικὴν ἐπιστολήν, ὅπως τὰ ἄλλα βιβλία, οὔτε εὑρίσκονται σχόλια εἰς αὐτὸ ἄξια λόγου, ἐκτὸς τῶν ἰδικῶν μου, καίτοι τὸ περιεχόμενον τοῦ βιβλίου εἶναι περισπούδαστον, ὅπως καὶ ὁ ἴδιος ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὸ προοίμιον ὁλοκλήρου τοῦ βιβλίου λέγει. Ὅλα δὲ τὰ ἔχεις ἀπὸ ἐμὲ σαφῶς ἀποδεδειγμένα διὰ τῶν προηγουμένων βιβλίων καὶ τῶν εἰς αὐτὰ σχολίων.

Εἰς τὸ 1

Ὑπάρχει δὲ καὶ ἄλλη ἀπόδειξις.

Εἰς τὴν παραβολήν, ἐπειδὴ ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, καὶ ἔχει καταχθῆ ἡ ΑΖ, εἶναι ΓΒ = ΒΖ. Ἀλλὰ εἶναι καὶ ΒΖ = ΑΔ· εἶναι ἄρα καὶ ΑΔ = ΓΒ. εἶναι δὲ καὶ παράλληλος πρὸς αὐτήν· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΔΕ ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΒΕ.

Διὰ τὰς λοιπὰς ἀχθείσας τὰς ΑΒ, ΓΔ πρέπει νὰ εἴπωμεν·

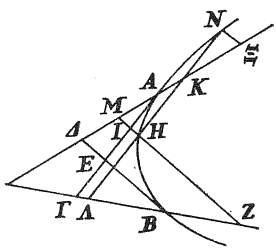
Ἐπειδὴ εἶναι ΖΗ:ΗΒ = ΒΗ:ΗΓ, καὶ ΖΗ:ΗΒ = ΑΗ:ΗΔ· διότι ἡ ΑΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ΒΗ: ΗΓ = ΑΗ:ΗΔ. Εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. ἴσον ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΓΔΕ λοιπὸν τὸ ΑΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒΕ.

περὶ δὲ τῶν πτώσεων λεκτέον, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ὑπερβολῆς οὐκ ἔχει, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἔχει δύο· αἱ γὰρ ἐφαπτόμεναι κατὰ τὰς ἁφὰς μόνον συμβάλλουσαι ταῖς διαμέτροις καὶ ἐκβαλλομέναις αὐταῖς συμπίπτουσιν, ἢ ὡς ἐν τῷ ῥητῷ κεῖται, ἢ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη, καθ᾽ ἅ ἐστι τὸ Ε, ὥσπερ ἔχει καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς.

Εἰς τὸ β′

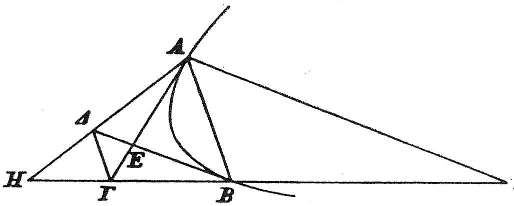
Τὰς πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος εὑρήσεις διὰ τοῦ μβ′ καὶ μγ′ θεωρήματος τοῦ α′ βιβλίου καὶ τῶν εἰς αὐτὰ γεγραμμένων σχολίων. δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅτι, ἐὰν τὸ Η σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Β ληφθῇ ὥστε τὰς παραλλήλους εἶναι ὡς τὰς ΜΙΗΖ, ΛΗΚ, ἐκβάλλειν δεῖ τὴν ΛΚ μέχρι τῆς τομῆς ὡς κατὰ τὸ Ν καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΒΔ παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν ΝΞ· ἔσται γὰρ διὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῷ α′ βιβλίῳ κατὰ τὸ μθ′ καὶ ν′ θεώρημα καὶ τὸ τούτων σχόλιον



H318 *τὸ ΚΝΞ τρίγωνον τῷ ΚΓ τετραπλεύρῳ ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΚΞΝ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΚΜΗ, διότι παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΗ τῇ ΝΞ· ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἴσον, διότι ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΑΓ, παράλληλος δὲ αὐτῇ ἡ ΗΝ, καὶ διάμετρος ἡ ΜΞ, καὶ*

Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΔΓ = τρίγ. ΒΓΔ, καὶ ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΓΔΕ τὸ ὑπόλοιπον ΑΔΕ = ΓΒΕ.

Διὰ τὰς περιπτώσεις δὲ πρέπει νὰ λεχθῇ, ὅτι εἰς μὲν τὴν παραβολὴν καὶ τὴν ὑπερβολὴν δὲν ὑπάρχουσι, εἰς δὲ τὴν ἔλλει-



ψιν ὑπάρχουσι δύο· διότι αἱ ἐφαπτόμεναι συναντῶνται μόνον εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῶν μὲ τὰς διαμέτρους καὶ ὅταν προεκβληθῶσι συναντῶνται, ἢ ὅπως τὸ λέγει τὸ θεώρημα, ἢ εἰς τὰ ἄλλα μέρη, ὅπου εἶναι τὸ Ε, ὅπως εἶναι καὶ εἰς τὴν ὑπερβολήν.

Εἰς τὸ 2

Τὰς περιπτώσεις τοῦ θεωρήματος τούτου θὰ εὕρῃς διὰ τοῦ 42 καὶ 43 θ. καὶ τῶν εἰς αὐτὰ σχολίων τοῦ α′ βιβλίου. Πρέπει ὅμως νὰ ἐπισημειωθῇ, ὅτι, ἐὰν τὸ σημεῖον Η ληφθῇ μεταξὺ τῶν Α, Β, ὥστε αἱ παράλληλοι νὰ εἶναι ὡς αἱ ΜΙΗΖ, ΛΗΚ, τότε ἡ ΛΚ πρέπει νὰ ἐκβληθῇ μέχρι τῆς τομῆς, ὡς κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΝΞ· διότι, ἕνεκα τῶν λεχθέντων εἰς τὰ θεωρήματα 49 καὶ 50 τοῦ πρώτου βιβλίου καὶ τὸ σχόλιον εἰς αὐτά, θὰ εἶναι τὸ τρίγωνον ΚΝΞ = ΚΓ τετράπλευρον. Ἀλλὰ τὸ ΚΞΝ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΚΜΗ, διότι ἡ ΜΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΝΞ· εἶναι δὲ καὶ ἴσον πρὸς αὐτό, διότι ἡ ΑΓ εἶναι ἐφαπτομένη, παράλληλος δὲ πρὸς αὐτὴν ἡ ΗΝ, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΚΝ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΝΞ τῷ τε ΚΓ καὶ τῷ ΚΜΗ, κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΑΗ λοιπὸν τὸ ΑΙΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΗ.

Εἰς τὸ γ'

Τὸ θεώρημα τοῦτο πλείους ἔχει πτώσεις, ἃς εὑρήσομεν ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ. δεῖ μέντοι ἐπισκῆψαι, ὅτι τὰ λαμβανόμενα δύο σημεῖα ἢ μεταξύ ἐστι τῶν δύο διαμέτρων ἢ τὰ δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· εἰ γὰρ τὸ μὲν ἕτερον ἐκτὸς λάβωμεν, τὸ δὲ ἕτερον μεταξὺ τῶν διαμέτρων, οὐ συνίσταται τὰ ἐν τῇ προτάσει λεγόμενα τετράπλευρα, ἀλλ' οὐδὲ ἐφ' ἑκάτερα τῶν διαμέτρων.

Εἰς τὸ δ'

Ἐν τῇ προτάσει τούτου τοῦ θεωρήματος καὶ τῶν ἐφεξῆς δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι τῶν ἀντικειμένων λέγει ἀδιορίστως, καὶ τινὰ μὲν τῶν ἀντιγράφων τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς τομῆς ἔχει, τινὰ δὲ οὐκέτι τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς, ἀλλ' ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν μίαν συμπιπτούσας ἀλλήλαις, ὡς εἴρηται ἐν τῷ β' βιβλίῳ, ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ οὕτως δὲ κἀκείνως συμβαίνει τὰ τῆς προτάσεως, ὡς ἔξεστι τοῖς βουλομένοις καταγράφουσιν ἐπι-
H320 σκέπτεσθαι, πλὴν ὅτι, εἰ μὲν τῆς μιᾶς τῶν τομῶν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτονται, ἡ διὰ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου ἡ πλαγία διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων, εἰ δὲ ἑκατέρας μία ἐστὶν ἐφαπτομένη, ἡ διὰ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν καὶ τοῦ

καὶ διάμετρος ἡ ΜΞ, καὶ εἶναι ΗΚ=ΚΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΚΝΞ=ΚΓ+ΚΜΗ, ἀφοῦ ἀφαιρεθῆ τὸ κοινὸν ΑΗ, τὸ ὑπόλοιπον ΑΙΜ=ΓΗ.

Εἰς τὸ 3

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει πολλὰς περιπτώσεις, τὰς ὁποίας θὰ εὕρωμεν ὁμοίως, ὅπως εἰς τὸ πρὸ αὐτοῦ. Πρέπει δὲ νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει, ὅτι τὰ λαμβανόμενα δύο σημεῖα ἢ εἶναι μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων ἢ τὰ δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· διότι, ἐὰν μὲν λάβωμεν τὸ ἓν ἐκτός, τὸ δὲ ἄλλο μεταξὺ τῶν διαμέτρων, δὲν συντίθενται τὰ εἰς τὴν πρότασιν λεγόμενα τετράπλευρα, ἀλλὰ καὶ ὅταν εἶναι καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τῶν διαμέτρων.

Εἰς τὸ 4

Εἰς τὴν πρότασιν τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ τῶν ἑπομένων πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ὁμιλεῖ διὰ τὰς ἀντικειμένας ἀορίστως (ἄνευ περιορισμῶν), καὶ μερικὰ μὲν τῶν ἀντιγράφων (χειρογράφων) ἔχουσι τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς τομῆς, μερικὰ δὲ δὲν ἔχουσι τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς (τομῆς) ἀλλ' ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν μίαν ἐφαπτομένην, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται μεταξύ των, ὡς ἐλέχθη εἰς τὸ 2ον βιβλίον, εἰς τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων, τοιουτοτρόπως δὲ καὶ εἰς ἐκεῖνα συμβαίνουσι τὰ τῆς προτάσεως, ὅπως ἐπιτρέπεται εἰς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ σχεδιάσωσι, νὰ σκεφθῶσι, πλὴν τοῦ ὅτι, ἐὰν μὲν ἐπὶ μιᾶς τῶν τομῶν ἐφάπτωνται δύο εὐθεῖαι, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου συναντήσεως αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου εἶναι ἡ πλαγία διάμετρος τῶν ἀντικειμένων, ἐὰν δὲ εἶναι ἐφαπτομένη ἑκατέρας, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου συναντήσεως αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου

κέντρου ἡ ὀρθία διάμετρός ἐστιν.

Εἰς τὸ ε'

Ἐπειδὴ ἀσαφές ἐστι τὸ ε' θεώρημα, λεκτέον ἐπὶ μὲν τῆς καταγραφῆς τῆς ἐχούσης τὴν μίαν ὀρθίαν διάμετρον·

ἐπεὶ δέδεικται τὸ ΗΘΜ τοῦ ΓΛΘ μεῖζον τῷ ΓΔΖ, ἴσον ἂν εἴη τὸ ΗΘΜ τῷ ΓΘΛ καὶ τῷ ΓΔΖ· ὥστε καὶ τῷ ΚΔΘ μετὰ τοῦ ΖΛΚ. τὸ ἄρα ΗΜΘ τοῦ ΚΔΘ διαφέρει τῷ ΖΛΚ. κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΘΔΚ λοιπὸν τὸ ΚΛΖ ἴσον τῷ ΚΔΜΗ.

