ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω
Πλάτων

ΑΘΗΝΑΙ
1982

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω
Πλάτων

ΑΘΗΝΑΙ
1982

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα εἶχε γράψει ὁ μαθητὴς τοῦ Ἀριστοτέλους Εὔδημος ὁ Ῥόδιος (4 αἰ. π.Χ.). Τὸ βιβλίον αὐτὸ ἐχάθη. Ἀπὸ τὸ βιβλίον αὐτὸ ἀντλεῖ ὁ Γεμῖνος (2 αἰ. π.Χ.) εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν του. Καὶ τὸ βιβλίον αὐτὸ ἐχάθη. Ὁ Πρόκλος (410 - 485 μ. Χ.) εἰς τὰ σχόλιά του, εἰς τὸ Α΄ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου μνημονεύει ἐπανειλημμένως καὶ τοῦ Εὐδήμου καὶ τοῦ Γεμίνου. Ἀπὸ τὸν Πρόκλον πληροφορούμεθα ποῖοι μαθηματικοὶ ἔδρασαν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῆς ἱδρύσεώς της (387 π.Χ.) μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ θανάτου τοῦ Πλάτωνος (347 π.Χ.). Οὗτοι εἶναι:

Λεωδάμας ὁ Θάσιος, Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος, Νεοκλείδης καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Λέων, Εὔδοξος ὁ Κνίδιος, Ἀμύκλας ὁ Ἡρακλεώτης (ἐκ τῆς Ἡρακλείας τοῦ Πόντου), Μέναιχμος καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος, Θεύδιος ὁ Μάγνης (ἐκ τῆς Μαγνησίας τῆς Μ. Ἀσίας), Ἀθήναιος ὁ Κυζικηνός, Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος, Φίλιππος ὁ Μενδαῖος (ἐκ τῆς Μένδης τῆς Χαλκιδικῆς Χερσονήσου). Ὄχι πολὺ νεώτερος τούτων εἶναι ὁ Εὐκλείδης ὁ συναγαγὼν τὰ Στοιχεῖα τῶν Μαθηματικῶν.

Διὰ τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τῶν μαθηματικῶν τῆς Πλατωνικῆς Ἀκαδημίας ἔχομεν μόνον ὀλίγας πληροφορίας διὰ τὸν Θεαίτητον, τὸν Εὔδοξον καὶ τὸν Μέναιχμον. Ἐκ τῶν διαδόχων δὲ τοῦ Πλάτωνος εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς Ἀκαδημίας ἠσχολήθησαν μὲ τὰ Μαθηματικά, ἐκτὸς τῆς Φιλοσοφίας, ὁ Σπεύσιππος καὶ ὁ Ξενοκράτης. Τὰ μαθηματικὰ συγγράμματα τούτων ἀπωλέσθησαν. Διὰ τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ Θεαιτήτου καὶ τοῦ Εὐδόξου λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν εἰς τὴν κατωτέρω ἔκθεσιν θέτομεν ὡς τίτλους Θεαίτητος - Εὐκλείδης καὶ Εὔδοξος - Εὐκλείδης. Διὰ τὸν Μέναιχμον λαμβάνομεν γνῶσιν ἀπὸ τὰ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου εἰς τὸν Ἀρχιμήδην (Δήλιον πρόβλημα. Ἀρχιμήδους Ἅπαντα τόμος Γ΄ σελὶς 78, Heiberg - Stamatis, Stuttgart 1972). Κατωτέρω προτάσσονται τὰ ὑπὸ τοῦ Πρόκλου διὰ τὴν Πλατωνικὴν Ἀκαδημίαν λεγόμενα καὶ ἀκολουθοῦν τὰ περὶ τοῦ Θεαιτήτου, τοῦ Εὐδόξου, τοῦ Μεναίχμου, τοῦ Σπευσίππου καὶ τοῦ Ξενοκράτους.

Εὐάγγελος Σ. Σταμάτης

ΠΗΓΑΙ

Διὰ τὸν Θεαίτητον καταχωρεῖται:

1) Εἰσαγωγὴ ἡμῶν εἰς τὸ 10 βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

2) Ἀνακοίνωσις ἡμῶν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν διὰ τὸ 10 βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (17-1-1957). Εἰς αὐτὴν περιλαμβάνονται 4 πίνακες, ὅπου ἐκτίθενται εἰς σύγχρονον ἀλγεβρικὴν διατύπωσιν τὰ θεωρήματα τοῦ 10 βιβλίου τῶν Στοιχείων.

Διὰ τὸν Εὔδοξον καταχωρεῖται:

1) Οἱ ὁρισμοὶ τοῦ 5 βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.
2) Ἡ ἀπόδειξις τοῦ 8 θεωρήματος τοῦ 5 βιβλίου τῶν Στοιχείων εἰς σύγχρονον διατύπωσιν παρ' ἡμῶν.
3) Αἱ 3 ἀναλογίαι αἱ ἀνακαλυφθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου.
4) Τὰ θεωρήματα 7 καὶ 10 τοῦ 12 βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ἀνακαλυφθέντα ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου κατὰ μαρτυρίαν τοῦ Ἀρχιμήδους.

(Ἀπὸ τὴν ἔκδοσίν μου τῶν Στοιχείων Β' τόμ. 1953, καὶ Δ' τόμ. 1957)

Διὰ τὸν Μέναιχμον καταχωροῦνται:

Δύο λύσεις τοῦ δηλίου προβλήματος, ὡς αὗται ἐκτίθενται ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου (6 αἰών), σχολιαστοῦ ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους (Archimedis opera omnia, ed. Heiberg - Stamatis, vol. 3, p. 78 - 84, 1972, B. G. Teubner,Stuttgart).

Διὰ τὸν Σπεύσιππον καὶ τὸν Ξενοκράτη ἐλάχισται πληροφορίαι ἐκ τοῦ Διογένους Λαερτίου βιβλ. 4.

μετὰ δὲ τοῦτον Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος πολλῶν ἐφήψατο τῶν κατὰ γεωμετρίαν καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος, ὀλίγῳ νεώτερος ὢν Ἀναξαγόρου, ὧν καὶ ὁ Πλάτων ἐν τοῖς ἀντερασταῖς ἐμνημόνευσεν ὡς ἐπὶ τοῖς μαθήμασι δόξαν λαβόντων. ἐφ' οἷς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὑρών, καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο περὶ γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψεν. Πλάτων δ' ἐπὶ τούτοις γενόμενος μεγίστην ἐποίησεν ἐπίδοσιν τά τε ἄλλα μαθήματα καὶ τὴν γεωμετρίαν λαβεῖν διὰ τὴν περὶ αὐτὰ σπουδήν, ὅς που δῆλός ἐστι καὶ τὰ συγγράμματα τοῖς μαθηματικοῖς λόγοις καταπυκνώσας καὶ πανταχοῦ τὸ περὶ αὐτὰ θαῦμα τῶν φιλοσοφίας ἀντεχομένων ἐπεγείρων. ἐν δὲ τούτῳ τῷ χρόνῳ καὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος ἦν καὶ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος καὶ Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος, παρ' ὧν ἐπηυξήθη τὰ θεωρήματα καὶ προῆλθεν εἰς ἐπιστημονικωτέραν σύστασιν. Λεωδάμαντος δὲ νεώτερος ὁ Νεοκλείδης καὶ ὁ τούτου μαθητὴς Λέων, οἳ πολλὰ προσευπόρησαν τοῖς πρὸ αὐτῶν, ὥστε τὸν Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι τῷ τε πλήθει καὶ τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον, καὶ διορισμοὺς εὑρεῖν, πότε δυνα-

ΠΡΟΚΛΟΣ

(Εἰς Εὐκλείδην/Α΄ σελ. 65, 21 Friedlein)

Μετὰ δὲ τοῦτον (τὸν Πυθαγόραν) ὁ 'Αναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος ἠσχολήθη πολὺ μὲ τὴν Γεωμετρίαν καὶ ὁ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος, ὀλίγον νεώτερος τοῦ 'Αναξαγόρου, τοὺς ὁποίους ὁ Πλάτων ἐμνημόνευσεν εἰς τοὺς 'Αντεραστάς, ὡς λαβόντας δόξαν εἰς τὰ Μαθηματικά. Μετὰ τούτους δὲ ὁ 'Ιπποκράτης ὁ Χῖος, ὁ εὑρὼν τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ μηνίσκου, καὶ ὁ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος, ἐγένοντο ἐπιφανεῖς εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Διότι ἀπὸ τοὺς μνημονευομένους αὐτοὺς πρῶτος ὁ 'Ιπποκράτης συνέγραψε καὶ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας. Μετὰ δὲ τούτους ὁ Πλάτων συνέβαλε πολὺ ἐκτὸς τῶν ἄλλων μαθημάτων, καὶ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Γεωμετρίας, ὁ ὁποῖος φαίνεται καὶ ἀπὸ τὰ Μαθηματικά, τὰ ὁποῖα ἔχει κατασπείρει εἰς τὰ συγγράμματά του, διεγείρων τὸ περὶ αὐτὰ θαῦμα τῆς Φιλοσοφίας. Κατὰ τὴν ἐποχὴν δὲ αὐτὴν ἔδρασαν ὁ Λεωδάμας ὁ Θάσιος καὶ ὁ 'Αρχύτας ὁ Ταραντῖνος καὶ ὁ Θεαίτητος ὁ 'Αθηναῖος, ὑπὸ τῶν ὁποίων ηὐξήθη ὁ ἀριθμὸς τῶν θεωρημάτων καὶ ταῦτα διεμορφώθησαν ἐπιστημονικώτερον. Νεώτερος δὲ τοῦ Λεωδάμαντος εἶναι ὁ Νεοκλείδης καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Λέων, οἱ ὁποῖοι τόν ἐστι τὸ ζητούμενον πρόβλημα καὶ πότε ἀδύνατον. Εὔδοξος δὲ ὁ Κνίδιος, Λέοντος μὲν ὀλίγῳ νεώτερος, ἑταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλάτωνα γενόμενος, πρῶτος || τῶν καθόλου καλουμένων θεωρημάτων τὸ πλῆθος ηὔξησεν καὶ ταῖς τρισὶν ἀναλογίαις ἄλλας τρεῖς προσέθηκεν καὶ τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος εἰς πλῆθος προήγαγεν καὶ ταῖς ἀναλύσεσιν ἐπ' αὐτῶν χρησάμενος. Ἀμύκλας δὲ ὁ Ἡρακλεώτης, εἷς τῶν Πλάτωνος ἑταίρων καὶ Μέναιχμος ἀκροατὴς ὢν Εὐδόξου καὶ Πλάτωνι δὲ συγγεγονὼς καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος ἔτι τελεωτέραν ἐποίησαν τὴν ὅλην γεωμετρίαν. Θεύδιος δὲ ὁ Μάγνης ἔν τε τοῖς μαθήμασιν ἔδοξεν εἶναι διαφέρων καὶ κατὰ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν· καὶ γὰρ τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξεν καὶ πολλὰ τῶν ὁρικῶν [?] καθολικώτερα ἐποίησεν. καὶ μέντοι καὶ ὁ Κυζικηνὸς Ἀθήναιος κατὰ τοὺς αὐτοὺς γεγονὼς χρόνους καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις μὲν μαθήμασι, μάλιστα δὲ κατὰ γεωμετρίαν ἐπιφανὴς ἐγένετο. διῆγον οὖν οὗτοι μετ' ἀλλήλων ἐν Ἀκαδημίᾳ κοινὰς ποιούμενοι τὰς ζητήσεις. Ἑρμότιμος δὲ ὁ Κολοφώνιος τὰ ὑπ' Εὐδόξου προηυπορημένα καὶ Θεαιτήτου προήγαγεν ἐπὶ πλέον καὶ τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε καὶ τῶν τόπων τινὰ συνέγραψεν. Φίλιππος δὲ ὁ Μενδαῖος, Πλάτωνος ὢν μαθητὴς καὶ εὑρῆκαν πολλὰ θεωρήματα, ἐκτὸς τῶν πρὸ αὐτῶν εὑρεθέντων, ὥστε ὁ Λέων νὰ γράψῃ καὶ στοιχεῖα τῶν Μαθηματικῶν καὶ νὰ συντάξῃ ἐπιμελέστερον τὰ ἀποδειχθέντα προηγουμένως καὶ νὰ εὕρῃ διορισμούς, πότε δηλαδὴ τὸ ζητούμενον πρόβλημα ἐπιδέχεται λύσιν καὶ πότε εἶναι ἀδύνατον. Ὁ Εὔδοξος δὲ ὁ Κνίδιος ὀλίγον μὲν νεώτερος τοῦ Λέοντος, γενόμενος δὲ συνεργάτης τοῦ Πλάτωνος πρῶτος ηὔξησε τὸν ἀριθμὸν τῶν θεωρημάτων καὶ εἰς τὰς τρεῖς ὑπαρχούσας ἀναλογίας εὑρῆκε ἄλλας τρεῖς καὶ τὰ λαβόντα τὴν ἀρχὴν ἀπὸ τὸν Πλάτωνα εἰς τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν ηὔξησε κατὰ τὸ πλῆθος, χρησιμοποιήσας καὶ τὴν μέθοδον τῆς ἀναλύσεως.