ἐπὶ δὲ τῆς ἐχούσης τὴν πλαγίαν διάμετρον·

ἐπειδὴ προδέδεικται τὸ ΓΛΘ τοῦ ΜΘΗ μεῖζον τῷ ΓΔΖ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘΛ τῷ ΘΗΜ μετὰ τοῦ ΓΔΖ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΔΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΗΜ μετὰ τοῦ ΚΛΖ. ἔτι κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΜΘΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΖΛ τῷ ΔΜΗΚ ἴσον.

πτώσεις δὲ ἔχει πολλάς, αἷς δεῖ ἐφιστάνειν ἀπὸ τῶν δεδειγμένων ἐν τῷ μδ' καὶ με' θεωρήματι τοῦ α' βιβλίου.

ἐν δὲ τῷ λέγειν ἀφῃρήσθω ἢ προσκείσθω τετράπλευρον ἢ τρίγωνον τὰς ἀφαιρέσεις ἢ προσθέσεις κατὰ τὴν οἰκειότητα τῶν πτώσεων χρὴ ποιεῖσθαι.

H332 ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐφεξῆς πολύπτωτά ἐστι διὰ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα καὶ τὰς παραλλήλους, ἵνα μὴ ὄχλον παρέχωμεν τοῖς ὑπομνήμασι πολλὰς ποιοῦντες καταγραφάς, καθ' ἕκαστον τῶν θεωρημάτων μίαν ποιοῦμεν ἔχουσαν τὰς ἀντικειμένας καὶ τὰς διαμέτρους καὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἵνα σῴζηται τὸ ἐν τῇ προτάσει λεγόμενον τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, εἶναι ἡ παράμετρος.

Εἰς τὸ 5

Ἐπειδὴ τὸ 5ον θεώρημα εἶναι ἀσαφές, πρέπει νὰ λεχθῇ ἐπὶ μὲν τοῦ σχήματος τοῦ ἔχοντος μίαν ὀρθίαν διάμετρον (παράμετρον) τὸ ἑξῆς·

Ἐπειδὴ ἀπεδείχθη (1, 45) τὸ ΗΘΜ τοῦ ΓΛΘ μεγαλύτερον κατὰ τὸ τρίγωνον ΓΔΖ, θὰ ἦτο ΗΘΜ = ΓΘΛ + ΓΔΖ· ὥστε καὶ = ΚΔΘ + ΖΛΚ. Εἶναι ἄρα ΗΘΜ — ΚΔΘ = ΖΛΚ. Ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΘΔΚ, θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον ΚΛΖ = ΚΔΜΗ.

Εἰς δὲ τὴν ἔχουσαν τὴν πλαγίαν διάμετρον·

Ἐπειδὴ ἀπεδείχθη (1, 45), ὅτι τὸ ΓΛΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΜΘΗ κατὰ τὸ ΓΔΖ, εἶναι ἄρα ΓΘΛ = ΘΗΜ + ΓΔΖ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΓΔΚΛ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΚΘΔ = ΘΗΜ + ΚΛΖ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀκόμη τὸ κοινὸν ΜΘΗ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΚΖΛ = ΔΜΗΚ.

Περιπτώσεις δὲ ἔχει πολλάς, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ παρακολουθήσωμεν ἐκ τῶν ἀποδειχθέντων εἰς τὸ 44 καὶ 45 θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου.

Ὅπου δὲ λέγει νὰ ἀφαιρεθῇ ἢ νὰ προστεθῇ τετράπλευρον ἢ τρίγωνον πρέπει νὰ ἐνεργῶμεν ἀναλόγως τῶν περιπτώσεων.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα ἔχουσι πολλὰς περιπτώσεις ἕνεκα τῶν λαμβανομένων σημείων καὶ τῶν παραλλήλων, διὰ νὰ μὴ κάμωμεν πλῆθος σχολίων μὲ πολλὰ σχήματα, δι' ἕκαστον τῶν θεωρημάτων σχεδιάζομεν ἓν σχῆμα ἔχον τὰς ἀντικειμένας καὶ τὰς διαμέτρους καὶ τὰς ἐφαπτομένας, διὰ νὰ διατηρῆται τὸ εἰς τὴν πρότασιν λεγόμενον ὑπὸ τὰς αὐτὰς ὑποθέσεις, καὶ τὰς παραλλήλους πάσας ποιοῦμεν συμπίπτειν καὶ στοιχεῖα τίθεμεν καθ' ἑκάστην σύμπτωσιν, ἵνα φυλάττων τις τὰ ἀκόλουθα δύνηται πάσας τὰς πτώσεις ἀποδεικνύειν.

Εἰς τὸ ς'

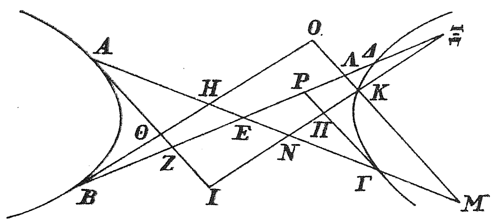
Αἱ πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος καὶ τῶν ἐφεξῆς πάντων, ὡς εἴρηται ἐν τοῖς τοῦ ε' θεωρήματος σχολίοις, πολλαί εἰσιν, ἐπὶ πασῶν μέντοι τὰ αὐτὰ συμβαίνει. ὑπὲρ δὲ πλείονος σαφηνείας ὑπογεγράφθω μία ἐξ αὐτῶν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΠΡ· φανερὸν δή, ὅτι παράλληλός ἐστι τῇ ΑΖ καὶ τῇ ΜΛ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ θεωρήματι κατὰ τὴν τῆς ὑπερβολῆς καταγραφὴν τὸ ΠΝΓ τρίγωνον τῷ ΛΠ τετραπλεύρῳ ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΜΠ· τὸ ἄρα ΜΚΝ τρίγωνον τῷ ΜΛΡΓ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΡΕ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ΑΕΖ
H324 διὰ τὰ ἐν τῷ μδ' τοῦ α' βιβλίου· ὅλον ἄρα τὸ ΜΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΚΝ καὶ τῷ ΑΕΖ. κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΚΜΝ λοιπὸν τὸ ΑΕΖ τῷ ΚΛΕΝ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΖΕΝΙ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΙΝ τρίγωνον τῷ ΚΛΖΙ ἐστιν ἴσον. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΒΟΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΝΗΟ.

Εἰς τὸ ιγ'

Ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ, ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, καί εἰσιν αἱ πρὸς τῷ Θ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, ἴσον τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ]· ἐκκείσθω χωρὶς ἡ καταγραφὴ μόνων τῶν τρικαὶ ὅλας τὰς παραλλήλους τὰς κάμνομεν νὰ συναντῶνται, καὶ θέτομεν στοιχεῖα εἰς ἑκάστην συνάντησιν, ὥστε διατηρῶν κανεὶς τὰ ἀκόλουθα νὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἀποδεικνύῃ ὅλας τὰς περιπτώσεις.

Εἰς τὸ 6

Αἱ περιπτώσεις τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ ὅλων τῶν ἑπομένων, ὡς ἐλέχθη εἰς τὰ σχόλια τοῦ 5ου θεωρήματος, εἶναι πολλαί, διότι εἰς ὅλας συμβαίνουσι τὰ αὐτά. Χάριν δὲ μεγαλυτέρας σαφηνείας ἂς παρατεθῇ μία ἐξ αὐτῶν, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΠΡ· εἶναι φανερὸν τώρα, ὅτι αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ καὶ τὴν ΜΛ. Καὶ ἐπειδὴ ἀπεδείχθη εἰς



τὸ δεύτερον θεώρημα, εἰς τὸ σχῆμα τῆς ὑπερβολῆς, ὅτι τὸ τρίγωνον ΠΝΓ = τετράπλευρον ΛΠ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ΜΠ· τὸ τρίγωνον ἄρα ΜΝΚ = ΜΛΡΓ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ΓΡΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΕΖ, ἕνεκα τῶν εἰς τὸ 44ον θ. τοῦ πρώτου βιβλίου· ὅλον ἄρα τὸ ΜΕΛ = ΜΚΝ + ΑΕΖ. Ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ΚΜΝ, τὸ ὑπόλοιπον ΑΕΖ = ΚΛΕΝ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ΖΕΝΙ· ὅλον ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΙΝ = ΚΛΖΙ. Ὁμοίως δὲ καὶ ΒΟΛ = ΚΝΗΟ.

Εἰς τὸ 13

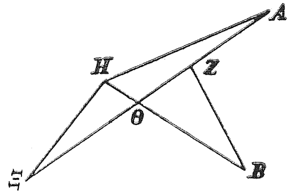
Ἐπειδὴ εἶναι ΑΘ:ΘΖ = ΘΒ:ΘΗ καὶ αἱ παρὰ τὸ Θ γωνίαι = 2 ὀρθάς, τὸ τρίγωνον ΑΗΘ = ΒΘΖ]· ἂς ληφθῇ μόνον τὸ σχῆμα γώνων, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΘ εἰς τὸ Ξ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΖΘ πρὸς ΘΞ. ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, ἡ ΑΘ [πρὸς ΘΖ καὶ ἡ ΞΘ πρὸς ΘΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΞ· ὥστε καὶ τὸ ΑΗΘ τρίγωνον ἴσον τῷ ΗΘΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΞΘ πρὸς ΘΖ, ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς κατὰ κορυφὴν πρὸς τῷ Θ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΘΒ τρίγωνον τῷ ΗΘΞ· ὥστε καὶ τῷ ΑΗΘ.

ἔστι δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι ἴσα τὰ τρίγωνα.

ἐπεὶ γὰρ δέδεικται, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΘΒ πρὸς
H326 ΘΗ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΑΚ πρὸς ΒΖ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς ΒΖ, ἡ ΒΘ πρὸς ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΚ, ΘΗ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΖ, ΒΘ ὀρθογωνίῳ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΗΘΝ, ΘΒΖ, ἐὰν ἀναγράψωμεν παραλληλόγραμμα ῥομβοειδῆ ὑπὸ τῶν αὐτῶν περιεχόμενα πλευρῶν τοῖς ὀρθογωνίοις ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Θ, Β, ἴσα ἔσται καὶ αὐτὰ διὰ τὴν τῶν πλευρῶν ἀντιπεπόνθησιν. ἔσται δὴ τὸ περιεχόμενον ῥομβοειδὲς ὑπὸ τῶν ΖΒ, ΒΘ ἐν τῇ Β γωνίᾳ διπλάσιον τοῦ ΘΒΖ τριγώνου· διάμετρος γὰρ αὐτοῦ ἔσται ἡ ΖΘ· τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΗΘ καὶ τῆς ἴσης τῇ ΑΚ ἀπὸ τῆς ΘΝΑ ἀφαιρουμένης ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΝ γωνίᾳ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΗΘ τριγώνου· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΗΘ καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν παράλληλον τὴν ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΗΘ ἀγομένην. ὥστε ἴσον τὸ ΑΗΘ τῷ ΖΒΘ.

Εἰς τὸ ιϛ'

Ἐν τισι τῶν ἀντιγράφων τοῦτο ὡς θεώρημα ὡς ιζ' τῶν τριγώνων καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΑΘ μέχρι τοῦ Ξ, καὶ ἂς γίνῃ ΗΘ:ΘΒ = ΖΘ : ΘΞ. Ἐπειδὴ εἶναι ΘΒ : ΘΗ = ΑΘ : ΘΖ = ΞΘ: ΘΖ, εἶναι ἄρα ΑΘ = ΘΞ (Εὐκλ. 5, 9)· ὥστε καὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΘ = ΗΘΞ (Εὐκλ. 1, 38)· Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΞΘ:ΘΖ = ΘΒ:ΘΗ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς κατὰ κορυφὴν τὰς πρὸς τὸ Θ, αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, τὸ τρίγωνον ΖΘΒ = ΗΘΞ (Εὐκλ. 6, 15). Ὥστε καὶ ΖΘΒ = ΑΗΘ.



Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ δειχθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Διότι, ἐπειδὴ ἐδείχθη ὡς ΚΘ:ΘΒ = ΘΒ:ΘΗ, ἀλλ' ὡς ΚΘ: ΘΒ = ΑΚ:ΒΖ, καὶ ὡς ἄρα ΑΚ:ΒΖ = ΒΘ:ΗΘ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΑΚxΘΗ = ΒΖxΒΘ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΗΘΝ, ΘΒΖ εἶναι ἴσαι, ἐὰν ἀναγράψωμε ῥομβοειδῆ παραλληλόγραμμα ἔχοντα τὰς πλευράς, ὅπως τὰ ὀρθογώνια, καὶ τὰς παρὰ τὰ σημεῖα Θ, Β γωνίας ἴσας, θὰ εἶναι καὶ αὐτὰ ἴσα, διὰ τὸ ἀντίστροφον τῶν πλευρῶν (Εὐκλ. 6, 14). Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ εἰς τὴν γωνίαν Β ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΖΒ, ΒΘ περιεχόμενον ῥομβοειδὲς διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΘΒΖ (Εὐκλ. 1, 34)· διότι θὰ εἶναι διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΖΘ· τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΗΘ καὶ τῆς ἴσης πρὸς τὴν ΑΚ, ἀφαιρουμένης ἀπὸ τῆς ΘΝΛ εἰς τὴν γωνίαν ΗΘΝ, εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΗΘ (Εὐκλ. 1, 41)· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΗΘ καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν παράλληλον τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀγομένην πρὸς τὴν ΗΘ. Ὥστε εἶναι τὸ ΑΗΘ = ΖΒΘ.

Εἰς τὸ 16

Εἰς μερικὰ χειρόγραφα (ἀντίγραφα) τὸ θεώρημα τοῦτο ἦτο *παρέκειτο, ἔστι δὲ κατὰ ἀλήθειαν πτῶσις τοῦ ιϛʹ· μόνον γάρ, ὅτι αἱ $A\Gamma B$ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι γίνονται ταῖς διαμέτροις, τὰ δὲ ἄλλα ἐστὶ τὰ αὐτά. ἐν σχολίοις οὖν ἔδει τοῦτο κεῖσθαι, ὥσπερ ἐγράψαμεν καὶ εἰς τὸ μαʹ τοῦ αʹ βιβλίου.*

H328 *Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου αἱ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροι παράλληλοι ὦσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ οὕτως ἔσται τὰ τῆς προτάσεως.*

ἐπεὶ ὡς τὸ ἀπὸ $B\Theta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Lambda\Theta A$, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔH πρὸς τὸ ὑπὸ $\Lambda H A$, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ $\Lambda\Theta A$ ἴσον τῷ ἀπὸ ΘA, τὸ δὲ ὑπὸ $\Lambda H A$ ἴσον τῷ ὑπὸ IAH· ἴση γὰρ ἡ $A\Theta$ τῇ $\Theta\Lambda$ καὶ ἡ ΔK τῇ KZ καὶ ἡ $H\Theta$ τῇ ΘI καὶ ἡ AH τῇ $I\Lambda$· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ $A\Theta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘB, τουτέστι τὸ ἀπὸ $B\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓA, τὸ ὑπὸ IAH πρὸς τὸ ἀπὸ ΔH, τουτέστι τὸ ὑπὸ $ZE\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ EA.

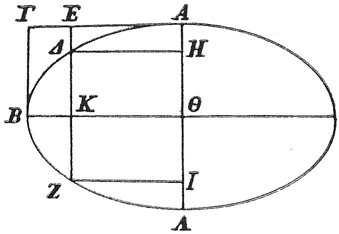
Εἰς τὸ ιζʹ

Καὶ τοῦτο ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ ἔκειτο θεώρημα, ὅπερ ἡμεῖς ὡς πτῶσιν ἀφελόντες ἐνταῦθα ἐγράψαμεν·

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας αἱ διὰ τῶν ἀφῶν ἀγόμεναι διάμετροι παράλληλοι ὦσι ταῖς ἐφαπτομέναις ταῖς $B\Gamma$, ΓA, καὶ οὕτως ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓA πρὸς τὸ ἀπὸ ΓB, τὸ ὑπὸ KZE πρὸς τὸ ὑπὸ $\Delta Z\Theta$.

ἤχθωσαν διὰ τῶν Δ, Θ τεταγμένως κατηγμέναι αἱ $\Delta\Pi$, ΘM. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ $A\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓB, τὸ ἀπὸ BN πρὸς τὸ ἀπὸ NA, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ $AN\Lambda$, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ BN πρὸς τὸ ὑπὸ $AN\Lambda$, τὸ ἀπὸ $\Delta\Pi$, τουτέστι ὡς 17, ἐνῷ εἶναι περίπτωσις τοῦ 16· διότι ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΓ, ΓΒ γίνονται παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους, τὰ δὲ ἄλλα εἶναι τὰ ἴδια. Ἔπρεπε δὲ ἡ παρατήρησις αὕτη νὰ εὑρίσκηται εἰς τὰ σχόλια, καθὼς ἐγράψαμεν εἰς τὸ 41ον θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου.

Ἐὰν εἰς τὴν ἔλλειψιν καὶ τὸν κύκλον αἱ διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς διάμετροι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας καὶ τοιουτοτρόπως θὰ ἰσχύωσι τὰ τῆς προτάσεως.



Ἐπειδὴ εἶναι $B\Theta^2:\Lambda\Theta x\Theta A = \Delta H^2:\Lambda H x HA$ (1, 21), καὶ εἶναι τὸ μὲν $\Lambda\Theta x\Theta A = \Theta A^2$, τὸ δὲ $\Lambda H x HA = IA x AH$· διότι $A\Theta = \Theta\Lambda$ καὶ $\Delta K = KZ$, καὶ $H\Theta = \Theta I$ καὶ $AH = I\Lambda$· εἶναι ἄρα $A\Theta^2:\Theta B^2 = IA x AH:\Delta H^2 = B\Gamma^2 : \Gamma A^2 = ZE x E\Delta : EA^2$.

Εἰς τὸ 17

Καὶ τὸ θεώρημα τοῦτο ἦτο ὁμοίως, ὅπως τὸ προηγούμενον, τὸ ὁποῖον ἡμεῖς διαχωρίσαντες ἐγράψαμεν ἐδῶ·

Ἐὰν εἰς τὴν ἔλλειψιν καὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου αἱ διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς ἀγόμεναι διάμετροι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας ΒΓ, ΓΑ, καὶ οὕτω πως εἶναι, ὡς τὸ $\Gamma A^2: \Gamma B^2 = KZ x ZE:\Delta Z x Z\Theta$.

Ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν Δ, Θ τεταγμένως κατηγμέναι αἱ ΔΠ, ΘΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι, $A\Gamma^2:\Gamma B^2 = BN^2:NA^2 = BN^2:AN x N\Lambda$ (1, 13), καὶ $BN^2:AN x N\Lambda = \Delta\Pi^2:A\Pi x \Pi\Lambda$ (1, 21) $= ZO^2:$

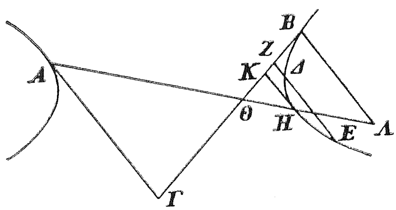
τὸ ἀπὸ ΖΟ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΠΛ καὶ τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ὑπὸ
H330 ΑΟΛ, καὶ λοιπὸν ἄρα πρὸς λοιπόν ἐστιν, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀλλ' ἐὰν μὲν ἀπὸ τοῦ ἀπὸ ΕΟ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ ΛΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ, καταλείπεται τὸ ὑπὸ ΚΖΕ· ἴση γὰρ ἡ ΚΟ τῇ ΟΕ· ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ὑπὸ ΑΟΛ ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ ΑΠΛ, λείπεται τὸ ὑπὸ ΜΟΠ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΘΖΔ· ἴση γὰρ ἡ ΛΠ τῇ ΜΑ καὶ ἡ ΠΝ τῇ ΝΜ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΖΘ.

ὅταν δὲ τὸ Ζ ἐκτὸς ᾖ τῆς τομῆς, τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις ἀνάπαλιν ποιητέον.

Εἰς τὸ ιη'

Ἔν τισιν ἀντιγράφοις ηὑρέθη ἑτέρα ἀπόδειξις τούτου τοῦ θεωρήματος·

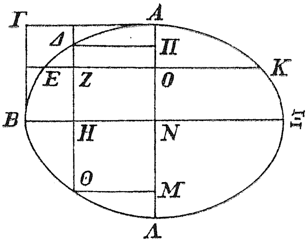
Ἐὰν ἑκατέρας τῶν τομῶν ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι συμπίπτωσι, καὶ οὕτως ἔσται τὰ εἰρημένα.

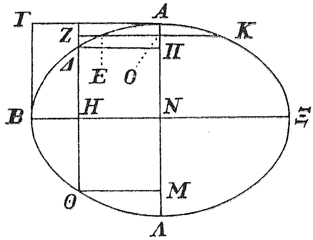


ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Α διάμετρος ἡ ΑΘΗ, διὰ δὲ τῶν Β, Η παρὰ τὴν ΕΖ αἱ ΗΚ, ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ τοῦ Β ἐφάπτε-

$ΑΠxΠΛ=ΕΟ^2: ΛΟxΟΛ$ (1, 21), θὰ εἶναι ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὡς τὸ ὅλον πρὸς τὸ ὅλον. Ἀλλ' ἐὰν μὲν ἀπὸ τοῦ $ΕΟ^2$ ἀφαιρεθῇ τὸ $ΔΠ^2$, τουτέστι τὸ $ΖΟ^2$, ἀπομένει τὸ ΚΖxΖΕ (Εὐκλ.





2, 5)· διότι εἶναι ΚΟ=ΟΕ· ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ΛΟxΟΛ ἀφαιρεθῇ τὸ ΑΠxΠΛ, ἀπομένει τὸ ΜΟxΟΠ, τουτέστι τὸ ΘΖxΖΔ· διότι εἶναι ΑΠ=ΜΛ καὶ ΠΝ=ΝΜ. Εἶναι ἄρα $ΓΑ^2:ΓΒ^2=ΚΖxΖΕ: ΔΖ x ΖΘ$.

Ὅταν δέ τὸ Ζ εἶναι ἐκτὸς τῆς τομῆς αἱ προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις πρέπει νὰ γίνωσιν ἀντιστρόφως.