Ὁ Ἀμύκλας δὲ ὁ καταγόμενος ἐκ τῆς Ἡρακλείας εἷς ἐκ τῶν συνεργατῶν τοῦ Πλάτωνος καὶ ὁ Μέναιχμος, μαθητὴς ὢν τοῦ Εὐδόξου καὶ συνεργάτης τοῦ Πλάτωνος, καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος ἔκαμαν τὴν Γεωμετρίαν ἀκόμη τελειοτέραν. Ὁ Θεύδιος δὲ ὁ καταγόμενος ἐκ τῆς Μαγνησίας ἐφάνη ἐξέχων καὶ εἰς τὰ Μαθηματικὰ καὶ εἰς τὴν ἄλλην Φιλοσοφίαν· διότι καὶ τὰ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας τὰ ὑπ' ἐκείνου προτραπεὶς εἰς τὰ μαθήματα, καὶ τὰς ζητήσεις ἐποιεῖτο κατὰ τὰς Πλάτωνος ὑφηγήσεις καὶ ταῦτα προύβαλλεν ἑαυτῷ, ὅσα ᾤετο τῇ Πλάτωνος φιλοσοφίᾳ συντελεῖν. οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράψαντες μέχρι τούτου προάγουσι τὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν. οὐ πόλυ δὲ τούτων νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης | ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών.

συνέταξε καλὰ καὶ πολλὰ τῶν μερικῶν τὰ ἔκαμε γενικώτερα. ᾿Αλλὰ καὶ ὁ Κυζικηνὸς ᾿Αθήναιος, ὁ ὁποῖος ἤκμασε κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν διεκρίθη καὶ εἰς τὰ ἄλλα μαθήματα καὶ ἰδίως εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Διότι ὅλοι αὐτοὶ ἔκαμαν τὰς ἐρεύνας των ἀπὸ κοινοῦ, εἰς τὴν ᾿Ακαδημίαν. ῾Ο ῾Ερμότιμος δὲ ὁ Κολοφώνιος τὰ προευρεθέντα ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου καὶ τοῦ Θεαιτήτου τὰ προήγαγε περισσότερον καὶ εὑρῆκε πολλὰ ἄλλα στοιχεῖα καὶ συνέγραψε πολλὰ περὶ τῶν γεωμετρικῶν τόπων. ῾Ο Φίλιππος δέ ὁ καταγόμενος ἐκ τῆς Μένδης μαθητὴς ὢν τοῦ Πλάτωνος, προτραπεὶς ὑπὸ τούτου εἰς τὰ Μαθηματικὰ, ἔκαμε τὰς ἐρεύνας του κατὰ τὰς ὁδηγίας τοῦ Πλάτωνος, συμφώνως πρὸς τὴν Πλατωνικὴν φιλοσοφίαν. ῞Οσοι λοιπὸν ἀνέγραψαν τὴν ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν μέχρι τούτου (τοῦ Φιλίππου τοῦ Μενδαίου) ἀναγράφουν τὴν τελείωσιν τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς.῎Οχι δὲ πολὺ νεώτερος τούτου εἶναι ὁ Εὐκλείδης ὁ συγγράψας τὰ Στοιχεῖα τῶν Μαθηματικῶν, ὁ συντάξας πολλὰ εὑρεθέντα ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου καὶ τελειοποιήσας πολλὰ εὑρεθέντα ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου, ὁ ἀναγαγὼν προσέτι εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις τὰ ὑπὸ τῶν προηγουμένων του ἀποδεικνυόμενα μαλακώτερον.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ

Εἰς τὸν Θεαίτητον ὁ Πλάτων ἔχει ἀφιερώσει τὸν διάλογον Θεαίτητος. Εἰς τὸν πρόλογον τοῦ διαλόγου ἀναφέρεται ὅτι ὁ Θεαίτητος μετεφέρετο εἰς Ἀθήνας ἐκ Κορίνθου βαρέως τραυματισμένος καὶ προσβεβλημένος ἐκ δυσεντερίας, ἐν ᾧ εἰς τὰς ἐκεῖ μάχας ἐπολέμησεν ἡρωϊκῶς. Ὁ Σωκράτης, ὀλίγα ἔτη πρὸ τοῦ θανάτου του (399 π.Χ.) συνωμίλησε μὲ τὸν Θεαίτητον, ὁ ὁποῖος τότε ἦτο μειράκιον, καὶ τὸν ἐθαύμασεν εἰπών, ὅτι, ὅταν ἡλικιωθῇ θὰ γίνῃ ἐλλόγιμος. Ἡ ἡλικία τοῦ μειρακίου τοποθετεῖται μεταξὺ 14 - 20 ἐτῶν. Φαίνεται λοιπόν, ὅτι ὁ Θεαίτητος ἐγεννήθη περὶ τὸ 417 π.Χ. ἐν Ἀθήναις. Πιστεύεται δέ, ὅτι ἐτραυματίσθη βαρέως κατὰ τὸ 369 π.Χ. εἰς τὰς περὶ τὴν Κόρινθον μάχας μεταξὺ Ἀθηναίων καὶ τῶν τότε συμμάχων των Σπαρτιατῶν, ἐναντίον τῶν Θηβαίων. Τότε θὰ ἦτο 48 περίπου ἐτῶν.

Ἐκ τῶν ὀλίγων πληροφοριῶν, αἱ ὁποῖαι ἐσώθησαν, φαίνεται, ὅτι ὁλόκληρον σχεδὸν τὸ δέκατον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι μαθηματικὴ δημιουργία τοῦ Θεαιτήτου. Ἡ συγκέντρωσις ὅμως καὶ ἡ διάταξις τῶν θεωρημάτων καὶ ἡ ὁμοιομορφία καὶ ἡ διατύπωσις τῶν ἀποδείξεων εἶναι ἀναμφισβητήτως δημιούργημα τοῦ Εὐκλείδου. Διὰ τὸ 9 θεώρημα τοῦ 10 βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται βασικὸν τῆς ὅλης θεωρίας περὶ ἀσυμμέτρων, σώζεται σχόλιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἑξῆς:

«Τὸ θεώρημα τοῦτο θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα, καὶ μέμνηται αὐτοῦ ὁ Πλάτων ἐν Θεαιτήτῳ, ἀλλ' ἐκεῖ μὲν μερικώτερον ἔγκειται, ἐνταῦθα δὲ καθόλου». (Euclides V2, Scholia in libros XI - XIII, post Heiberg edidit E.S. Stamatis, BSB B.G. Teubner, Λειψία 1977 σελ. 113).

Εἰς τὴν σελίδα 291 τοῦ προηγουμένως ἀναφερομένου βιβλίου (Euclides V2 scholia) γράφεται ὅτι εἰς τὸ 13 βιβλίον τῶν Στοιχείων περιλαμβάνονται τὰ 5 κανονικὰ πολύεδρα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς σφαῖραν, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ 3 εἶναι τῶν Πυθαγορείων, ἤτοι ὁ κύβος, ἡ πυραμὶς καὶ τὸ δωδεκάεδρον, ἐνῷ τὸ ὀκτάεδρον καὶ τὸ εἰκοσάεδρον εἶναι τοῦ Θεαιτήτου, λέγονται δὲ Πλατωνικά, διότι τὰ ἀναφέρει ὁ Πλάτων εἰς τὸν Τίμαιον. Ἀναφέρονται ὅμως ὡς τοῦ Εὐκλείδου, διὰ τὴν στοιχειώδη διάταξιν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου. Ἰδοὺ καὶ τὸ ἀρχαῖον κείμενον:

«Ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ, τουτέστι τῷ ιγ', γράφεται τὰ λεγόμενα Πλάτωνος, ε̄ σχήματα, ἃ αὐτοῦ μὲν οὐκ ἔστιν, τρία δὲ τῶν προειρημένων ε̄ σχημάτων τῶν Πυθαγορείων ἐστίν, ὅ τε κύβος καὶ ἡ πυραμὶς καὶ τὸ δωδεκάεδρον, Θεαιτήτου δὲ τό τε ὀκτάεδρον καὶ τὸ εἰκοσάεδρον (Στοιχείων XIII 14 καὶ 16), τὴν δὲ προσωνυμίαν ἔλαβεν Πλάτωνος διὰ τὸ μεμνῆσθαι αὐτὸν ἐν τῷ Τιμαίῳ περὶ αὐτῶν· Εὐκλείδου δὲ ἐπιγράφεται καὶ τοῦτο τὸ βιβλίον διὰ τὸ στοιχειώδη τάξιν ἐπιτεθεικέναι καὶ ἐπὶ τούτου τοῦ στοιχείου».

Εἰς τὸ κατωτέρω μνημονευόμενον σχόλιον τοῦ Ἄραβος A boû Othman (εἰς τὴν παράγραφον, Σκοπὸς τοῦ X βιβλίου) λέγεται ὅτι «ἡ θεωρία τῶν ἀσυμμέτρων, τὴν ὁποίαν περιλαμβάνει τὸ X βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἀνεπτύχθη σπουδαίως ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου... ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸν Εὐκλείδην προσέφερεν οὗτος ἀνελέγκτους κανόνας πρὸς τὴν συμμετρίαν καὶ τὴν ἀσυμμετρίαν. Διετύπωσε μετ' ἀκριβείας τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰς διακρίσεις τῶν ῥητῶν καὶ ἀρρήτων μεγεθῶν καὶ τέλος ἀπέδειξε σαφῶς τὴν σπουδαιότητά των».

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ - ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ Χ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀναπτυσσομένην εἰς 115 θεωρήματα κατὰ τὴν ἔκδοσιν Heiberg, ἣν ἀκολουθοῦμεν, καὶ θεωρεῖται τὸ τελειότερον ἐκ τῶν 13 βιβλίων τῶν Στοιχείων. Ὁ Woepcke, τοῦ ὁποίου ἡ συμβολὴ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μαθηματικῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων θεωρεῖται σημαντική, γράφει συναφῶς τὰ ἑξῆς· «τίποτε δὲν εἶναι ὡραιότερον καὶ τελειότερον ἢ ἡ τάξις καὶ ὁ παραλληλισμὸς τῶν ἑξάδων τοῦ Χ βιβλίου. Πανταχοῦ εἰς τοῦτο διαλάμπει ἡ μεγαλοφυΐα τοῦ συγγραφέως τῶν Στοιχείων»[1].

Αἱ ἀρχαὶ τῆς θεωρίας ἀνάγονται εἰς τοὺς πρώτους Πυθαγορείους. Ἡ δημιουργία ὅμως καὶ ἡ ἀνάπτυξις τῆς θεωρίας, ὡς αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὸ Χ βιβλίον τῶν Στοιχείων, δέον νὰ θεωρηθῇ ἔργον τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος καὶ δὴ καὶ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου (περίπου 417—369 π.Χ.) καὶ τοῦ Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου (περίπου 408—355 π.Χ.). Κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν[2] τὸ 9ον θεώρημα τοῦ Χ βιβλίου, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται βασικὸν τῆς ὅλης θεωρίας, «θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα». Περὶ τῆς συμβολῆς τοῦ Θεαιτήτου καὶ τοῦ Θεοδώρου[3] τοῦ Κυρηναίου, τοῦ διδασκάλου τοῦ Πλάτωνος εἰς τὰ μαθηματικά, εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἀσυμμέτρων πληροφορούμεθα καὶ ἐκ τοῦ διαλόγου τοῦ Πλάτωνος τοῦ ἀφιερωμένου εἰς τὸν Θεαίτητον (147 D — 148 B), ἔνθα γράφεται :

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. Ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον ;

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Ἔμοιγε δοκοῦμεν· σκόπει δὲ καὶ σύ.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Λέγε.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Καὶ εὖ γε.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Κάλλιστα· ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο ;

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνί-

---

1. Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius p. 675 (Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide p. 453, éd. Les Belles Lettres, Paris 1950).
2. Ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ὑπὸ J. Heiberg, τόμ. 5ος, σ. 450.
3. Ἄρθρον Theodoros, Pauly–Wissowa, Real–Enzyklopaedie der klassischen Altertumswissenschaft.

ζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ἄριστά γ' ἀνθρώπων, ὦ παῖδες».

['Ερμηνεία: Θ. Ὁ παρὼν ἐδῶ Θεόδωρος ἠσχολεῖτο μὲ τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν $\sqrt{3}$ καὶ τὴν $\sqrt{5}$ ἀποδεικνύων ὅτι ἡ $\sqrt{3}$ καὶ ἡ $\sqrt{5}$ δὲν εἶναι σύμμετροι ἀντιστοίχως μὲ τὴν ὑπόρριζον ποσότητα 3 καὶ 5 καὶ οὕτω ἐξετάζων ἀνὰ μίαν ἔφθασε μέχρι τῆς $\sqrt{17}$· ἐνταῦθα δὲ ἐσταμάτησε. Ἡμεῖς λοιπὸν συνελάβομεν τὴν ἰδέαν, ἐπειδὴ αἱ ρίζαι τῶν μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν ἐφαίνοντο ἄπειροι, νὰ περιλάβωμεν εἰς ἕνα νόμον τὴν ἔκφρασιν τῶν ριζῶν τούτων.

Σ. Μήπως ηὕρετε τοιοῦτον νόμον;

Θ. Κατ' ἐμὲ νομίζω· ἰδέ το καὶ σύ.

Σ. Λέγε.

Θ. Πάντα ἀριθμὸν τὸν ἀνελύομεν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων· τὸν μὲν δυνάμενον νὰ εἶναι γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων παρομοιάσαντες πρὸς τετράγωνον σχῆμα τὸν ὠνομάσαμεν τετράγωνον καὶ ἰσόπλευρον.

Σ. Καὶ πολὺ ὀρθῶς.

Θ. Τὸν δὲ μεταξὺ δύο τετραγώνων, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀδύνατον ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων, ἀλλὰ ἢ ἔχει τὸν ἕνα παράγοντα μεγαλύτερον καὶ τὸν ἄλλον μικρότερον ἢ τὸν ἕνα μικρότερον καὶ τὸν ἄλλον μεγαλύτερον, πάντοτε δὲ οἱ δύο παράγοντες εἶναι ἄνισοι, παρομοιάσαντες πρὸς τὸ πρόμηκες (ὀρθογώνιον) σχῆμα τὸν ἐκαλέσαμεν προμήκη.

Σ. Κάλλιστα. Ἀλλὰ ποῖον τὸ συμπέρασμα;

Θ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ ὑψούμεναι εἰς τὸ τετράγωνον παρέχουσι τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν ὠνομάσθησαν μῆκος, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ἐπειδὴ αὗται δὲν εἶναι σύμμετροι γραμμικῶς ἐξεταζόμεναι πρὸς τὰς πρώτας, ἐν ᾧ εἶναι σύμμετροι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἐκφράζοντας ἐπίπεδα, ὅταν αὗται ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον. Ὁμοίως ἐπράξαμεν καὶ διὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι γινόμενον τριῶν ἴσων ἢ ἀνίσων παραγόντων.

Σ. Ἄριστα παιδιά μου].

Εἰς σύγχρονον διατύπωσιν ἡ ἑρμηνεία τοῦ ἀνωτέρω χωρίου ἔχει ὡς ἑξῆς· τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν $A=\alpha\times\alpha$ τὸν παρομοιάζομεν πρὸς τετράγωνον σχῆμα πλευρᾶς α καὶ τὴν πλευρὰν ταύτην καλοῦμεν μῆκος. Τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν $A=\beta\times\gamma$, ἔνθα $\beta \gtrless \gamma$ τὸν παρομοιάζομεν πρὸς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον (πρόμηκες σχῆμα) καὶ τὸν καλοῦμεν προμήκη. Τὴν γραμμήν, δηλ. τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τετραγώνου, τὴν $\sqrt{\beta\times\gamma}$ τὴν ὀνομάζομεν δύναμιν (Σημ. Δύναμιν, διότι αὕτη ὑψουμένη, εἰς τὸ τετράγωνον, δύναται, παράγει τὸν ἀριθμὸν Α), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς Α, ἐν ᾧ ἡ $(\sqrt{\beta\times\gamma})^2$ εἶναι σύμμετρος πρὸς Α. Τὸ αὐτὸ διὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι γινόμενον τριῶν παραγόντων. Ἐὰν δηλ. $A=\alpha\times\alpha\times\alpha$, ἡ πλευρὰ α καλεῖται μῆκος. Ἐὰν ὅμως $A=\alpha\times\beta\times\gamma$ (οὐχὶ κύβος ἀριθμός), τὴν πλευρὰν $\sqrt[3]{\alpha\times\beta\times\gamma}$ τὴν ὀνομάζομεν κύβον (Σημ. Κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν ὀνομασίαν δύναμις, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν, ὅτι ἡ πλευρὰ αὕτη ὑψουμένη εἰς τὸν κύβον παρέχει τὸν ἀριθμὸν Α), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς Α, ἐν ᾧ $\left(\sqrt[3]{\alpha\times\beta\times\gamma}\right)^3$ εἶναι σύμμετρος πρὸς Α.

Συναφῶς πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων σημειοῦμεν ἐνταῦθα ὅτι ὁ Δημόκριτος εἶχε γράψει πραγματείαν, μὴ σωθεῖσαν, ὑπὸ τὸν τίτλον «Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν» (Περὶ ἀσυμμέτρων γραμμῶν καὶ στερεῶν,). [Diels, Fragm. II, σ. 141]. Ἐκ τοῦ σωθέντος τούτου τίτλου τῆς πραγματείας τοῦ Δημοκρίτου ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων θὰ εἶχε σημειώσει προόδους καὶ πρὸ τῶν χρόνων τῆς 'Ακαδημίας τοῦ Πλάτωνος.

Τὸ περιεχόμενον τοῦ Χ βιβλίου.

Προτάσσονται τέσσαρες ὁρισμοί, οἱ ὁποῖοι εἴς τινας παλαιοτέρας τῆς τοῦ Heiberg ἐκδόσεις διαιροῦνται εἰς ἕνδεκα. Μετὰ τὸ θεώρημα 47 ἕπονται οἱ δεύτεροι ὁρισμοὶ καὶ μετὰ τὸ θεώρημα 84 οἱ τρίτοι ὁρισμοί. Οἱ δεύτεροι καὶ οἱ τρίτοι ὁρισμοὶ εἶναι ταυτόσημοι: οἱ μὲν ἀφορῶσιν εἰς ἀθροίσματα, οἱ δὲ εἰς διαφοράς.

'Ορισμὸς α'. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ μετρούμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ μέτρου, ἀσύμμετρα δὲ τὰ μὴ ἔχοντα κοινὸν μέτρον.

'Ορ. β'. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι λέγονται ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα μετροῦνται διὰ τοῦ αὐτοῦ χωρίου· δυνάμει δὲ ἀσύμμετροι λέγονται αἱ εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα οὐδὲν χωρίον ἔχουσιν ὡς κοινὸν μέτρον.

'Ορ. γ'. 'Εὰν δοθῇ εὐθεῖά τις ὡς μέτρον, ἀποδεικνύεται, ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειροι εὐθεῖαι σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι πρὸς αὐτήν, αἱ μὲν μήκει μόνον (γραμμικῶς θεωρούμεναι, μονοδιαστάτως) σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι, αἱ δὲ καὶ δυνάμει (τὰ τετράγωνα αὐτῶν) σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι. Ἂς καλῆται ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ῥητὴ καὶ αἱ πρὸς ταύτην μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι ῥηταί. 'Εὰν εὐθεῖά τις εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀλλὰ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δοθείσης, αἱ εὐθεῖαι ἂς καλῶνται ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. (Ὥστε κατὰ τὸν Εὐκλείδην ἡ ἔννοια τοῦ ῥητοῦ εἶναι εὐρυτέρα τῆς σημερινῆς). 'Εὰν εὐθεῖα εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὄχι μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει (καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἀσύμμετρα) αἱ εὐθεῖαι ἂς καλῶνται ἄλογοι.

'Ορ. δ'. Καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς δοθείσης εὐθείας ἂς καλῆται ῥητὸν καὶ τὰ σύμμετρα πρὸς τοῦτο ῥητά. Τὰ ἀσύμμετρα πρὸς τοῦτο ἂς καλῶνται ἄλογα (ἄρρητα) καὶ αἱ πλευραὶ τούτων ἄλογοι (ἄρρητοι). 'Εὰν τὰ ἀσύμμετρα ταῦτα εἶναι ἄλλα εὐθύγραμμα καὶ ὄχι τετράγωνα, ἂς καλῶνται ἄλογοι αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων τετραγώνων.

1. Πρῶτον θεώρημα εἶναι ἡ περίφημος πρότασις, καθ' ἣν δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος ἢ τὸ ἥμισυ, ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου ὁμοίως, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς πάντοτε, θὰ ληφθῇ μέγεθος μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροῦ μεγέθους, ὁσονδήποτε μικρὸν καὶ ἂν εἶναι τοῦτο.

2. Δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν καὶ ἐφαρμοζομένης τῆς μεθόδου τῆς ἀνθυφαιρέσεως (τῆς εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν), ἐὰν δὲν λαμβάνεται ὑπόλοιπον μηδέν, τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα.

3–4. Εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. δύο ἢ περισσοτέρων μεγεθῶν.

5. Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

6. 'Εὰν δύο μεγέθη ἔχωσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα.

Πόρισμα. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ Δ, Ε, (νοοῦνται μὴ τετράγωνοι) καὶ εὐθεῖά τις Α (λαμβανομένη ὡς μέτρον, ῥητή). Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖά τις ἔστω Β, ὥστε αὐτὴ καὶ ἡ Α νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, τὰ τετράγωνα ὅμως αὐτῶν νὰ εἶναι σύμμετρα. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β ὀνομάζονται τότε ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (κατὰ τὸν ὁρ. 3). Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τῶν Δ, Ε καὶ Α τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\Delta : E = A : Z$, (1). Τῶν Α, Ζ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $A : B = B : Z$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν 9 τοῦ V εἶναι $A : Z = A^2 : B^2$. Καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $\Delta : E = A^2 : B^2$. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (καὶ μήκει ἀσύμμετροι), διότι μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἔχουσι λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν.

7. Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

8. Ἐὰν δύο μεγέθη δὲν ἔχωσι πρὸς ἄλληλα λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα.

9. Τὰ τετράγωνα τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς μήκει συμμέτρους.

Τὰ δὲ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, δὲν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα μὴ ἔχοντα λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ τὰς πλευρὰς θὰ ἔχωσι μήκει συμμέτρους.

10. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μήκει ἀσυμμέτρων ἢ δυνάμει ἀσυμμέτρων.

11. Ἔστω $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Ἐὰν α, β σύμμετρα εἶναι καὶ γ, δ σύμμετρα. Ἐὰν α, β ἀσύμμετρα εἶναι καὶ γ, δ ἀσύμμετρα.

12. Ἐὰν α, β σύμμετρα πρὸς γ, εἶναι καὶ α, β σύμμετρα.

13. Ἐὰν α, β σύμμετρα καὶ α, γ ἢ β, γ ἀσύμμετρα εἶναι καὶ β, γ ἢ α, γ ἀσύμμετρα.

14. Ἔστω $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Ἐὰν α, $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα, εἶναι καὶ γ, $\sqrt{\gamma^2-\delta^2}$ σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα.