Εἰς τὸ 18

Εἰς μερικὰ ἀντίγραφα εὑρέθη καὶ ἄλλη ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου·

Ἐὰν αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς ἑκατέραν τῶν τομῶν συναντῶνται καὶ πάλιν θὰ ἰσχύωσι τὰ λεχθέντα.

Διότι ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΓΒ συναντώμεναι εἰς τὸ Γ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς τομῆς Β τὸ σημεῖον Δ, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ΕΔΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς τὸ $ΑΓ^2:ΓΒ^2=ΕΖxΖΔ:ΖΒ^2$.

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Α ἡ διάμετρος ΑΘΗ, διὰ δὲ τῶν Β, Η παράλληλοι πρὸς τὴν ΕΖ αἱ ΗΚ, ΒΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἀπὸ τοῦ

H332 ται μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἡ ΒΘ, τεταγμένως δὲ ἦκται ἡ ΒΛ, ἔστιν, ὡς ἡ ΑΛ πρὸς ΛΗ, ἡ ΑΘ πρὸς ΘΗ. ἀλλʼ ὡς μὲν ἡ ΑΛ πρὸς ΛΗ, ἡ ΓΒ πρὸς ΒΚ, ὡς δὲ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΗ, ἡ ΑΓ πρὸς ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΑΓ πρὸς ΗΚ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ.

Εἰς τὸ ιθʹ

Ἔν τισιν ἀντιγράφοις ηὑρέθη ἀπόδειξις τούτου τοῦ θεωρήματος τοιαύτη·

ἤχθω δὴ ἡ μὲν ΜΛ παρὰ τὴν ΖΑ τέμνουσα τὴν ΔΓ τομήν, ἡ δὲ ΗΛ παρὰ τὴν ΖΔ τέμνουσα τὴν ΑΒ. δεικτέον, ὅτι ὁμοίως ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Δ ἀφῶν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ διὰ τῶν Γ, Β ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΒΠ, ΓΠ· ἐφάπτονται δὴ αἱ ΒΠ, ΓΠ τῶν τομῶν κατὰ τὰ Β, Γ. καὶ ἐπεὶ κέντρον ἐστὶ τὸ Ε, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΕ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΕΓ· διὰ δὲ τοῦτο, καὶ ὅτι παράλληλός ἐστιν
H334 ἡ ΑΤΖ τῇ ΓΣΠ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΔΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΔΣ τῇ ΤΒ. ὥστε καὶ ἡ ΒΣ τῇ ΤΔ, καὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΠΣ τρίγωνον τῷ ΔΤΖ τριγώνῳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΠ τῇ ΔΖ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ΓΠ τῇ ΑΖ ἴση. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΠ

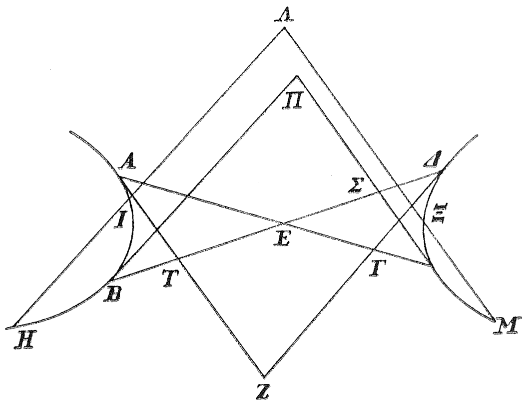
Β ἐφάπτονται μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἡ ΒΘ, ἔχει ἀχθῆ δὲ τεταγμένως ἡ ΒΛ, εἶναι ΑΛ:ΛΗ = ΑΘ:ΘΗ. Ἀλλ' ὡς ΑΛ:ΛΗ = ΓΒ:ΒΚ καὶ ΑΘ:ΘΗ = ΑΓ:ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ΓΒ:ΒΚ = ΑΓ:ΗΚ. Καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 12), ΑΓ:ΓΒ = ΗΚ:ΚΒ, καὶ $ΑΓ^2:ΓΒ^2 = ΗΚ^2:ΚΒ^2$. Ὡς δὲ $ΗΚ^2:ΚΒ^2$, οὕτως ἐδείχθη τὸ $ΕΖ x ΖΔ:ΖΒ^2$· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΑΓ^2:ΓΒ^2 = ΕΖ x ΖΔ:ΖΒ^2$.

Εἰς τὸ 19

Εἰς μερικὰ ἀντίγραφα εὑρέθη καὶ ἡ ἀκόλουθος ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου·

Ἂς ἀχθῇ τώρα ἡ μὲν ΜΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΛ τέμνουσα τὴν τομὴν ΔΓ, ἡ δὲ ΗΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΔ τέμνουσα τὴν τομὴν ΑΒ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι ὁμοίως $ΔΖ^2:ΖΑ^2 = ΗΛ x ΛΙ:ΜΛ x ΛΞ$.

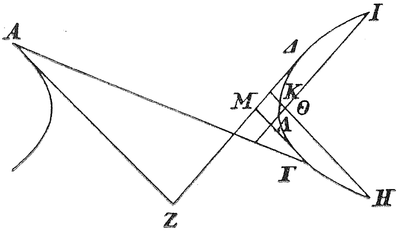
Διότι ἂς ἀχθῶσιν διὰ τῶν ἐπαφῶν Α, Δ αἱ διάμετροι ΑΓ, ΔΒ, καὶ διὰ τῶν Γ, Β ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΒΠ, ΓΠ· αἱ ΒΠ, ΓΠ ἐφάπτονται τώρα τῶν τομῶν εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ Ε εἶναι κέντρον, εἶναι ΒΕ = ΔΕ, καὶ ΑΕ = ΕΓ· διὰ τοῦτο, καὶ διότι ἡ ΑΤΖ εἶναι



παράλληλος πρὸς τὴν ΓΣΠ, εἶναι ΔΕ = ΕΒ, καὶ ΔΣ = ΤΒ. Ὥστε καὶ ἡ ΒΣ = ΤΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΒΠΣ = τρίγωνον ΔΤΖ (Εὐκλ. 5, 19)· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΒΠ = ΔΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδει-πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΓ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ.

Ἄλλο εἰς τὸ αὐτό

Ἤχθω πάλιν ἑκατέρα τῶν ΗΘΚ, ΙΘΛ παράλληλος τέμνουσα τὴν ΔΓ τομήν. δεικτέον, ὅτι καὶ οὕτως ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΘΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΘΛ.



ἤχθω γὰρ διὰ τῆς Α ἁφῆς διάμετρος ἡ ΑΓ, παρὰ δὲ τὴν ΑΖ ἤχθω ἡ ΓΜ· ἐφάψεται δὴ ἡ ΓΜ τῆς ΓΔ τομῆς κατὰ τὸ Γ· καὶ ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΓ, τὸ ὑπὸ ΙΘΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΓ, τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, τὸ ὑπὸ ΙΘΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ.

H336 Εἰς τὸ κγ′

Τὸ θεώρημα τοῦτο πολλὰς ἔχει πτώσεις, ὥσπερ καὶ τὰ ἄλλα. ἐπεὶ δὲ ἔν τισιν ἀντιγράφοις ἀντὶ θεωρημάτων πτώσεις εὑρίσκονται καταγεγραμμέναι καὶ ἄλλως τινὲς ἀποδείξεις, ἐδοκιμάσαμεν αὐτὰς περιελεῖν· ἵνα δὲ οἱ ἐντυγχάνοντες ἀπὸ τῆς διαφόρου παραθέσεως πειρῶνται τῆς ἡμετέρας ἐπινοίας, ἐξεθέμεθα ταύτας ἐν τοῖς σχολίοις.

Πιπτέτωσαν δὴ αἱ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΗΚΟ, ΘΚΤ διὰ τοῦ Κ κέντρου. λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ὑπὸ ΘΚΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΚΟ.

κνύεται καὶ ἡ ΓΠ = ΑΖ. Εἶναι δὲ $ΒΠ^2:ΠΓ^2 = ΗΛ x ΛΙ : ΜΛ x ΛΞ$· καὶ ὡς ἄρα $ΔΖ^2:ΖΑ^2 = ΗΛ x ΛΙ : ΜΛ x ΛΞ$.

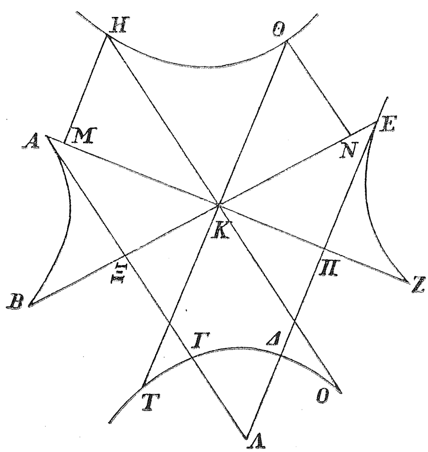
Ἄλλο εἰς τὸ αὐτὸ

Ἂς ἀχθῇ πάλιν παράλληλος ἑκατέρα τῶν ΗΘΚ, ΙΘΛ, τέμνουσα τὴν τομὴν ΔΓ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι $ΑΖ^2:ΖΔ^2 = ΗΘ x ΘΚ : ΙΘ x ΘΛ$.

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς ἐπαφῆς Α ἡ διάμετρος ΑΓ, παράλληλος δὲ πρὸς τὴν ΑΖ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΜ· ἡ ΓΜ θὰ ἐφάπτηται τώρα τῆς τομῆς ΓΔ εἰς τὸ Γ· καὶ θὰ εἶναι $ΔΜ^2:ΜΓ^2 = ΙΘ x ΘΛ : ΗΘ x ΘΚ$. Ὡς δὲ τὸ $ΔΜ^2:ΜΓ^2 = ΔΖ^2:ΖΑ^2$· ὡς ἄρα $ΔΖ^2:ΖΑ^2 = ΙΘ x ΘΛ : ΗΘ x ΘΚ$.

Εἰς τὸ 23

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει πολλὰς περιπτώσεις, ὅπως καὶ τὰ ἄλλα. Ἐπειδὴ δὲ εἰς μερικὰ ἀντίγραφα (χειρόγραφα) ἀντὶ θεωρημάτων περιλαμβάνονται καὶ κατ᾽ ἄλλον τρόπον μερικαὶ ἀποδείξεις, ἐδοκιμάσαμεν νὰ ἀποκαθάρωμεν αὐτάς· διὰ νὰ εἶναι δὲ οἱ ἀναγνῶσται εἰς θέσιν ν᾽ ἀντιληφθῶσι τὴν σκέψιν μας, ἐξεθέσαμε τὰς ἀποδείξεις αὐτάς, ἐδῶ εἰς τὰ σχόλια.



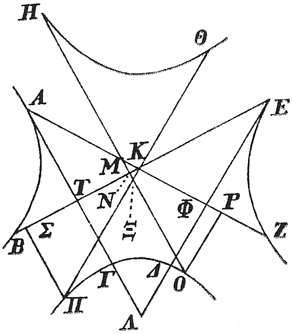
Ἂς πίπτωσι λοιπὸν παραλλήλως πρὸς τὰς ἐφαπτομένας, διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου Κ αἱ ΗΚΟ, ΘΚΤ. Λέγω, ὅτι καὶ τώρα εἶναι $ΕΛ^2:ΛΑ^2 = ΘΚ x ΚΤ : ΗΚ x ΚΟ$.

ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Θ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΘΝ, ΗΜ· γίνεται δὴ ἴσον τὸ μὲν ΗΚΜ τρίγωνον τῷ ΑΚΞ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΘΝΚ τῷ ΚΠΕ. ἴσον δὲ τὸ ΑΚΞ τῷ ΕΚΠ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΚΜ τῷ ΚΘΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΛΕ πρὸς τὸ ΛΕΞ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ΚΘΝ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΛΕΞ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΑΠ, τὸ δὲ ΘΚΝ τῷ ΚΗΜ, εἴη ἄν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΛΠΑ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς ΗΚΜ. ἔστι δὲ καί, ὡς τὸ ΛΠΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ΗΚΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ· καὶ δι᾽ ἴσου
H338 ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ἀπὸ ΚΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΘΚΤ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΗΚΟ.

τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἡ μὲν ΘΚΠ, τουτέστιν ἡ παρὰ τὴν ΕΛ ἀγομένη, διὰ τοῦ Κ κέντρου ἐμπίπτῃ, ἡ δὲ ΗΟ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Ο, Π ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι αἱ ΟΡ, ΠΣ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΜΟΡ τοῦ ΜΝΚ τριγώνου μεῖζον τῷ ΑΚΤ, τῷ δὲ ΑΚΤ ἴσον τὸ ΚΣΠ, ἴσον τὸ ΜΟΡ τοῖς ΜΝΚ, ΚΣΠ τριγώνοις· ὥστε λοιπὸν τὸ ΞΡ τετράπλευρον τῷ ΞΣ τετραπλεύρῳ ἴσον. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΛΤ τρίγωνον, οὕτως τό τε ἀπὸ ΠΚ πρὸς τὸ ΚΣΠ καὶ τὸ ἀπὸ ΚΞ πρὸς τὸ ΚΞΝ, ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΛΤ, οὕτως λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ΞΡ τετράπλευρον. καὶ ἔστι τῷ μὲν ΕΛΤ τριγώνῳ ἴσον τὸ ΑΦΛ, τὸ δὲ ΞΡ τετράπλευρον τῷ ΣΞ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΛΑΦ, τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ΞΣ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καί,
H340 ὡς τὸ ΛΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ·

Ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν Η, Θ παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΘΝ, ΗΜ· γίνεται τώρα τὸ μὲν τρίγωνον ΗΚΜ = ΑΚΞ, τὸ δὲ ΘΝΚ = ΚΠΕ. Εἶναι δὲ τὸ ΑΚΞ = ΕΚΠ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΗΚΜ = ΚΘΝ (Εὐκλ. 6, 22). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΛΕ^2$: τρίγωνον ΛΕΞ = $ΚΘ^2$: τρίγ. ΚΘΝ, καὶ εἶναι τὸ μὲν τρίγ. ΛΕΞ = ΛΑΠ, τὸ δὲ ΘΚΝ = ΚΗΜ, θὰ ἦτο $ΕΛ^2$: τρίγωνον ΛΠΑ = $ΘΚ^2$: ΗΚΜ. Εἶναι δὲ καὶ τρίγ. ΛΠΑ:$ΛΑ^2$ = ΗΚΜ:$ΗΚ^2$ (Εὐκλ. 6, 22)· διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἄρα κατὰ μέλη εἶναι $ΕΛ^2 : ΛΑ^2 = ΚΘ^2 : ΗΚ^2$, τουτέστι $ΕΛ^2 : ΛΑ^2$ = ΘΚ x ΚΤ : ΗΚ x ΚΟ.



Ὑπὸ τὰς αὐτὰς προϋποθέσεις, ἐὰν μὲν ἡ ΘΚΠ, τουτέστιν ἡ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΕΛ, διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου Κ, ἡ δὲ ΗΟ δὲν διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου, λέγω, ὅτι καὶ οὕτως εἶναι $ΕΛ^2$:$ΛΑ^2$ = ΘΞxΞΠ:ΗΞxΞΟ.

Διότι ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν Ο, Π παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΟΡ, ΠΣ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΜΟΡ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριγώνου ΜΝΚ κατὰ τὸ ΑΚΤ, καὶ ΑΚΤ = ΚΣΠ, τὸ ΜΟΡ = ΜΝΚ + ΚΣΠ τρίγωνα· ὥστε τὸ ὑπόλοιπον, τὸ τετράπλευρον ΞΡ = τετράπλ. ΞΣ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΕΛ^2$: τρίγωνον ΕΛΤ = $ΠΚ^2$:ΚΣΠ = $ΚΞ^2$:ΚΞΝ (Εὐκλ. 6, 22), θὰ εἶναι (Εὐκλ. 5, 19) $ΕΛ^2$:ΕΛΤ = ΘΞxΞΠ:ΞΡ τετράπλευρον (Εὐκλ. 2, 5). Καὶ εἶναι τρίγωνον ΕΛΤ = ΑΦΛ (3, 4), τὸ δὲ τετράπλ. ΞΡ = ΣΞ· εἶναι ἄρα $ΕΛ^2$:ΑΛΦ = ΘΞxΞΠ:ΞΣ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ τὸ ΑΛΦ:$ΑΛ^2$ = ΞΣ : ΗΞxΞΟ· καὶ διὰ πολλαπλακαὶ δι᾽ ἴσου ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ *ΕΛ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΛΛ*, τὸ ὑπὸ *ΘΞΠ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΗΞΟ*.

Ἄλλως

ἔστι δὲ καὶ οὕτως δεῖξαι·

ἐπεί, ἐὰν τῆς *ΕΖ* τομῆς ἀχθῇ ἐπιψαύουσα, καθ᾽ ὃ συμβάλλει ἡ *ΑΖ* διάμετρος τῇ *ΕΖ* τομῇ, γίνεται παράλληλος ἡ ἀχθεῖσα τῇ *ΑΤ*, καὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀποτεμνομένην ὑπ᾽ αὐτῆς πρὸς τῷ *Ε* ἀπὸ τῆς *ΕΦ* τῷ ὃν ἔχει ἡ *ΛΛ* πρὸς *ΛΕ*, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως τοῖς εἰς τὸ ιθʹ.

Εἰς τὸ κθʹ

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ *ΛΞ* τῇ *ΟΝ*, τὰ ἀπὸ *ΛΗΝ* τῶν ἀπὸ *ΞΗΟ* ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ *ΝΞΛ*]· ἔστω εὐθεῖα ἡ *ΛΝ*, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπ᾽ αὐτῆς ἴσαι αἱ *ΛΞ*, *ΝΟ* . . . . . . τὸ σχῆμα. φανερὸν δὴ ἐκ τῆς ὁμοιότητος καὶ τοῦ ἴσην εἶναι τὴν *ΛΞ* τῇ *ΟΝ*, ὅτι τὰ *ΛΔ*, *ΖΝ*, *ΑΤ*, *ΦΒ* τετράγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ *ΛΗΝ*
II342 τὰ *ΑΜ*, *ΜΝ* ἐστιν, τὰ δὲ ἀπὸ *ΞΗΟ* ἐστι τὰ *ΤΜ*, *ΜΖ*, τὰ ἄρα ἀπὸ *ΛΗΝ* τῶν ἀπὸ *ΞΗΟ* ὑπερέχουσι τοῖς ϡϛ, *Α′Β′* γνώμοσιν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ *ΗΖ* τῷ *ΦΩ*, τὸ δὲ *ΣΚ* τῷ *ΦΡ*, οἱ ϡϛ, *Α′Β′* γνώμονες ἴσοι εἰσὶ τῷ τε *ΖΒ* καὶ τῷ *ΑΦ*. τὸ δὲ *ΑΦ* τῷ *ΖΛ* ἴσον, τὰ δὲ *ΖΛ*, *ΖΒ* ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ *ΛΞΝ*, τουτέστιν ὑπὸ *ΛΟΝ*· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν *ΛΗΝ*, τουτέστι τὰ *ΑΜ*, *ΜΝ*, τῶν ἀπὸ *ΞΗΟ*, τουτέστι τῶν *ΤΜ*, *ΜΖ*, ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ *ΝΞΛ* ἤτοι τοῖς *ΛΖ*, *ΖΒ*.

σιασμοῦ κατὰ μέλη εἶναι $ΕΛ^2:ΛΑ^2=ΘΞxΞΠ:ΗΞxΞΟ$.

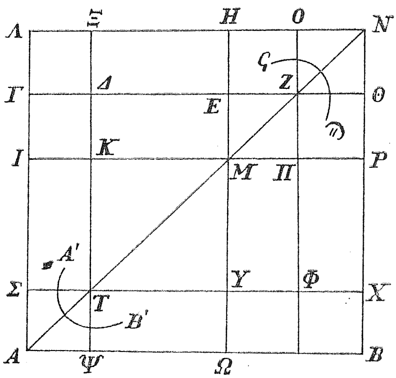
Ἄλλως

Δύναται δὲ νὰ δειχθῇ τοῦτο καὶ κατ᾿ ἄλλον τρόπον·

Ἐπειδή, ἐὰν ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ΕΖ ἐκεῖ, ὅπου ἡ διάμετρος ΑΖ συναντᾷ τὴν τομὴν ΕΖ, ἡ ἀχθεῖσα γίνεται παράλληλος πρὸς τὴν ΑΤ, καὶ ἔχει αὕτη τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὴν ἀποτεμνομένην ὑπ᾿ αὐτῆς πρὸς τὸ σημεῖον Ε, ἀπὸ τῆς ΕΦ, ὃν ἔχει ἡ ΛΑ:ΛΕ, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως πρὸς τὰ εἰς τὸ 19ον θεώρημα.

Εἰς τὸ 29

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ἡ $ΛΞ=ΟΝ$, εἶναι $ΛΗ^2+ΗΝ^2=ΞΗ^2+ΗΟ^2+2ΝΞxΞΛ$]· ἔστω εὐθεῖα ἡ ΛΝ καὶ ἂς ἀφαιρεθῶσιν ἀπ᾿ αὐτῆς ἴσαι αἱ ΛΞ, ΝΟ...... τὸ σχῆμα. Εἶναι τώρα φανερὸν ἐκ τῆς ὁμοιότητος καὶ τοῦ ὅτι ἡ $ΛΞ=ΟΝ$, ὅτι τὰ τετράγωνα ΛΔ, ΖΝ, ΑΤ, ΦΒ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ $ΛΗ^2+ΗΝ^2=$ τὰ τετράγωνα $ΑΜ+ΜΝ$, τὰ δὲ $ΞΗ^2+ΗΟ^2=$ τὰ τετράγωνα $ΤΜ+ΜΖ$, εἶναι



ἄρα $ΛΗ^2+ΗΝ^2=ΞΗ^2+ΗΟ^2+$ ης $+$ γνώμονες Α′ Β′. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΗΖ=ΦΩ$, τὸ δὲ $ΣΚ=ΦΡ$, οἱ γνώμονες ης, $Α'Β'=ΖΒ+ΑΦ$. Εἶναι δὲ τὸ $ΑΦ=ΖΛ$, τὰ δὲ $ΖΛ+ΖΒ=2ΛΞxΞΝ=2ΛΟxΟΝ$· εἶναι ἄρα $ΛΗ^2+ΗΝ^2$, (τουτέστι τὰ $ΑΜ+ΜΝ$) $=ΞΗ^2+ΗΟ^2$ (τουτέστι $ΤΜ+ΜΖ$)$+2ΝΞxΞΛ$ (τουτέστι $ΛΖ+ΖΒ$).