15. Ἐὰν α, β σύμμετρα, εἶναι καὶ $(\alpha+\beta)$, α σύμμετρα καὶ $(\alpha+\beta)$, β σύμμετρα. Καὶ ἂν $(\alpha+\beta)$, α ἢ $(\alpha+\beta)$, β σύμμετρα εἶναι καὶ α, β σύμμετρα.

16. Ἐὰν α, β ἀσύμμετρα εἶναι καὶ $(\alpha+\beta)$, α ἀσύμμετρα καὶ $(\alpha+\beta)$, β ἀσύμμετρα. Καὶ ἀντιστρόφως.

17. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $A > B$. Ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι μήκει σύμμετροι (θεωρούμεναι δηλαδὴ γραμμικῶς), εἶναι καὶ A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι (δηλ. τὸ ἄθροισμα πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν). Καὶ ἀντιστρόφως :

Ἐὰν εἶναι A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ μήκει σύμμετροι.

18. Ἔστω πάλιν $A > B$. Ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, εἶναι καὶ A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ τὸ ἀντίστροφον.

19. Ἐὰν $A > B$ καὶ A, B εὐθεῖαι ῥηταί, τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι ῥητόν.

20. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητόν, καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ῥητὸν καὶ μήκει σύμμετρον πρὸς τὸ πρῶτον τμῆμα.

21. Τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν εἶναι ἄλογον καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται μέση. [Σημ. Ὀρθογώνιον μέσον εἶναι μονώνυμον περιέχον τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, ἐν ᾧ μέση εἶναι μονώνυμον περιέχον τὴν τετάρτην ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ].

22. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέση καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὸ πρῶτον.

23. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μέσην εἶναι μέση.

24. Ἐὰν $A > B$ καὶ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι μέσαι μήκει σύμμετροι, τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶναι ὀρθογώνιον μέσον.

25. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho\sqrt{\varkappa}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων θὰ εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον. Ῥητὸν θὰ εἶναι ἂν $\sqrt{\varkappa} = \mu\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἄλλως μέσον.

26. Ἡ διαφορὰ $\rho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho^2\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ οὐδέποτε εἶναι ῥητή.

27. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μέσων A, B, ὥστε μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A \times B$ ῥητόν.

28. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μέσων A, B, ὥστε μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A \times B$ μέσον.

Λῆμμα 1ον. Εὕρεσις τοῦ τύπου τοῦ παρέχοντος ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2 + y^2 = z^2$ τοῦ $\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{\varkappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2$ ἔνθα $\varkappa$, ξ, σ, τ ἀκέραιοι καὶ $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$. Ἐὰν δὲν εἶναι $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$, ὁ $\varkappa\xi\sigma\tau = \left(\frac{\varkappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος.

Λῆμμα 2ον. Εὕρεσις μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, ὅστις νὰ εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν, τοῦ $\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$, ἔνθα $\varkappa$, ξ, σ, τ ἀκέραιοι καὶ $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$.

29. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου A καὶ μιᾶς καθέτου B, ὥστε αὗται νὰ εἶναι ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ A καὶ ἡ ἄλλη κάθετος μήκει σύμμετροι.

30. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ A καὶ ἡ ἄλλη κάθετος μήκει ἀσύμμετροι.

31α. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου A καὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς B, ὥστε αὗται νὰ εἶναι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι (ἤτοι μόνον A^2, B^2 σύμμετρα) καὶ $A \times B$ ῥητὸν καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$, A μήκει σύμμετροι.

31β. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ $\sqrt{A^2 - B^2}$, A μήκει ἀσύμμετροι.

32α. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου A καὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς B, ὥστε αὗται νὰ εἶναι μέσαι καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, καὶ $A + B$ νὰ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$, A μήκει σύμμετροι.

32β. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ $\sqrt{A^2 - B^2}$, A μήκει ἀσύμμετροι.

33. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου A, B, ὥστε A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ ῥητὸν καὶ $A \times B$ μέσον.

34. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου A, B, ὥστε A^2, B^2, ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον καὶ $A \times B$ ῥητόν.

35. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, A, B, ὥστε A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον, $A \times B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $A^2 + B^2$.

36. Ἔστωσαν τὰ μονώνυμα (καλούμενα ὀνόματα) AB, $B\Gamma$, ὥστε AB, $B\Gamma$ ῥητὰ καὶ μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα. Ἡ εὐθεῖα $A\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος (ἄρρητος) καὶ καλεῖται, ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος).

Ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς δυωνύμου εἶναι $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, ἔνθα ρ τὸ μέτρον καὶ α, β, γ, δ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι. Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ ἡ $\rho + \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι δυώνυμος.

37. Ἔστωσαν AB, $B\Gamma$ μέσαι, μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα καὶ $AB \times B\Gamma$ ῥητόν.

Ἡ εὐθεῖα Γ = ΑΒ + ΒΓ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐκ δύο μέσων πρώτη.

38. ΑΒ, ΒΓ μέσαι, μόνον ΑΒ², ΒΓ² σύμμετρα, ΑΒ × ΒΓ μέσον. Ἡ εὐθεῖα ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

39. ΑΒ², ΒΓ² ἀσύμμετρα, ΑΒ² + ΒΓ² ῥητόν, ΑΒ × ΒΓ μέσον. Ἡ εὐθεῖα ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται μείζων.

40. ΑΒ², ΒΓ² ἀσύμμετρα, ΑΒ² + ΒΔ² μέσον, ΑΒ × ΒΓ ῥητόν. Ἡ εὐθεῖα ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

41. ΑΒ², ΒΓ² ἀσύμμετρα. ΑΒ² + ΒΓ² μέσον, ΑΒ × ΒΓ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς ΑΒ² + ΒΓ². Ἡ εὐθεῖα Γ = ΑΒ + ΒΓ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται δύο μέσα δυναμένη.
Ἡ μέση τοῦ θ. 21 καὶ αἱ ἓξ εὐθεῖαι τῶν θ. 36—41 εἶναι αἱ πρῶται ἑπτὰ κύριαι ἄλογοι (ἄρρητοι) εὐθεῖαι.

Λῆμμα. Ἔστω ΑΓ+ΓΒ=ΑΔ+ΔΒ, ΑΓ>ΔΒ>ΑΔ>ΓΒ. Τότε εἶναι ΑΓ²+ΓΒ²>ΑΔ²+ΔΒ².

42-47. Τὰ μονώνυμα τῶν ἓξ ἀλόγων τῶν θ. 36-41 εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα.

Ὁρισμοὶ δεύτεροι.

Ὑπαρχούσης ῥητῆς ρ καὶ τῆς δυωνύμου (ἐκ δύο ὀνομάτων) Δ=Α+Β, ἔνθα Α, Β ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (ῥηταὶ ἀλλὰ μόνον Α², Β² σύμμετρα, θ. 36), καὶ Α>Β.

I. Ἔστω $\sqrt{Α^2—Β^2}$ καὶ Α μήκει σύμμετροι.

Ἐὰν 1. Α, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ πρώτη δυώνυμος.

» 2. Β, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ δευτέρα δυώνυμος.

» 3. Οὔτε Α οὔτε Β μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ τρίτη δυώνυμος.

II. Ἔστω $\sqrt{Α^2—Β^2}$ καὶ Α μήκει ἀσύμμετροι.

Ἐὰν 4. Α, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ τετάρτη δυώνυμος.

» 5. Β, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ πέμπτη δυώνυμος.

» 6. Οὔτε Α οὔτε Β μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ ἕκτη δυώνυμος.

48-53. Εὕρεσις τῶν ἓξ τούτων δυωνύμων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μὲν διάφοροι πρὸς ἀλλήλας, ἀλλὰ ἔχουσι τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς δυωνύμου (θ. 36), ὅτι δηλ. τὰ μονώνυμα αὐτῶν εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα.

54-59. [Μετασχηματισμοὶ διπλῶν ῥιζικῶν ἐξ ἀθροίσματος]. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, τρίτη δυώνυμος, τετάρτη δυώνυμος, πέμπτη δυώνυμος, ἕκτη δυώνυμος, τὰ ἀντίστοιχα ὕψη εἶναι ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος), ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἐκ δύο μέσων δευτέρα, μείζων, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, δύο μέσα δυναμένη. (Ἓξ τρίγωνα).

Λῆμμα.

Ἐὰν α διάφορον τοῦ β, εἶναι $α^2+β^2>2αβ$.

60-65. Ἀντίστροφα προηγουμένων. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὸν καὶ τὰ ὕψη κατὰ σειρὰν εἶναι ἐκ δύο ὀνομάτων, ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἐκ δύο μέσων δευτέρα, μείζων, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, δύο μέσα δυναμένη, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι κατὰ σειράν, πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, τρίτη δυώνυμος, τετάρτη δυώνυμος, πέμπτη δυώνυμος, ἕκτη δυώνυμος.

66. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) εἶναι καὶ αὐτὴ δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή, ἤτοι ἂν ἡ δοθεῖσα εἶναι πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώ-

νυμος, ... ἕκτη δυώνυμος καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν εἶναι πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος. . . . . ἕκτη δυώνυμος.

67. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν οὖσαν ἄθροισμα δύο μέσων εὐθειῶν εἶναι καὶ αὐτὴ ἄθροισμα δύο μέσων εὐθειῶν καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἂν δηλ. εἶναι $Γ=Α+Β$ ἔνθα Α, Β μέσαι, μόνον $Α^2$, $Β^2$ σύμμετρα καὶ $Α\times Β$ ἢ ρητὸν ἢ μέσον καὶ Δ μήκει σύμμετρος πρὸς Γ, εἶναι καὶ $Δ=Ε+Ζ$ ἔνθα Ε, Ζ μέσαι, μόνον $Ε^2$, $Ζ^2$ σύμμετρα, καὶ $Ε\times Ζ$ ἢ ρητὸν ἢ μέσον ἀντιστοίχως.

68. Ἔστω ἡ μείζων $ΑΒ=ΑΕ+ΕΒ$, ἔνθα $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ ρητὸν καὶ $ΑΕ\times ΕΒ$ μέσον καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΓΔ. Καὶ ἡ ΓΔ εἶναι μείζων, τῆς μορφῆς $ΓΖ+ΖΔ$ ἔνθα $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα, $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ ρητὸν, καὶ $ΓΖ\times ΖΔ$ μέσον

69. Ἔστω ἡ ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη $ΑΒ=ΑΕ+ΕΒ$, ἔνθα $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ μέσον καὶ $ΑΕ\times ΕΒ$ ρητόν, καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΓΔ. Καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη τῆς μορφῆς $ΓΖ+ΖΔ$, ἔνθα $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα, $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ μέσον καὶ $ΓΖ\times ΖΔ$ ρητόν.

70. Ἔστω ἡ δύο μέσα δυναμένη $ΑΒ=ΑΕ+ΕΒ$, ἔνθα $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ μέσον, $ΑΕ\times ΕΒ$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΕ^2+ΕΒ^2$, καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΓΔ. Καὶ ἡ ΓΔ εἶναι δύο μέσα δυναμένη τῆς μορφῆς $ΓΖ+ΖΔ$, ἔνθα $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ μέσον, $ΑΕ \times ΕΒ$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΖ^2+ΖΔ^2$.

71. Ἐὰν Α εὐθύγραμμον σχῆμα ρητὸν καὶ Β εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον, ἡ $\sqrt{Α+Β}$ εἶναι ἢ ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος), ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων ἢ ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη (δηλ. μιᾶς τῶν μορφῶν τῶν θ. 36, 37, 39, 40).

72. Ἐὰν Α εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον καὶ Β εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον, ἡ $\sqrt{Α+Β}$ εἶναι ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη (δηλ. μιᾶς τῶν μορφῶν τῶν θ. 38, 41).

73. Ἔστωσαν τὰ μονώνυμα $ΑΒ > ΒΓ$ ρητὰ καὶ μόνον $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ σύμμετρα. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος (ἄρρητος) καὶ καλεῖται ἀποτομή.

[ΣΗΜ. Ἐὰν ρητὴ εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς εὐθείας εἶναι ἀποτομὴ (ἤτοι εἶναι διαφορὰ ἄρρητος δύο ρητῶν μονωνύμων τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα), (XIII.6). Ἐπίσης ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἀποτομή, XIII.17].

74. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $ΑΒ > ΒΓ$ καὶ μόνον $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ σύμμετρα, καὶ $ΑΒ\times ΒΓ$ ρητόν. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

75. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $ΑΒ > ΒΓ$ καὶ μόνον $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ σύμμετρα, καὶ $ΑΒ\times ΒΓ$ μέσον. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

76. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $ΑΒ > ΒΓ$, ὥστε $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΒ^2+ΒΓ^2$ ρητὸν καὶ $ΑΒ\times ΒΓ$ μέσον. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐλάσσων. [Σημ. Ἐὰν ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι ρητὴ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων, (XIII.11). Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου ἐπίσης εἶναι ἐλάσσων, (XIII.16)].

77. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $ΑΒ > ΒΓ$, ὥστε $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΒ^2+ΒΓ^2$ μέσον καὶ $ΑΒ\times ΒΓ$ ρητόν. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται, ἡ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

78. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $ΑΒ > ΒΓ$, ὥστε $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΒ^2+ΒΓ^2$ μέσον, $Α\times Β$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΒ^2+ΒΓ^2$. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται, ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. [Σημ. Τὰ μονώνυμα τῶν θεωρημάτων 36—41 εἶναι ἀντιστοίχως τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν θεωρ. 73—78. Ἐκεῖ μὲν ἔχομεν πρόσθεσιν, ἐνταῦθα δὲ ἀφαίρεσιν τῶν μονωνύμων. Ὅθεν ἐκτὸς τῆς ἀλόγου μέσης ἔχομεν

καὶ 12 ἀκόμη κυρίας ἀλόγους. Ἓξ ἐκ προσθέσεως καὶ ἓξ ἐξ ἀφαιρέσεως (36-41 καὶ 73-78).

79–84. Τὰ μονώνυμα τῶν διαφορῶν τῶν θ. 73–78 εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα.

Ἕπονται οἱ τρίτοι ὁρισμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι ταὐτόσημοι πρὸς τοὺς δευτέρους. Οἱ δεύτεροι ἀφορῶσιν εἰς ἀθροίσματα, ἐν ᾧ οἱ τρίτοι εἰς διαφοράς.

Ὁ μειωτέος καλεῖται ἡ ὅλη εὐθεῖα, ὁ ἀφαιρετέος ἡ προσαρμόζουσα εὐθεῖα εἰς τὴν διαφοράν (ἀποτομήν). Ὅπως εἰς τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) τοῦ θ. 36 διακρίνομεν κατὰ τοὺς δευτέρους ὁρισμοὺς ἓξ εἴδη δυωνύμων ἀλόγων, οὕτω καὶ εἰς τὴν ἀποτομὴν τοῦ θ. 73 διακρίνομεν κατὰ τοὺς τρίτους ὁρισμοὺς ἓξ εἴδη ἀποτομῶν ἀλόγων, τὴν πρώτην ἀποτομήν, τὴν δευτέραν ἀποτομήν, τὴν τρίτην ἀποτομήν, τὴν τετάρτην ἀποτομήν, τὴν πέμπτην ἀποτομήν, τὴν ἕκτην ἀποτομήν. Ἑκάστη τούτων ἔχει ἰδίαν ἰδιότητα. Κοινὸν γνώρισμα ὅλων εἶναι ἡ ἰδιότης τῆς ἀποτομῆς, ὅτι δηλ. τὰ μονώνυμα αὐτῶν εἶναι ρητά, ἀλλὰ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα.

85–90. Εὑρίσκονται ἡ πρώτη, ἡ δευτέρα,...... ἡ ἕκτη ἀποτομή.

91–96. [Μετασχηματισμοὶ διπλῶν ριζικῶν διαφορῶν]. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογρ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ρητὴ καὶ τὸ ἄλλο κατὰ σειρὰν πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή, ... ἕκτη ἀποτομή, τὰ ὕψη εἶναι ἀντιστοίχως ἀποτομή, πρώτη ἀποτομὴ μέσης, δευτέρα ἀποτομὴ μέσης, ἐλάσσων, ἡ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (εἶναι δηλ. τὰ ὕψη αἱ ἄρρητοι τῆς μορφῆς τῶν θ. 73–78 ἀντιστοίχως).

97–102. Ἀντίστροφα προηγουμένων. Ἐὰν δηλ. τὰ ὕψη ὀρθογωνίων τριγώνων εἶναι κατὰ σειρὰν ἀποτομή, πρώτη ἀποτομὴ μέσης, δευτέρα ἀποτομὴ μέσης...... ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ρητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη ἀποτομή, δευτέρα, ἀποτομή, τρίτη ἀποτομή, ... ἕκτη ἀποτομή.

103. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἀποτομὴν εἶναι καὶ αὐτὴ ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἔστω ἡ ἀποτομὴ ΑΒ=ΑΕ—ΕΒ, ὁπότε ΑΕ, ΕΒ ρηταὶ καὶ μόνον $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ σύμμετρα. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΓΔ, θὰ εἶναι τῆς μορφῆς ΓΖ—ΖΔ ὥστε ΓΖ, ΖΔ ρηταὶ καὶ μόνον $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ σύμμετρα, καὶ ἂν ΑΒ εἶναι πρώτη ἀποτομή, ἢ δευτέρα ἀποτομή...... ἢ ἕκτη ἀποτομὴ θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΔ πρώτη ἀποτομὴ ἢ δευτέρα ἀποτομή, ... ἢ ἕκτη ἀποτομή.

104. Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἀποτομὴν μέσης εἶναι καὶ αὐτὴ ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἔστω ΑΒ=ΑΕ—ΕΒ ἔνθα ΑΕ, ΕΒ μέσαι καὶ μόνον $ΑΕ^2$ $ΕΒ^2$ σύμμετρα ὁπότε θὰ εἶναι ΑΕ × ΕΒ ἢ ρητὸν ἢ μέσον. Ἐὰν ΓΔ = ΓΖ — ΖΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ΑΒ, θὰ εἶναι καὶ ΓΖ, ΖΔ μέσαι, μόνον $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ σύμμετρα καὶ ΓΖ × ΖΔ ἢ ρητὸν ἢ μέσον ἀντιστοίχως

105–107. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἢ τὴν μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν ἢ τὴν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν εἶναι καὶ αὕτη ἀντιστοίχως ἐλάσσων, ἡ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, δηλ. τῆς μορφῆς τῶν διαφορῶν τῶν θ. 76, 77, 78 ἀντιστοίχως.

Ἔστωσαν τὰ εὐθύγραμμα σχήματα Α > Β.

108. Ἐὰν Α εἶναι ὀρθογώνιον ρητὸν καὶ Β ὀρθογώνιον μέσον, ἡ $\sqrt{Α-Β}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, ἢ ἀποτομὴ (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 73) ἢ ἐλάσσων (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 76).

109. Ἐὰν Α ὀρθογώνιον μέσον καὶ Β ὀρθογ. ρητόν, ἡ $\sqrt{Α-Β}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, ἢ πρώτη ἀποτομὴ μέσης (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 74) ἢ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 77).

110. Ἐὰν Α ὀρθογώνιον μέσον καὶ Β ὀρθογώνιον μέσον, καὶ Α, Β ἀσύμμετρα, ἡ $\sqrt{Α-Β}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονονωνύμων, ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 75) ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 78).

Πόρισμα. Ἡ μέση καὶ αἱ ἓξ ἄλογοι διαφοραὶ (θ. 73 — 78) οὐδέποτε μεταξὺ των ταὐτίζονται.

112. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογ. τριγώνου εἶναι ρητὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος,... ἕκτη δυώνυμος, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή,... ἕκτη ἀποτομὴ καὶ τὰ μονώνυμα τῶν ἀποτομῶν εἶναι σύμμετρα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν δυωνύμων καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

113. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ρητὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή,...... ἕκτη ἀποτομή, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινομένης εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, ... ἕκτη δυώνυμος καὶ τὰ μονώνυμα τῶν δυωνύμων εἶναι σύμμετρα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν ἀποτομῶν καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

114. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ἀποτομὴ καὶ τὸ ἄλλο δυώνυμος, ὥστε τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου νὰ εἶναι ἀντιστοίχως σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, τὸ ὕψος εἶναι ρητόν.

115. Δοθείσης τῆς (ἀρρήτου) μέσης εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσιν ἄπειροι ἄρρητοι, αἱ ὁποῖαι δὲν ταὐτίζονται.

Σκοπὸς τοῦ X Βιβλίου.

Κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν τῶν Στοιχείων (ἔκδ. Heiberg, τόμ. V, σ. 414), «Ὁ σκοπὸς τοῦ ι' βιβλίου τῷ Εὐκλείδῃ διδάξαι περὶ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων καὶ περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων·......... περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων οὐ πασῶν ..... ἀλλὰ τῶν ἁπλουστάτων εἰδῶν, ὧν συντιθεμένων γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, ὧν τινας καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ἀναγράφει».

Διὰ τὸν σκοπὸν τοῦ X βιβλίου καὶ τὴν συμβολὴν τοῦ Θεαιτήτου εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ περιεχομένου του πληροφορούμεθα καὶ ἐκ σχολίου τοῦ Ἄραβος Aboû Othman τοῦ ἐκ Δαμασκοῦ (περίπου 1000 μ.Χ.), τὸ ὁποῖον ὑπὸ τῶν νεωτέρων μελετητῶν τῶν Στοιχείων θεωρεῖται ὡς προερχόμενον ἐκ πραγματείας τοῦ Πάππου (300 μ.Χ.). Τὸ σχόλιον τοῦτο σωζόμενον εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν ἀνευρέθη καὶ ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ Woepcke κατὰ τὸ 1855 καὶ ἔχει κατὰ τὰ κυριώτερα συναφῆ μέρη ὡς ἑξῆς: «Ὁ σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ἡ ἔρευνα τῶν συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων, τῶν ρητῶν καὶ ἀρρήτων μεγεθῶν. Ἡ θεωρία αὕτη ἔχει τὴν ἀρχήν της εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου. Ἀνεπτύχθη σπουδαίως ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου, ὁ ὁποῖος ἐπέδειξεν εἰς τὸν κλάδον τοῦτον ὡς καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν τοιαύτην ὀξύνοιαν, ὥστε δικαίως νὰ προκαλῇ τὸν θαυμασμόν. Ἐξ ἄλλου οὗτος ὑπῆρξεν ἐξόχως πεπροικισμένη διάνοια καὶ ἀφωσιώθη μὲ εὐγενῆ ζῆλον εἰς τὴν ἔρευναν τῆς ἀληθείας τῆς περιεχομένης εἰς τὰς ἐπιστήμας, ὡς τοῦτο ἐπιμαρτυρεῖται ἐκ τοῦ ὁμωνύμου διαλόγου τοῦ Πλάτωνος. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς ἀκριβεῖς διακρίσεις τῶν ρηθέντων ἀνωτέρω μεγεθῶν καὶ τὰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων τῆς θεωρίας αὐτῆς, πιστεύω, ὅτι αὗται κατὰ κύριον λόγον ὀφείλονται εἰς τὸν μαθηματικὸν τοῦτον. Καὶ βραδύτερον ὁ μέγας Ἀπολλώνιος τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλοφυΐα εἰς τὰ μαθηματικὰ ἐθαυμάσθη εἰς μέγαν βαθμὸν προσέθεσεν εἰς τὰς ἀνακαλύψεις αὐτὰς θαυμασίας θεωρίας κατόπιν πολλῶν προσπαθειῶν καὶ ἐργασιῶν. Διότι ὁ Θεαίτητος διέκρινε τὰς δυνάμεις εἰς μήκει συμμέτρους καὶ ἀσυμμέτρους καὶ διῄρεσε τὰς γνωστὰς ἀρρήτους εὐθείας κατὰ τὰς διαφόρους μεσότητας (ἀναλογίας) ἀποδίδων τὴν μέσην εἰς τὴν γεωμετρικὴν μεσότητα, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν ἀποτομὴν εἰς τὴν ἁρμονικήν, ὡς γράφεται ὑπὸ τοῦ Εὐδήμου τοῦ περιπατητικοῦ. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸν Εὐκλείδην προσέφερεν οὗτος γενικῶς ἀνελέγκτους κανόνας σχετικῶς πρὸς τὴν συμμετρίαν καὶ τὴν ἀσυμμετρίαν. Διετύπωσε μετ' ἀκριβείας τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰς διακρίσεις τῶν ρητῶν καὶ ἀρρήτων μεγεθῶν καὶ τέλος ἀπέδειξε σαφῶς τὴν σπουδαιότητά των.