Εἰς τὸ λα′

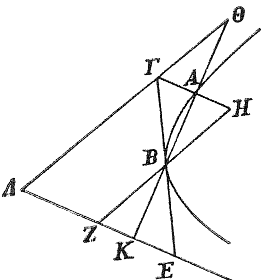
Δυνατόν ἐστι τοῦτο τὸ θεώρημα δεῖξαι ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ ποιοῦντας τὰς δύο εὐθείας μιᾶς τομῆς ἐφάπτεσθαι· ἀλλ᾽ ἐπειδὴ πάντῃ ταὐτὸν ἦν τῷ ἐπὶ τῆς μιᾶς ὑπερβολῆς προδεδειγμένῳ, αὕτη ἡ ἀπόδειξις ἀπελέχθη.

Εἰς τὸ λγ′

Ἔστι καὶ ἄλλως τοῦτο τὸ θεώρημα δεῖξαι·

ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΓΛ, ΛΖ, ἐφάψονται τῶν τομῶν διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μ′ τοῦ β′ βιβλίου. ἐπεὶ οὖν......

Ἄλλως τὸ λδ′



Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΔΕ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΒΕ καὶ παράλληλοι αἱ ΓΑΗ, ΖΒΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.

H344 ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΒ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Θ, Κ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΒ τῇ ΒΑ. ἀλλὰ ἡ ΚΒ τῇ ΑΘ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.

Ἄλλως τὸ λε′

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ μὲν ΓΒΕ ἐφαπτέσθω, ἡ δὲ ΓΑΗΘ τεμνέτω τὴν τομὴν κατὰ τὰ Α, Η σημεῖα, καὶ διὰ τοῦ Β παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΚΒΖ. δεικτέον, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΑ.

ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Λ, Μ, καὶ ἀπὸ

Εἰς τὸ 31

Εἶναι δυνατὸν τὸ θεώρημα τοῦτο νὰ ἀποδειχθῇ ὁμοίως, ὅπως τὸ πρὸ αὐτοῦ, ὅταν κάμωμεν τὰς δύο εὐθείας νὰ ἐφάπτωνται μιᾶς τομῆς· ἀλλὰ τοῦτο ἦτο ὅλως διόλου τὸ ἴδιον μὲ τὸ προαποδειχθὲν ἐπὶ τῆς μιᾶς ὑπερβολῆς (ἑνὸς κλάδου), ἡ ἀπόδειξις αὕτη παρελείφθη.

Εἰς τὸ 33

Καὶ κατ' ἄλλον τρόπον δύναται ν' ἀποδειχθῇ τὸ θεώρημα τοῦτο· διότι, ἐὰν φέρωμεν τὰς ΓΛ, ΛΖ, αὗται θὰ ἐφάπτωνται τῶν τομῶν, διὰ τὰ ἀποδειχθέντα εἰς τὸ 40ον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου. Ἐπειδὴ λοιπόν......

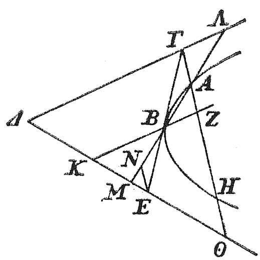
Ἄλλως τὸ 34

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΔ, ΔΕ καὶ ἡ ΓΒΕ ἐφαπτομένη καὶ αἱ ΓΑΗ, ΖΒΗ παράλληλοι. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΑ = ΑΗ.

Διότι, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τῶν Θ, Κ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΒ = ΒΕ (2, 3), εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΚΒ = ΒΑ (Εὐκλ. 6, 4). Ἀλλὰ ἡ ΚΒ = ΑΘ· ὥστε εἶναι καὶ ΓΑ = ΑΗ.

Ἄλλως τὸ 35

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔ, ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ μὲν ΓΒΕ ἂς ἐφάπτηται, ἡ δὲ ΓΑΗΘ ἂς τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ τὰ σημεῖα Α, Η καὶ διὰ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΚΒΖ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι ἡ ΗΓ : ΓΑ = ΗΖ : ΖΑ.



Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τῶν Λ, Μ, καὶ

τοῦ Ε παρὰ τὴν ΓΘ ἤχθω ἡ ΕΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΕΝ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΒΝ · ἡ ἄρα ΝΜ ὑπεροχή ἐστι τῶν ΒΜ, ΑΒ. ἴση δὲ ἡ ΒΜ τῇ ΛΑ· ἡ ΝΜ ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν ΛΑ, ΑΒ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΛΘΜ παρὰ τὴν ΛΘ ἐστιν ἡ ΕΝ, ἔστιν, ὡς ἡ ΛΜ πρὸς ΝΜ, ἡ ΛΘ πρὸς ΝΕ. ἴση δὲ ἡ ΝΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΘΛ πρὸς ΑΓ, ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ΑΒ, ΒΜ, τουτέστιν ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ΛΑ, ΑΒ. ὡς δὲ ἡ ΘΛ πρὸς ΑΓ, ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ· ἴση γὰρ ἡ ΓΑ τῇ ΘΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ΛΑ,
H346 ΑΒ καὶ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν τῶν ΓΑ, ΖΑ ὑπεροχήν. καὶ ἐπεὶ ζητῶ, εἴ ἐστιν, ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΓΑ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΑ, δεικτέον, εἴ ἐστιν, ὡς ὅλη ἡ ΗΓ πρὸς ὅλην τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ἀφαιρεθεῖσα ἡ ΖΗ πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὴν ΑΖ καὶ λοιπὴ ἡ ΓΖ πρὸς λοιπὴν τὴν τῶν ΓΑ, ΖΑ ὑπεροχήν. δεικτέον ἄρα, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΓΖ πρὸς τὴν τῶν ΓΑ, ΖΑ ὑπεροχήν.

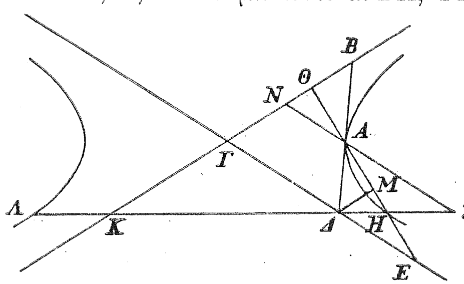
Ἄλλως τὸ λϛ´

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Δ καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΒΚ, ΓΔ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΑΛ καὶ διηγμένη ἡ ΛΚΔΗΖ καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΖ. δεικτέον, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΛΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ.

ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ καὶ ἐκβεβλήσθω· φανερὸν οὖν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΑ τῇ ΕΗ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΑΕ. ἤχθω διὰ τοῦ Δ, παρὰ τὴν ΘΓ ἡ ΔΜ· ἴση ἄρα ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ καὶ ἡ ΘΑ τῇ ΑΜ. ἡ ἄρα ΜΗ ὑπεροχή ἐστι τῶν ΘΑ, ΑΗ, τουτέστι τῶν ΑΗ, ἀπὸ τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΘ ἡ ΕΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ΓΒ = ΕΒ, εἶναι καὶ ΓΑ = ΕΝ, καὶ ΑΒ = ΒΝ (Εὐκλ. 6, 4)· εἶναι ἄρα ΝΜ = ΒΜ—ΑΒ. Εἶναι δὲ ΒΜ = ΛΑ (2, 8)· εἶναι ἄρα ΝΜ = ΛΑ—ΑΒ. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΘΜ ἡ ΕΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΘ, εἶναι ΑΜ:ΝΜ = ΑΘ:ΝΕ (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι δὲ ΝΕ = ΑΓ· εἶναι ἄρα ΘΑ:ΑΓ = ΑΜ: ΒΜ—ΑΒ = ΛΒ:ΛΑ—ΑΒ. Ὡς δὲ ΘΑ:ΑΓ = ΗΓ:ΓΑ· διότι ΓΑ = ΘΗ· καὶ ὡς ἄρα ΗΓ:ΓΑ = ΛΒ:ΛΑ—ΑΒ = ΓΖ:ΓΑ—ΖΑ. Καὶ ἐπειδὴ ζητῶ, ἐὰν εἶναι ΓΗ:ΓΑ = ΗΖ:ΖΑ, πρέπει νὰ δειχθῇ, ἐὰν εἶναι ὡς ὅλη ἡ ΗΓ:ὅλην τὴν ΓΑ = ἡ ἀφαιρεθεῖσα ΖΗ: ἀφαιρεθεῖσαν ΑΖ, καὶ ἡ ὑπόλοιπος ΓΖ : τὴν ὑπόλοιπον ΓΑ—ΖΑ. Πρέπει νὰ δειχθῇ ἄρα ὅτι εἶναι ΗΓ:ΓΑ = ΓΖ:ΓΑ—ΖΑ.

Ἄλλως τὸ 36

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Λ, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΒΚ, ΓΔ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΑΔ καὶ διηγμένη ἡ ΛΚΔΗΖ καὶ πρὸς τὴν ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΖ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι ΛΖ : ΖΗ = ΛΔ : ΔΗ.



Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΗ καὶ ἂς ἐκβληθῇ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι εἶναι ΘΑ = ΕΗ καὶ ΘΗ = ΑΕ. Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Δ παράλληλος πρὸς τὴν ΘΓ ἡ ΔΜ· εἶναι ἄρα ΒΑ = ΑΔ καὶ ΘΑ = ΑΜ (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι ἄρα ΜΗ = ΑΗ—ΘΑ = ΑΗ—ΗΕ. Καὶ

ΗΕ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΚ τῇ ΔΜ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΜ, ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΗΘ H348 *τῇ ΑΕ, ἡ δὲ ΛΔ τῇ ΚΗ· ὡς ἄρα ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΗΜ, τουτέστι τὴν τῶν ΑΗΕ ὑπεροχήν. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν τῶν ΑΗΕ ὑπεροχήν, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν τῶν ΔΗΖ ὑπεροχήν· προσδέδεικται γάρ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΔΖ πρὸς τὴν τῶν ΔΗΖ ὑπεροχήν. καὶ ὡς ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, ὅλη ἡ ΛΖ πρὸς ΔΗ καὶ τὴν τῶν ΔΗΖ ὑπεροχήν, τουτέστι τὴν ΗΖ.*

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἔστω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ διὰ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΚ ἡ ΑΜ.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ τῇ ΛΔ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΜΔ. καὶ ἐπεὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΘΚ, ΑΜ, ἔστιν, ὡς ἡ ΗΜ πρὸς ΜΚ, ἡ ΗΑ πρὸς ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΕ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΕ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΚ, ἡ διπλασία τῆς ΜΗ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΚ· ὡς ἄρα ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ἡ διπλασία τῆς ΜΗ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΚ. καὶ ἔστι διπλασία τῆς ΜΗ ἡ ΛΗ· ἴση γὰρ ἡ ΛΚ τῇ ΔΗ καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΜΔ· τῆς δὲ ΚΜ διπλασία ἡ ΔΚ· ὡς ἄρα ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΚΔ πρὸς ΔΗ. συνθέντι, ὡς ἡ ΛΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ, τουτέστιν ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ.