Τέλος ὁ Ἀπολλώνιος διεχώρισε τὰ εἴδη τῶν διατεταγμένων ἀσυμμετριῶν καὶ ἀνεκάλυψε τὴν ἐπιστήμην τῶν ἀτάκτων ἀσυμμέτρων μεγεθῶν τῶν ὁποίων ἐδημιούργησε μέγαν ἀριθμὸν δι' ἀκριβῶν μεθόδων [1]».

Τινὲς τῶν νεωτέρων μελετητῶν τῶν Στοιχείων συμφωνοῦσι πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Δανοῦ μαθηματικοῦ Zeuthen διατυπωθεῖσαν γνώμην ὅτι σκοπὸς τοῦ Χ βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ καὶ διτετραγώνων.

Αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ὡς σημειοῖ ὁ Τ. Heath (ὅστις γράφει ἐν προκειμένῳ ὅτι ὁ Zeuthen εὑρίσκεται πολὺ ἐγγὺς πρὸς τὴν ἀλήθειαν) τῆς μορφῆς

$$x^2 \pm 2\mu x\rho \pm \nu\rho^2 = 0, \qquad \text{καὶ} \qquad x^4 \pm 2\mu x^2\rho^2 \pm \nu\rho^4 = 0.$$

ἔνθα ρ ῥητὴ εὐθεῖα καὶ μ, ν συντελεσταί [2].

Βεβαίως αἱ 12 κύριαι ἄλογοι (6 ἀθροίσματα, θ. 36—41 καὶ 6 διαφοραί, θ. 73—78) εἶναι ῥίζαι διτετραγώνων ἐξισώσεων. Ἐπίσης αἱ 12 δευτερεύουσαι ἄλογοι (6 ἀθροίσματα, θ. 48—53 καὶ 6 διαφοραί, θ. 85—90) εἶναι ῥίζαι δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι ἀρκετὸν διὰ νὰ πεισθῇ τις ὅτι σκοπὸς τοῦ Χ βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἐξισώσεων.

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὸ ὑπὸ τοῦ Πρόκλου σημειούμενον ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο τῇ προαιρέσει Πλατωνικὸς καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος [3] εἶναι ἀνάγκη ν' ἀναπολήσωμεν τινὰ ἐξ ὅσων ὁ Πλάτων διαλαμβάνει περὶ τῶν μαθηματικῶν εἰς τοὺς διαλόγους αὐτοῦ, ἵνα δυνηθῶμεν καὶ ἐκ τούτων νὰ μορφώσωμεν γνώμην περὶ τοῦ σκοποῦ τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων. Ὡς ἐξάγεται ἐκ τοῦ Τιμαίου, ὁ Πλάτων ἦτο ἐν γνώσει εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὸ κοσμολογικὸν πρόβλημα τῆς Ὀρφικῆς καὶ Πυθαγορείου θεωρίας, καθ' ἣν ὁ Κόσμος ἐδημιουργήθη ἐκ τοῦ χάους ὑπὸ τοῦ Δημιουργοῦ διὰ τοῦ σχήματος καὶ τοῦ μέτρου.

Κατὰ τὸν Φίληβον ἡ ἀρχὴ καθ' ἣν διαμορφοῦται τὸ σχῆμα εἶναι τὸ μέγα καὶ τὸ μικρόν, τὸ ἄπειρον καὶ τὸ πεπερασμένον. Τὸ ἓν (τὸ μέτρον) καὶ ἡ ἀόριστος δυὰς (τὸ ἀσύμμετρον) εἶναι τὰ στοιχεῖα τῶν ὄντων. Εἰς τὴν τοιαύτην θεώρησιν ἔχει προέλθει, πιθανῶς, ὁ Πλάτων ἔχων ὑπ' ὄψει τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ ὡς οὗτος γίνεται διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν καὶ διὰ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Ἀρχύτου [4]. Λίαν προσφυῶς γράφει ἐν προκειμένῳ ὁ Κωνστ. Δ. Γεωργούλης «Συνεπῶς χρησιμοποιῶν ὁ Πλάτων τὴν ἔκφρασιν μέγα καὶ μικρὸν θέλει νὰ εἴπῃ ὅτι τὸ δεύτερον στοιχεῖον τὸ ὁποῖον ἀνευρίσκομεν εἰς τὸ Σύμπαν εἶναι τὸ ἄλογον, κάτι τὸ ὁποῖον δὲν ὑποτάσσεται εἰς ἀκριβῆ καθορισμόν, ἀλλὰ ἀφίνει κατόπιν οἱουδήποτε προσδιορισμοῦ ὑπόλοιπον» [5].

Τὸ πρῶτον γεωμετρικὸν σχῆμα εἶναι τὸ τρίγωνον καὶ δὴ καὶ τὸ ὀρθογώνιον. Εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου τούτου κατὰ τὸ Χ βιβλίον ἀνευρίσκομεν τὰς δύο ἀρχὰς τὰς ὁποίας κατὰ τὸν Πλάτωνα ἀπαντῶμεν εἰς τὸ Σύμπαν, τὸ μέτρον καὶ τὸ ἀσύμμετρον. Ὅθεν, φρονοῦμεν, σκοπὸς τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται

---

1. Paul-Henri Michel: De Pythagore à Euclide, σ. 109 καὶ 457, Paris 1950, Ed. Les Belles Lettres. Καὶ Mémoir. prés. à l'Acad. des Sciences de Paris 1856, σ. 691.

2. T. Heath, A history of Greek mathematics I, σ. 411 καὶ Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide, σ. 444—5.

3. Σχόλια εἰς Εὐκλείδην I, σ. 68, G. Friedlein, Teubner.

4. Hans Leisegang: Die Platon Deutung der Gegenwart, S. 122 ff. 1929 καὶ Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη: Εὐκλείδου, Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, σ. 8, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων 1953, Ἀθῆναι.

5. Ἐγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν Ἥλιος, Τόμος Ἑλλάς, σ. 592.

τὰ ἁπλούστατα στοιχεῖα ἀλόγων εὐθειῶν. Ὡς πρὸς τὴν ἀναγωγὴν δὲ τῶν ἁπλουστάτων ἀρρήτων (ἀλόγων) εὐθειῶν ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου εἰς τὰς τρεῖς βασικὰς ἀναλογίας, τὴν γεωμετρικήν, τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν ἁρμονικὴν σημειοῦμεν τὰ ἑξῆς· ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὴν ἄρρητον μέσην, ἡ ὁποία εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους. Ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὰς ἀρρήτους δυωνύμους θεωρουμένου τοῦ ἀθροίσματος τούτων $A + B$ ὡς τοῦ διπλασίου, μεγέθους τινος Γ, ὥστε $\Gamma = \frac{A+B}{2}$. Ἡ δὲ ἁρμονικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὴν ἀποτομήν, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$.

Πράγματι θεωρουμένων τῶν μονωνύμων τῆς ἀποτομῆς ὡς ἄκρων ὅρων ἁρμονικῆς ἀναλογίας τὸ ἁρμονικὸν μέσον εἶναι $\dfrac{2\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}}$, (1)

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος (1) ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ (θ. 114) θὰ ἔχωμεν τὴν παράστασιν $\varkappa\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} - \lambda\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, (2), ἐὰν καλέσωμεν $\dfrac{2\rho\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\delta}{\gamma}} = \varkappa$ καὶ $\dfrac{2\rho\frac{\delta}{\gamma}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\delta}{\gamma}} = \lambda$.

Ἡ παράστασις ὅμως (2) εἶναι ἀποτομὴ ἤτοι τὰ μονώνυμα αὐτῆς εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα. Συνεπῶς πᾶσα ἀποτομὴ ἀντικατοπτρίζει τὴν προέλευσιν αὐτῆς ἐξ ἁρμονικοῦ τινος μέσου.

Ὅθεν λίαν προσφυῶς ὁ Paul-Henri Michel[1], γράφει, «οὕτω εἰς τὴν βάσιν τοῦ οἰκοδομήματος τοῦ X βιβλίου ἀνευρίσκομεν τὰς τρεῖς πρώτας μεσότητας (ἀναλογίας), ὡς ἓν ἐνθύμιον τοῦ ἀρχαίου Πυθαγορισμοῦ καὶ ὡς μίαν μαρτυρίαν τῆς εὐκλειδείου πίστεως πρὸς τὸ πνεῦμα τοῦ Πλάτωνος».

1. De Pythagore à Euclide p. 455, Paris ,1950, éd. Les Belles Lettres.

ΕΠΙ ΤΟΥ Χ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ *

Α.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α. 1. Τὸ Χ (10ον) βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐθεωρεῖτο καὶ εἶναι τὸ δυσκολώτερον βιβλίον τῶν Στοιχείων. Ὁ Ὀλλανδὸς μαθηματικὸς Simon Stevin (1548—1620) τὸ ὠνόμασεν «ὁ σταυρὸς τοῦ μαρτυρίου τῶν μαθηματικῶν», ἐνῷ ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Jean Montucla (1725—1799) ἀμφιβάλλει, ἐὰν κατὰ τὴν ἐποχήν του θὰ ὑπῆρχε γεωμέτρης, ὅστις θὰ ἐτόλμα νὰ παρακολουθήσῃ τὸν Εὐκλείδην εἰς τὸν σκοτεινὸν δαίδαλον τοῦ Χ βιβλίου [1]. Οἱ περισσότεροι ἐκ τῶν νεωτέρων ἑρμηνευτῶν τοῦ Χ βιβλίου καταλήγουσιν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι σκοπὸς τούτου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου διτετραγώνων καὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων [2]. Ὁ Cl. Thaer, φρονεῖ, ὅτι σκοπὸς τοῦ Χ βιβλίου εἶναι ἡ πλήρης ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ἥτις παρέχει στερεὸν ἔδαφος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυέδρων [3].

Εἶναι ἀληθὲς ὅτι ἐκ τῶν δώδεκα ἀλόγων εὐθειῶν τοῦ Χ βιβλίου (τῶν θεωρημάτων 36 - 41 καὶ 73 - 78) εἶναι αἱ μὲν ἓξ πρῶται ἀθροίσματα τῶν θετικῶν ῥιζῶν ἰσαρίθμων διτετραγώνων ἐξισώσεων, αἱ δὲ ἓξ δεύτεραι διαφοραὶ τῶν θετικῶν ῥιζῶν τῶν αὐτῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων. Ἐπίσης εἶναι ἀληθὲς ὅτι αἱ ἄλογοι εὐθεῖαι τῶν θεωρημάτων 48 - 53 καὶ 85 - 90 εἶναι αἱ μὲν ἓξ πρῶται ἀθροίσματα τῶν θετικῶν ῥιζῶν ἓξ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, αἱ δὲ ἓξ δεύτεραι εἶναι διαφοραὶ τῶν ῥιζῶν τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων. Ἡ παρατήρησις ὅμως αὕτη δὲν ὑποχρεοῖ εἰς τὴν συναγωγὴν τοῦ συμπεράσματος, καθ' ὃ σκοπὸς τοῦ Χ βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἐξισώσεων. Διότι εἰς τὸ VI βιβλίον τῶν Στοιχείων ἐπιτελεῖται ἡ ἐπίλυσις τῶν δυσκολωτέρου τύπου δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, τῶν ἐλλειπτικῶν ἐξισώσεων (VI, 28). Ἡ λύσις τῶν ἐν τῷ Χ βιβλίῳ ἀπαντωσῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων στηρίζεται κυρίως εἰς τὴν λύσιν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ἁπλουστάτου τύπου.

Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ XIII βιβλίον τῶν Στοιχείων (θεωρ. 6, 11, 16, 17) ἀποδεικνύεται : 1) Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς εὐθείας εἶναι ἀποτομὴ (Χ, 73). 2) Ἐὰν ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι ῥητή, ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων (Χ, 76). 3) Ἡ πλευρὰ τοῦ

---

* Evangelos Stamatis Über das X. Buch der Elemente Euklids. Ἀνεκοινώθη ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν Συνεδρίαν τῆς 17 Ἰανουαρίου 1957.

[1] Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide, σ. 444 κ. ἑ. éd. *Les Belles Lettres*, Paris 1950.

[2] Thomas Heath, A history of Greek Mathematics I, σ. 402, Oxford, 1921.

[3] Clemens Thaer. Ostwald's Klassiker, Nr. 241, σ. 103, Leipzig 1936.

κανονικοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἐλάσσων (X, 76). 4) Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἀποτομὴ (X, 73). Ταῦτα ὅμως ἐπίσης δὲν ὑποχρεοῦσιν εἰς τὴν συναγωγὴν τοῦ συμπεράσματος ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς παρέχουσα στερεὸν ἔδαφος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυέδρων, διότι ἐκ τῶν συναφῶν θεωρημάτων τὰ ὑπ' ἀριθμὸν 6 καὶ 11 εἶναι προπαρασκευαστικὰ διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τῶν θεωρημάτων 16 καὶ 17. Ἐὰν δὲ ἔλειπε τὸ δεύτερον μέρος τῶν θεωρημάτων 16 καὶ 17 δὲν θὰ ἐπηρεάζετο ἡ θεωρία τῶν κανονικῶν πολυέδρων.

A. 2. Κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται πρὸς τοῦτο αἱ ἁπλούσταται ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἐκ τῆς ἑρμηνείας, ἣν παρέχομεν κατωτέρω τῶν κυριωτέρων θεωρημάτων τοῦ X βιβλίου, φρονοῦμεν, εἶναι καταφανὴς ἡ ὀρθότης τῆς ὑποστηριζομένης ἀπόψεως.

Β'.

B. 1. Προτάσσομεν ἑρμηνείαν ὅρων τινῶν.

1. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ ἔχοντα κοινὸν μέτρον· ἀσύμμετρα δὲ τὰ μὴ ἔχοντα κοινὸν μέτρον.

2. Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν (X, θ. 6 καὶ 7).

3. Τυχοῦσα εὐθεῖα λαμβανομένη ὡς μέτρον λέγεται ῥητή.

4. Μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι νοοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ὅταν αὗται θεωρῶνται γραμμικῶς.

5. Δυνάμει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι νοοῦται αἱ εὐθεῖαι, ὅταν τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα.

6. Πᾶσα εὐθεῖα μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν λέγεται ῥητή. Ἔστωσαν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β, μὴ τετράγωνοι καὶ ῥητή τις εὐθεῖα ρ. Ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, ρ, ἡ $\rho(\beta/\alpha)$ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν ρ καὶ συνεπῶς εἶναι ῥητή.

7. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ καὶ $\rho(\beta/\alpha)$, ἡ $\rho\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ρ καὶ πρὸς τὴν $\rho(\beta/\alpha)$. Τὰ τετράγωνα ὅμως ρ^2 καὶ $\rho^2(\beta/\alpha)$ ἢ $\rho^2(\beta^2/\alpha^2)$ καὶ $\rho^2(\beta/\alpha)$ εἶναι πρὸς ἄλληλα σύμμετρα. Αἱ εὐθεῖαί ρ καὶ $\rho\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ ἢ $\rho(\beta/\alpha)$ καὶ $\rho\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ λέγονται ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

8. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ καὶ $\rho\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{1/4}$ λέγεται μέση [ἢ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν $\rho(\beta/\alpha)$ καὶ $\alpha\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{3/4}$]. Μέση ἄρα λέγεται μονώνυμον περιέχον τὴν τετάρτην ῥίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

9. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τῆς μορφῆς $\rho^2\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ ἢ $\rho^2(\beta/\alpha)\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ λέγεται μέσον. Μέσον ἄρα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται μονώνυμον, περιέχον τὴν δευτέραν ῥίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ. Ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ θεωρούμενον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τετραγώνου εἶναι μέση, τὸ τετράγωνον δὲ τοῦτο εἶναι ἐπίσης μέσον.

10. Εὐθεῖά τις λέγεται ἄλογος, ὅταν τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ τετράγωνον εὐθείας ληφθείσης ὡς ῥητῆς.

Τὰ κατωτέρω δέκα θεωρήματα ὑπ' ἀριθ. 10, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 εἶναι προπαρασκευαστικὰ τῆς ὅλης θεωρίας τοῦ X βιβλίου.

Κατασκευὴ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται εὐθεῖα τις ῥητή, ἔστω ρ. Ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν ἀκεραίων μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν α, β καὶ τῆς ρ, ἡ ρ(β/α). Ἡ ρ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἡ ρ $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι εὐθεῖαι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (καὶ μήκει ἀσύμμετροι).

Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται πάλιν ἡ ρ. Ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται τὸ ὕψος τοῦ προηγουμένου τριγώνου, ἡ ρ $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου τριγώνου, ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εἶναι μέση. Εἶναι δὲ ἡ ρ καὶ ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{1/4}$ ὄχι μόνον μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, ἤτοι καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι ἀσύμμετρα.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ῥητόν. Ἡ πρώτη μέση λαμβάνεται κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τοῦ θ. 10 καὶ εἶναι ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{1/4}$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς δευτέρας μέσης κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὴν ρ(β/α), καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τῆς πρώτης περιπτώσεως τοῦ θ. 10, τὴν ρ $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τούτων, ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{3/4}$ εἶναι ἡ ζητουμένη δευτέρα μέση. Τὰ τετράγωνα τῶν μέσων, τὰ $\rho^2(\beta/\alpha)^{1/2}$ καὶ $\rho^2(\beta/\alpha)^{3/2}$ εἶναι σύμμετρα. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων, τὸ $\rho^2(\beta/\alpha)$ εἶναι ῥητόν.

28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι μέσον. Προκαταρκτικῶς εὑρίσκονται τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λαμβάνονται οἱ μὴ τετράγωνοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ α, β, γ, δ καὶ εὐθεῖά τις ῥητή, ἔστω ρ. Κατασκευὴ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται ἡ ρ καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, ρ ἡ ρ(β/α). Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ρ $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθ. τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται ἡ ρ καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα λαμβάνεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γ, δ, ρ ἡ ρ(δ/γ). Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ρ $\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ρ, ρ $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ρ $\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Εὕρεσις τῆς ζητουμένης πρώτης μέσης.

Κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὡς τμήματα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὰ ρ(=Α) καὶ ρ $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ (=Β). Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τὸ $\Delta=\rho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εἶναι ἡ πρώτη μέση.

Εὕρεσις τῆς ζητουμένης δευτέρας μέσης

Τῶν ρ $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ρ $\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ καὶ τῆς $\rho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εὑρίσκει τὴν τετάρτην ἀνάλογον, τὴν $E=\rho(\delta/\gamma)^{1/2} : (\beta/\alpha)^{1/4}$. Αὕτη εἶναι ἡ δευτέρα μέση.

Λῆμμα 1ον

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Ἀποδεικνύεται ὅτι οὗτοι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2 \quad \text{ἢ} \quad \kappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

ἔνθα $\mu=\kappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\kappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν ἄρτιοι ἢ περιττοὶ κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι. Ὁ $\mu\nu$ εἶναι τετράγωνος (IX, 1). Ἐὰν ὅμως δὲν εἶναι $\kappa:\xi=\sigma:\tau$ ὁ $\mu\nu$ δὲν εἶναι τετράγωνος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λαμβάνομεν $\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\mu\nu$ μὴ τετράγωνος ἢ $\left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\kappa\xi\sigma\tau$ μὴ τετράγωνος. Πρὸς ἁπλούστευσιν λαμβάνομεν κατωτέρω $\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος. Οἱ τύποι (1) παρέχουσιν ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2=z^2$.

Λῆμμα 2ον

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2=\lambda \quad \text{ἢ} \quad \kappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2=\lambda$$

μὴ τετράγωνος, ἔνθα $\mu=\kappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\kappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν ἄρτιοι ἢ περιττοί. Πρὸς ἁπλούστευσιν λαμβάνομεν κατωτέρω $\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος.

29

Δίδεται ὡς ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ῥητὴ εὐθεῖα $AB(=\rho)$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ AZ νὰ εἶναι ῥητή, ἀλλὰ μόνον AB^2, AZ^2 σύμμετρα (συνεπῶς AB, BZ μήκει ἀσύμμετροι) καὶ ἡ ὑποτείνουσα AB καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ $ZB=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $AZ=\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\varphi}$, $ZB=\frac{\rho\omega}{\varphi}$, [$\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος].

30.

Δίδεται ὡς ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ῥητὴ εὐθεῖα $AB(=\rho)$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ AZ νὰ εἶναι ῥητή, ἀλλὰ μόνον AB^2, AZ^2 σύμμετρα (συνεπῶς AB, AZ μήκει ἀσύμμετροι) καὶ ἡ ὑποτείνουσα AB καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ $BZ=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $AZ=\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $ZB=\frac{\rho\beta}{\sqrt{\lambda}}$, [$\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος].

31.1.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ Δ νὰ εἶναι μέσαι, μόνον Γ^2, Δ^2 σύμμετρα (καὶ συνεπῶς Γ, Δ μήκει ἀσύμμετροι). Τὸ γινόμενον $\Gamma\times\Delta$ νὰ εἶναι ῥητὸν καὶ ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ἡ $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $\Gamma=\frac{\rho\theta^{1/4}}{\varphi^{1/2}}$, $\Delta=\frac{\rho\theta^{3/4}}{\varphi^{3/2}}$, [$\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος].

31.2.

Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

32.1

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα Δ καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ Ε νὰ εἶναι μέσαι, ἀλλὰ μόνον $Δ^2$, $Ε^2$ σύμμετρα (καὶ συνεπῶς Δ, Ε, μήκει ἀσύμμετροι) τὸ γινόμενον $Δ \times Ε$ νὰ εἶναι μέσον καὶ ἡ Δ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος, ἡ $\sqrt{Δ^2-Ε^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$Δ=ρ\left(\frac{δ}{γ}\right)^{1/4},\quad Ε=ρ\left(\frac{δ}{γ}\right)^{1/4}\cdot\frac{\sqrt{θ}}{φ},\quad [φ^2-ω^2=θ,\ γ,\ δ \text{ μὴ τετράγωνοι}].$$

32.2.

Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ Δ καὶ ἡ $\sqrt{Δ^2-Ε^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$Δ=ρ\left(\frac{δ}{γ}\right)^{1/4},\quad Ε=ρ\left(\frac{δ}{γ}\right)^{1/4}\cdot\frac{α}{\sqrt{λ}},\quad [α^2+β^2=λ,\ γ,\ δ \text{ μὴ τετράγωνοι}].$$

33.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς ΑΖ, ΖΒ, ὥστε $ΑΖ^2$, $ΖΒ^2$ νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $ΑΖ^2+ΖΒ^2$ ῥητὸν καὶ $ΑΖ \times ΖΒ$ μέσον.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$ΑΖ=\frac{ρ}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{β}{\sqrt{λ}}},\quad ΖΒ=\frac{ρ}{\sqrt{λ}}\sqrt{1-\frac{β}{\sqrt{λ}}},\quad [α^2+β^2=λ \text{ μὴ τετράγωνος}].$$

34.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς ΑΔ, ΔΒ, ὥστε $ΑΔ^2$, $ΔΒ^2$ νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ μέσον καὶ $ΑΔ \times ΔΒ$ ῥητόν.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$ΑΔ=\frac{ρ}{\sqrt{2}}\cdot\frac{α^{1/2}}{λ^{1/4}}\sqrt{1+\frac{β}{\sqrt{λ}}},\quad ΔΒ=\frac{ρ}{\sqrt{2}}\cdot\frac{α^{1/2}}{λ^{1/4}}\sqrt{1-\frac{β}{\sqrt{λ}}},$$

$[α^2+β^2=λ$, μὴ τετράγωνος$]$.

35.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς ΑΔ, ΔΒ, ὥστε $ΑΔ^2$, $ΔΒ^2$ νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ μέσον, $ΑΔ \times ΔΒ$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΔ^2+ΔΒ^2$. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$ΑΔ=\frac{ρ}{\sqrt{2}}\left(\frac{δ}{γ}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{β}{\sqrt{λ}}},\quad ΔΒ=\frac{ρ}{\sqrt{2}}\left(\frac{δ}{γ}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{β}{\sqrt{λ}}},$$

$[α^2+β^2=λ$, γ, δ μὴ τετράγωνοι$]$.