H350 *Ἄλλως τὸ μδ´*

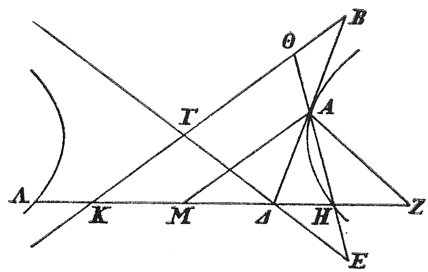
Ἀποδεδειγμένων τῶν ΓΕ, ΖΗ παραλλήλων ἐπεζεύ-

ἐπειδὴ ἡ ΒΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΜ, εἶναι ἄρα ΘΗ:ΗΜ=ΚΗ:ΗΔ (Εὐκλ. 6, 4). Εἶναι δὲ ΗΘ=ΑΕ καὶ ΛΔ=ΚΗ (2, 16)· ὡς ἄρα ΛΔ:ΔΗ=ΑΕ:ΗΜ=ΑΕ:ΑΗ—ΗΕ. Ἀλλὰ ΑΕ:ΑΗ—ΗΕ=ΔΖ:ΗΖ—ΔΗ· διότι τοῦτο προαπεδείχθη· εἶναι ἄρα ΛΔ:ΔΗ=ΔΖ:ΗΔ—ΔΗ. Καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν παρονομαστῶν ἰσοῦται μὲ ἕκαστον τῶν ἴσων λόγων (Εὐκλ. 5, 12), ἤτοι ΛΔ:ΔΗ=ὅλη ἡ ΛΖ:ΔΗ+(ΗΖ—ΔΗ)=ΛΖ:ΗΖ.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἔστω τὰ αὐτὰ δεδομένα, ὡς προηγουμένως καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΚ ἡ ΑΜ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ΒΑ=ΑΔ, εἶναι καὶ ΚΜ=ΜΔ (Εὐκλ. 6, 2). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΘΚ, ΑΜ εἶναι παράλληλοι, εἶναι ΗΜ:ΜΚ=ΗΑ:ΑΘ=ΑΗ:ΗΕ (2, 8). Ἀλλὰ ΑΗ:ΗΕ=ΖΗ:ΗΔ, καὶ ΗΜ:ΜΚ=2ΜΗ:2ΜΚ (Εὐκλ. 5, 15)· ὡς ἄρα ΖΗ:ΗΔ=2ΜΗ:2ΜΚ. Καὶ εἶναι ΛΗ=2ΜΗ· διότι ΛΚ=ΔΗ (2, 16) καὶ ΚΜ=ΜΔ· καὶ ΔΚ=2ΚΜ· ὡς ἄρα ΛΗ:ΗΖ=ΚΔ:ΔΗ (2, 16). Καὶ διὰ συνθέσεως (5 ὁρισ. 14) εἶναι ΛΖ:ΖΗ=ΚΗ:ΗΔ=ΛΔ:ΔΗ (2, 16).



Ἄλλως τὸ 44

Ἀφοῦ ἀπεδείχθησαν παράλληλοι αἱ ΓΕ, ΖΗ ἂς ἐπιζευχθῶσιν *χθωσαν αἱ ΗΑ, ΖΒ.*

ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΖΗ τῇ ΓΕ, ἴσον τὸ ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ τριγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΓΖΗ τοῦ ΑΗΖ διπλάσιον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΑ, τὸ δὲ ΕΗΖ τοῦ ΒΗΖ· ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΖ τῷ ΒΗΖ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΑΒ.

ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἡ ΑΒ ἢ . . . . . μὴ ἔρχεται διὰ τοῦ Δ κέντρου, ἤχθω διὰ τοῦ Δ παράλληλος τῇ ΓΕ ἡ ΔΚΛ καὶ διὰ τῶν Κ, Λ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΚΜΝ, ΛΞΟ. οὕτως γὰρ δῆλον γενήσεται, ὅτι, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΞΔΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΔΝ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΞΔΟ τῷ ὑπὸ ΕΔΗ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ὑπὸ ΜΔΝ τῷ ὑπὸ ΓΔΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΔΗ ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΔΖ.

Εἰς τὸ νδʹ

Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ, τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ]· ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΜ, ἡ ΓΔ πρὸς ΔΝ, ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ
H352 *ΔΑ πρὸς ΑΜ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΝ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀνάπαλίν ἐστιν, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ, ἡ ΛΓ πρὸς ΓΔ· δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΑΚ, ἡ ΝΓ πρὸς ΓΛ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΝΓ, ἡ ΚΑ πρὸς ΛΓ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ, τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ.*

Ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΝΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ, τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ]· ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΔ καὶ τοῦ τῆς ΓΝ πρὸς ΝΔ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΔ, ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ, ὡς δὲ ἡ ΓΝ αἱ ΗΑ, ΖΒ.

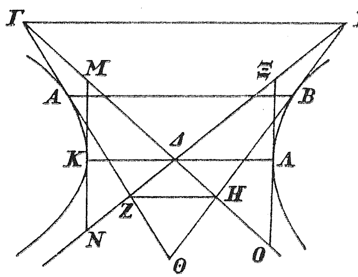
Ἐπειδὴ ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ, τὸ τρίγωνον ΓΗΖ = τρίγ. ΕΗΖ (Εὐκλ. 1, 37). Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΓΖΗ = 2ΑΗΖ (Εὐκλ. 6, 1), ἐπειδὴ ΓΖ = 2ΖΑ, τὸ δὲ ΕΗΖ = 2ΒΗΖ· εἶναι ἄρα ΑΗΖ = ΒΗΖ. Εἶναι ἄρα ἡ ΖΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ (Εὐκλ. 6, 1).

Εἰς δὲ τὰς ἀντικειμένας ἡ ΑΒ ἢ ...... δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Δ, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Δ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ ἡ ΔΚΛ καὶ διὰ τῶν Κ, Λ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΚΜΝ, ΛΞΟ. Διότι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ γίνῃ φανερόν, ὅτι ἐπειδὴ τὸ ΞΔxΔΟ = ΜΔxΔΝ (2, 15), ἀλλὰ τὸ μὲν ΞΔxΔΟ = ΕΔxΔΗ, ΜΔxΔΝ = ΓΔxΔΖ, καὶ ἄρα τὸ ΕΔxΔΗ = ΓΔxΔΖ.

. . . .

Εἰς τὸ 54

Ὡς δὲ τὸ ΝΓxΜΑ:ΑΜ^2 = ΛΓxΚΑ:ΚΑ^2]· διότι, ἐπειδὴ εἶναι ΑΔ:ΔΜ = ΓΔ:ΔΝ (Εὐκλ. 6, 4), δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 16) εἶναι ΔΑ:ΑΜ = ΔΓ:ΓΝ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἀνάπαλιν (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 13) εἶναι ΚΑ:ΑΔ = ΛΓ:ΓΔ· διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἄρα κατὰ μέλη (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 17) εἶναι ΜΑ : ΑΚ = ΝΓ : ΓΛ· καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5 ὁρισ. 12) εἶναι ΜΑ : ΝΓ = ΚΑ : ΛΓ. Καὶ ὡς ἄρα ΝΓ x ΑΜ : ΑΜ^2 = ΛΓ x ΚΑ : ΚΑ^2.



Ἀλλὰ ΑΜxΝΓ:ΝΔxΔΜ = ΕΒ^2 : ΒΔ^2]· διότι, ἐπειδὴ ΑΜxΓΝ:ΝΔxΔΜ = (ΑΜ:ΜΔ) x (ΓΝ:ΝΔ), ἀλλὰ ΑΜ:ΜΔ = ΕΒ:

πρὸς ΝΔ, ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς ΕΒ πρὸς ΒΔ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ, τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ]· ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΔΝ πρὸς ΝΒ καὶ τοῦ τῆς ΔΜ πρὸς ΜΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΝ πρὸς ΝΒ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΒ, ἡ ΔΑ πρὸς ΑΕ, ἕξει ἄρα τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΓΕ καὶ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.

ΒΔ, καὶ ΓΝ:ΝΔ = ΕΒ:ΒΔ (Εὐκλ. 6, 2), εἶναι ἄρα ΑΜxΓΝ : ΝΔxΔΜ = $(ΕΒ:ΒΔ)^2$. Εἶναι δὲ καὶ $ΕΒ^2:ΒΔ^2$ = $(ΕΒ:ΒΔ)^2$· εἶναι ἄρα ΑΜxΓΝ:ΝΔxΔΜ = $ΕΒ^2$: $ΒΔ^2$.

Ὡς δὲ ΝΔxΔΜ:ΝΒxΒΜ = ΓΔxΔΑ:ΓΕxΕΑ]· διότι, ἐπειδὴ τὸ ΝΔxΔΜ:ΝΒxΒΜ = (ΔΝ:ΝΒ) x (ΔΜxΜΒ), ἀλλὰ ΔΝ:ΝΒ=ΔΓ:ΓΕ, καὶ ΔΜ:ΜΒ = ΔΑ:ΑΕ (Εὐκλ. 6, 4), θὰ ἔχῃ ἄρα τὸν λόγον (ΔΓ:ΓΕ) x (ΔΑ:ΑΕ) = ΓΔxΔΑ:ΓΕxΕΑ. Ὡς ἄρα ΝΔxΔΜ:ΝΒxΒΜ = ΓΔxΔΑ:ΓΕxΕΑ.

H254

Εἰς τὸ δʹ

Τὸ τέταρτον βιβλίον, ὦ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε, ζήτησιν μὲν ἔχει, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσιν ἤτοι ἐφαπτόμεναι ἢ τέμνουσαι, ἔστι δὲ χαρίεν καὶ σαφὲς τοῖς ἐντυγχάνουσι καὶ μάλιστα ἀπὸ τῆς ἡμετέρας ἐκδόσεως, καὶ οὐδὲ σχολίων δεῖται· τὸ γὰρ ἐνδέον αἱ παραγραφαὶ πληροῦσιν. δέδεικται δὲ τὰ ἐν αὐτῷ πάντα διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, ὥσπερ καὶ Εὐκλείδης ἔδειξε τὰ περὶ τῶν τομῶν τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐπαφῶν. εὔχρηστος δὲ καὶ ἀναγκαῖος ὁ τρόπος οὗτος καὶ τῷ Ἀριστοτέλει δοκεῖ καὶ τοῖς γεωμέτραις καὶ μάλιστα τῷ Ἀρχιμήδει.

ἀναγινώσκοντι οὖν σοι τὰ $\overline{\delta}$ βιβλία δυνατὸν ἔσται διὰ τῆς τῶν κωνικῶν πραγματείας ἀναλύειν καὶ συντιθέναι τὸ προτεθέν· διὸ καὶ αὐτὸς ὁ Ἀπολλώνιος ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου φησὶ τὰ $\overline{\delta}$ βιβλία ἀρκεῖν πρὸς τὴν ἀγωγὴν τὴν στοιχειώδη, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι περιουσιαστικώτερα.

H356 ἀνάγνωθι οὖν αὐτὰ ἐπιμελῶς, καὶ εἴ σοι καταθυμίως γένηται καὶ τὰ λοιπὰ κατὰ τοῦτον τὸν τύπον ὑπʼ ἐμοῦ ἐκτεθῆναι, καὶ τοῦτο θεοῦ ἡγουμένου γενήσεται. ἔρρωσο.

Σχόλια εἰς τὸ τέταρτον βιβλίον

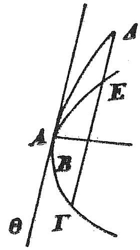
Τὸ τέταρτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν, ὦ φίλε συνάδελφε Ἀνθέμιε, ἐρευνᾷ κατὰ πόσους τρόπους αἱ τομαὶ τῶν κώνων συναντῶνται καὶ μεταξύ των καὶ μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἢ ἐφαπτόμεναι ἢ τέμνουσαι, εἶναι δὲ καὶ εὐχάριστον καὶ σαφὲς εἰς τοὺς ἀναγνώστας, καὶ ἰδίως ἀφ' ὅτου ἐξεδόθη ἀπὸ ἡμᾶς, καὶ δὲν ἔχει ἀνάγκην σχολίων· διότι πᾶσα ἀσάφεια καλύπτεται ἀπὸ τὰς ἐξηγήσεις τὰς γραφομένας εἰς τὸ περιθώριον. Ὅλα δὲ τὰ θεωρήματα ἀπεδείχθησαν εἰς αὐτὸ διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὅπως καὶ ὁ Εὐκλείδης ἀπέδειξε τὰ περὶ τῶν τομῶν τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐπαφῶν. Φαίνεται δὲ ὁ τρόπος οὗτος τῆς ἀποδείξεως εὔχρηστος καὶ ἀναγκαῖος εἰς τὸν Ἀριστοτέλη καὶ εἰς τοὺς γεωμέτρας καὶ μάλιστα εἰς τὸν Ἀρχιμήδη.

Ἐὰν λοιπὸν ἔχεις διαβάσει τὰ 4 βιβλία εἶναι δυνατὸν διὰ τῆς πραγματείας τῶν Κωνικῶν νὰ ἀναλύῃς καὶ νὰ συνθέτῃς τὸ τιθέμενον συναφὲς πρόβλημα· διὸ καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ὁ ἴδιος εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ βιβλίου λέγει, ὅτι τὰ 4 βιβλία εἶναι ἀρκετὰ διὰ τὴν στοιχειώδη προπαιδείαν, τὰ ἄλλα δὲ εἶναι σπουδαιότερα.

Διάβασε λοιπὸν αὐτὰ ἐπιμελῶς, καὶ ἐὰν νομίζῃς, ὅτι καὶ τὰ ἄλλα πρέπει νὰ ἐκτεθῶσι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, καὶ τοῦτο, θεοῦ θέλοντος, θὰ γίνῃ. Ἔρρωσο.

Ἄλλως τὸ κδ´

Ἔστωσαν αἱ ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ τομαί, ὡς εἴρηται, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΔΕΓ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΔΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ.



εἰ οὖν ἐντὸς τῶν τομῶν πίπτει, ἡ ἐν τῷ ῥητῷ ἀπόδειξις ἁρμόσει· εἰ δὲ ἐφάψεται κατὰ τὸ Α, ἀμφοτέρων ἐπιψαύσει τῶν τομῶν, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἀγομένη διάμετρος τῆς ἑτέρας τῶν τομῶν διάμετρος ἔσται καὶ τῆς λοιπῆς. δίχα ἄρα τέμνει κατὰ τὸ Ζ τήν τε ΓΔ καὶ τὴν ΕΓ· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἔστωσαν αἱ ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ τομαί, ὡς εἴρηται, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κοινοῦ τμήματος αὐτῶν σημεῖόν τι τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ διάμετρος ἤχθω ἡ ΗΖΘ, καὶ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθω ἡ ΓΔΕ.

ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΖΘ καὶ δίχα τέμνει τὴν
H358 ΑΒ, τεταγμένως ἄρα κατῆκται ἡ ΑΒ. καὶ ἔστι παράλληλος αὐτῇ ἡ ΓΔΕ· δίχα ἄρα τέτμηται κατὰ τὸ Θ ἐν μὲν τῇ ΕΑΒΓ γεγραμμένη ἡ ΕΓ, ἐν δὲ τῇ ΔΑΒΓ ἡ ΔΓ. ἴση ἄρα ἡ ΕΘ τῇ ΘΔ· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἄλλως τὸ μγ´

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΓΑΒΔ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων τεμνέτω κατὰ τὰ Γ, Α, Β, Δ,

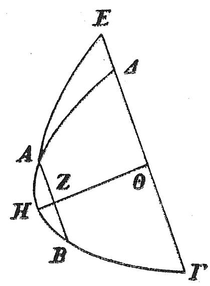
Ἄλλως τὸ 24

Ἔστωσαν αἱ τομαὶ ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἂς διαχθῇ ὡς ἔτυχεν, ἡ ΔΕΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΔΕΓ παράλληλος ἡ ΑΘ.

Ἐὰν λοιπὸν αὕτη πίπτῃ ἐντὸς τῶν τομῶν ἁρμόζει ἡ εἰς τὸ θεώρημα ἀπόδειξις· ἐὰν δὲ ἐφάπτηται κατὰ τὸ Α, θὰ ἐφάπτηται καὶ τῶν δύο τομῶν, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἀγομένη διάμετρος τῆς μιᾶς τῶν τομῶν θὰ εἶναι διάμετρος καὶ τῆς ἄλλης. Τέμνει ἄρα εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ καὶ τὴν ΓΔ καὶ τὴν ΕΓ· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἔστωσαν αἱ τομαὶ ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ κοινοῦ τμήματος αὐτῶν ΑΒΓ, σημεῖόν τι τὸ Β, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ διάμετρος ἡ ΗΖΘ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΓΔΕ.



Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΖΘ εἶναι διάμετρος καὶ τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν ΑΒ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ τεταγμένως κατηγμένη (1 ὁρισ. 4). Καὶ εἶναι ἡ ΓΔΕ παράλληλος πρὸς αὐτήν· ἔχει ἄρα τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Θ, εἰς μὲν τὴν ΕΑΒΓ ἡ ἐγγραφεῖσα ΕΓ, εἰς δὲ τὴν ΔΑΒΓ ἡ ΔΓ. Εἶναι ἄρα ἡ ΕΘ = ΘΔ· ὅπερ ἀδύνατον.

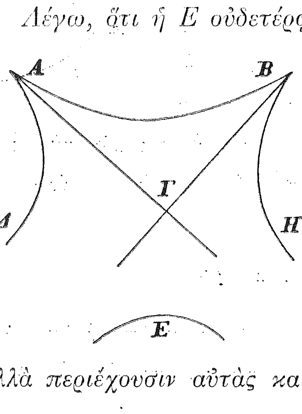
Ἄλλως τὸ 43

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β καὶ ἡ ὑπερβολὴ ΓΑΒΔ ἂς τέμνῃ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων εἰς τὰ σημεῖα Γ, Α, Β, Δ, ἀντικειμένη δὲ αὐτῆς ἔστω ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΒ, ΓΑ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ· ἔσται ἄρα τὸ Θ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΓΑΒ τομῆς. ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῆς ΓΑΒΔ αἱ ΚΗΛ, ΜΗΝ· φανερὸν δή, ὅτι αἱ ΝΗΛ τὴν ΕΖ τομὴν περιέχουσιν. καὶ ἡ ΓΑ τέμνει τὴν ΓΑΞ τομὴν κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Α· ἐκβαλλομένη ἄρα ἐφ᾽ ἑκάτερα τῇ ἀντικειμένῃ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΔΒΟ, ἀλλ᾽ ἔσται μεταξὺ τῆς ΒΟ τομῆς καὶ τῆς ΛΗ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΔΒΘ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΓΑΞ, ἀλλ᾽ ἔσται μεταξὺ τῆς ΑΞ καὶ τῆς ΗΝ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΘΠ, ΘΡ μὴ συμπίπτουσαι ταῖς Α, Β τομαῖς περιέχουσι τὰς ΝΗΛ ἀσυμπτώτους καὶ πολλῷ μᾶλλον τὴν ΕΖ τομήν, ἡ ΕΖ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

Ἄλλως τὸ να΄

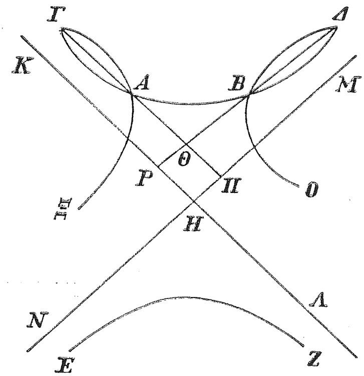
Λέγω, ὅτι ἡ Ε οὐδετέρᾳ τῶν Α, Β συμπεσεῖται.



H360

ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Γ ἐντὸς τῆς περιεχούσης γωνίας τὴν ΑΒ τομήν· φανερὸν δή, ὅτι αἱ ΑΓ, ΓΒ ἐκβαλλόμεναι οὐ συμπεσοῦνται ταῖς ἀσυμπτώτοις τῆς Ε τομῆς, ἀλλὰ περιέχουσιν αὐτὰς καὶ πολὺ πλέον τὴν Ε τομήν. καὶ ἀντικειμένη δὲ αὐτῆς ἔστω ἡ ΕΖ. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ δὲν θὰ συναντήσῃ καμμίαν τῶν ἀντικειμένων.

Διότι, ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΒ, ΓΑ καὶ ἂς ἐκβληθῶσι καὶ ἂς τέμνωνται εἰς τὸ Θ· θὰ εἶναι ἄρα τὸ Θ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς τομῆς ΓΑΒ. Ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῆς τομῆς ΓΑΒΔ αἱ ΚΗΛ, ΜΗΝ· εἶναι τώρα φανερόν, ὅτι αἱ ΝΗ, ΗΛ περιέχουσι τὴν τομὴν ΕΖ. Καὶ ἡ ΓΑ τέμνει τὴν τομὴν ΓΑΞ εἰς τὰ δύο σημεῖα Γ, Α· ἐκβαλλομένη ἄρα καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τῆς ἀντικειμένης δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΔΒΟ, ἀλλὰ θὰ εἶναι μεταξὺ



τῆς τομῆς ΒΟ καὶ τῆς τομῆς ΛΗ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΔΒΘ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΓΑΞ, ἀλλὰ θὰ εἶναι μεταξὺ τῆς ΑΞ καὶ τῆς ΗΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΘΠ, ΘΡ, ἐνῷ δὲν συναντῶσι τὰς τομὰς Α, Β περιέχουσι τὰς ἀσυμπτώτους ΝΗ, ΗΛ καὶ πολὺ περισσότερον τὴν τομὴν ΕΖ, ἡ ΕΖ δὲν θὰ συναντήσῃ καμμίαν ἀπὸ τὰς ἀντικειμένας.

Ἄλλως τὸ 51

Λέγω, ὅτι ἡ Ε δὲν θὰ συναντήσῃ καμμίαν τῶν Α, Β.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν καὶ ἂς συναντῶνται αὗται μεταξύ των εἰς τὸ Γ ἐντὸς τῆς γωνίας τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν ΑΒ· εἶναι τώρα φανερόν, ὅτι αἱ ΑΓ, ΓΒ ἐκβαλλόμεναι δὲν θὰ συναντήσωσι τὰς ἀσυμπτώτους τῆς τομῆς Ε, ἀλλὰ περιέχουσιν αὐτὰς καὶ πολὺ περισσότερον τὴν *ἐπεὶ τῆς ΑΔ τομῆς ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, ἡ ΑΓ ἄρα οὐ συμπεσεῖται τῇ ΒΗ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΔ. ἡ ἄρα Ε τομὴ οὐδεμιᾷ τῶν ΑΔ, ΒΗ τομῶν συμπεσεῖται.*

τομὴν Ε. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ ἐφάπτεται τῆς τομῆς ΑΔ, ἡ ΑΓ ἄρα δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΒΗ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ΒΓ δὲν θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΔ. Ἡ τομὴ ἄρα Ε δὲν θὰ συναντήσῃ καμμίαν τῶν τομῶν ΑΔ, ΒΗ.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Α

Β

Γ

Δ

Ε

Η

Θ

Ι

Κ

Λ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Μ

Ο

Π

Σ

Τ

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ — ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ «ΠΑΤΡΙΣ» Α.Ε
ΑΘΗΝΑΙ, ΙΕΡΑ ΟΔΟΣ 58
ΤΗΛΕΦ. 3465.347 — 3468.216

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