Β. 2. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν προηγουμένως ἀποδειχθέντων κατασκευάζονται 12 ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἑκάστη τῶν ἓξ πρώτων εὐθειῶν εἶναι ἄθροισμα δύο μονωνύμων (θεωρ. 36—41). Ἑκάστη τῶν ἓξ ἑπομένων εὐθειῶν εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν μονωνύμων (ἀποτομαί, θεώρ. 73—78). Αἱ εὐθεῖαι αὗται χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν κατασκευὴν δώδεκα ὀρθογωνίων τριγώνων. *Ἁπλούστεραι ἄλογοι εὐθεῖαι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῶσιν.* Αὗται εἶναι :

1. Ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος) $\quad ρ\pm ρ\sqrt{\frac{β}{α}}\quad$ 36
   Ἀποτομὴ (διαφορὰ) 73

Τὰ μονώνυμα λαμβάνονται ἐκ τῆς πρώτης περιπτώσεως τοῦ θ 10 [Δύναται νὰ εἶναι

$ρ\sqrt{\frac{β}{α}}\pm ρ\sqrt{\frac{δ}{γ}}$]

2. Ἐκ δύο μέσων πρώτη
Πρώτη ἀποτομὴ μέσης $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \pm \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$ 37 74
Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 27.

3. Ἐκ δύο μέσων δευτέρα
Δευτέρα ἀποτομὴ μέσης $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \pm \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ 38 75
Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 28.

4. Μείζων
Ἐλάσσων $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 76 39
Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 33.

5. Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη
Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 40 77
Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 34.

6. Δύο μέσα δυναμένη
Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 41 78
Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 35.

Ὁρισμοὶ δεύτεροι καὶ τρίτοι. (Οἱ δεύτεροι ἀφορῶσιν εἰς τὰ ἀθροίσματα, ἐνῷ οἱ τρίτοι εἰς τὰς διαφοράς).

Θεωρεῖται εὐθεῖα τις ῥητὴ ρ καὶ ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα ἔστω Α καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἔστω Β. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β νὰ εἶναι ῥηταί, ἀλλὰ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα (δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ συνεπῶς μήκει ἀσύμμετροι). Ἔστω ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἡ Γ.

1) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Γ εἶναι μήκει σύμμετροι διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις κατασκευης τοῦ ἀθροίσματος Α+Β καὶ τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς (ἀποτομῆς) Α—Β, χαρακτηριζόμεναι ἐκ τῆς σχέσεως συμμετρίας ἢ οὒ τῆς Α καὶ Β πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν ρ.

I. Α καὶ $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι (Α, Β μήκει ἀσύμμετροι).

1. Ἐὰν Α, ρ μήκει σύμμετροι (Β, ρ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος Δ=Α+Β ἂς καλῆται πρώτη δυώνυμος
ἡ διαφορὰ Δ=Α—Β ἂς καλῆται πρώτη ἀποτομή.

2. Ἐὰν Β, ρ μήκει σύμμετροι (Α, ρ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος Δ=Α+Β ἂς καλῆται δευτέρα δυώνυμος
ἡ διαφορὰ Δ=Α—Β ἂς καλῆται δευτέρα ἀποτομή.

3. Ἐὰν οὔτε Α οὔτε Β εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ,
ἡ δυώνυμος Δ=Α+Β ἂς καλῆται τρίτη δυώνυμος
ἡ διαφορὰ Δ=Α—Β ἂς καλῆται τρίτη ἀποτομή.

2) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Γ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι διακρίνονται ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τοῦ ἀθροίσματος Α+Β καὶ ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς (ἀποτομῆς) Α—Β, χαρακτηριζόμεναι ἐκ τῆς σχέσεως συμμετρίας ἢ οὒ τῆς Α καὶ Β πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν.

II. Α καὶ $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι (Α, Β μήκει ἀσύμμετροι).

4. Ἐὰν Α, ρ μήκει σύμμετροι (Β, ρ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος Δ=Α+Β ἂς καλῆται τετάρτη δυώνυμος,
ἡ διαφορὰ Δ=Α—Β ἂς καλῆται τετάρτη ἀποτομή.

5. Ἐὰν Β, ρ μήκει σύμμετροι, (Α, ρ μήκει ἀσύμμετροι),

ἡ δυώνυμος $\Delta=A+B$ ἃς καλῆται πέμπτη δυώνυμος,

ἡ διαφορὰ $\Delta=A-B$ ἃς καλῆται πέμπτη ἀποτομή.

6. Ἐὰν οὔτε Α οὔτε Β εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ,

ἡ δυώνυμος $\Delta=A+B$ ἃς καλῆται ἕκτη δυώνυμος

ἡ διαφορὰ $\Delta=A-B$ ἃς καλῆται ἕκτη ἀποτομή.

Κατασκευὴ τῶν ἓξ δυωνύμων καὶ ἓξ ἀποτομῶν (ἄλλαι 12 ἄλογοι εὐθεῖαι).

			θεώρημα
1.	Πρώτη δυώνυμος Πρώτη ἀποτομή	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$	48 85
2.	Δευτέρα δυώνυμος Δευτέρα ἀποτομή	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}.$	49 86
3.	Τρίτη δυώνυμος Τρίτη ἀποτομή	$\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}\pm\rho\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}.$	50 87

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι $\varphi^2-\omega^2=\theta$, γ, δ, ε μὴ τετράγωνοι.

4.	Τετάρτη δυώνυμος Τετάρτη ἀποτομή	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$	51 88
5.	Πέμπτη δυώνυμος Πέμπτη ἀποτομή	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}.$	52 89
6.	Ἕκτη δυώνυμος Ἕκτη ἀποτομή	$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\pm\rho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}.$	53 90

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι $\alpha^2+\beta^2=\lambda$, γ, δ, ε μὴ τετράγωνοι.

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν 24 ἀλόγων εὐθειῶν κατασκευάζονται 24 ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι τὸ κύριον μέρος τοῦ περιεχομένου τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι καταφανὴς ἡ συμμετρία καὶ ἡ ἁρμονία ἥτις ὑπάρχει, ὅταν χρησιμοποιῶνται αἱ κατὰ τὸ δυνατὸν ἁπλούσταται ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἐνταῦθα δύναται νὰ γίνῃ ἡ παρατήρησις, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 24 εἶναι τὸ γινόμενον 4×6 ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὴν τετρακτὺν τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ 6, ὅστις εἶναι ὁ πρῶτος τέλειος ἀριθμός. Παρέχομεν τὴν κατασκευὴν τῶν 24 ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς τοὺς ἑπομένους τέσσαρας πίνακας.

ΠΙΝΑΞ I.

Θεώρημα	ΔΙΔΟΝΤΑΙ: Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους α' τμῆμα ῥητή	β' τμῆμα ἄλογος	ἐπομένως τὸ ὕψος	ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ: Ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
54	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ πρώτη δυώνυμος θ. 48.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, δηλ. τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων (δυωνύμου) τοῦ θεωρήματος	36.
55	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}+\rho\frac{\delta}{\gamma}$ δευτέρα δυώνυμος 49.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}+1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης	37.
56	ρ	$\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ τρίτη δυώνυμος 50.	$\rho\sqrt{\frac{\varphi+\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας	38.
57	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τετάρτη δυώνυμος 51.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, τῆς μείζονος	39,
58	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+\rho\frac{\delta}{\gamma}$ πέμπτη δυώνυμος 52.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης	40.
59	ρ	$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ ἕκτη δυώνυμος 53.	$\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, τῆς δύο μέσα δυναμένης	41.

[Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ἓξ μετασχηματισμοὺς διπλῶν ῥιζικῶν ἐξ ἀθροίσματος]

ΠΙΝΑΞ ΙΙ

Θεώρημα	ΔΙΔΟΝΤΑΙ: Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας — ἄλογος	Ἓν τμῆμα τῆς ὑποτειν. τεμν. ὑπὸ τοῦ ὕψους — ῥητή	ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ: Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
60	$\rho+\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ δυώνυμος τοῦ θεωρήματος 36.	ρ	$\rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ τῆς πρώτης δυωνύμου τοῦ θ. 48.
61	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ ἐκ δύο μέσων πρώτη 37.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\rho\frac{\delta}{\gamma}$ τῆς δευτέρας δυωνύμου 49.
62	$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}+\frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ ἐκ δύο μέσων δευτέρα 38.	ρ	$\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}+\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right]+2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ τῆς τρίτης δυωνύμου 50.
63	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μείζων 39.	ρ	$\rho+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς τετάρτης δυωνύμου 51.
64	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη 40.	ρ	$\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}+\frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ τῆς πέμπτης δυωνύμου 52.
65	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ δύο μέσα δυναμένη 41.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς ἕκτης δυωνύμου 53.

ΠΙΝΑΞ III.

Θεώρημα	ΔΙΔΟΝΤΑΙ — Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους: α' τμῆμα ῥητή	β' τμῆμα ἄλογος	ἑπομένως τὸ ὕψος	ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ — Ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
91	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ πρώτη ἀποτομὴ θ. 85.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right.}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, δηλ. τῆς ἀποτομῆς τοῦ θεωρήματος	73.
92	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$ δευτέρα ἀποτομὴ 86.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}-1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, τῆς πρώτης ἀποτομῆς μέσης	74.
93	ρ	$\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ τρίτη ἀποτομὴ 87.	$\rho\sqrt{\frac{\varphi-\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}-\rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, τῆς δευτέρας ἀποτομῆς μέσης	75.
94	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τετάρτη ἀποτομὴ 88.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, τῆς ἐλάσσονος	76.
95	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$ πέμπτη ἀποτομὴ 89.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης	77.
96	ρ	$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ ἕκτη ἀποτομὴ 90.	$\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}-\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης	78.

['Ενταῦθα παρατηροῦμεν ἓξ μετασχηματισμοὺς διπλῶν ῥιζικῶν ἐκ διαφορᾶς].

ΠΙΝΑΞ IV

ΔΙΔΟΝΤΑΙ		ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ
Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἄλογος	Ἓν τμῆμα τῆς ὑποτειν. τμηθ. ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητή	Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
$\rho-\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ ἀποτομὴ τοῦ θεωρήματος 73.	ρ	$\rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)-2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ τῆς πρώτης ἀποτομῆς τοῦ θ. 85.
$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}-\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ πρώτη ἀποτομὴ μέσης 74.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)-2\rho\frac{\delta}{\gamma}$ τῆς δευτέρας ἀποτομῆς 86.
$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}-\frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης 75.	ρ	$\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}+\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right]-2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ τῆς τρίτης ἀποτομῆς 87.
$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}-\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ ἐλάσσων 76.	ρ	$\rho-\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς τετάρτης ἀποτομῆς 88.
$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα 77.	ρ	$\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}-\frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ τῆς πέμπτης ἀποτομῆς 89.
$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα 78.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}-\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς ἕκτης ἀποτομῆς 90.

Β. 3. Τὰ θεωρήματα, τὸ 112 καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου 113, θεωροῦμεν γνήσια· ταῦτα ἀποτελοῦσι συνέχειαν ἄμεσον καὶ συνεπῶς ἀναπόσπαστον τμῆμα τοῦ κυρίου μέρους τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων. Παρέχομεν εἰκόνα τούτων εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα. Εἰς ἕκαστον τῶν θεωρημάτων τούτων κατασκευάζονται ἓξ ὀρθογώνια τρίγωνα. Γνήσια θεωροῦμεν καὶ τὰ θεωρήματα 114, 115.

	ΔΙΔΟΝΤΑΙ			ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ	
	Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας	Τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς		ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
Θ. 112	ῥητή	τῆς πρώτης δυωνύμου	θ. 48	τῆς πρώτης ἀποτομῆς	θ. 85
	»	» δευτέρας δυωνύμου	49	» δευτέρας ἀποτομῆς	86
	»	» τρίτης δυωνύμου	50	» τρίτης ἀποτομῆς	87
	»	» τετάρτης δυωνύμου	51	» τετάρτης ἀποτομῆς	88
	»	» πέμπτης δυωνύμου	52	» πέμπτης ἀποτομῆς	89
	»	» ἕκτης δυωνύμου	53	» ἕκτης ἀποτομῆς	90
Θ. 113	»	τῆς πρώτης ἀποτομῆς	85	τῆς πρώτης δυωνύμου	48
	»	» δευτέρας ἀποτομῆς	86	» δευτέρας δυωνύμου	49
	»	» τρίτης ἀποτομῆς	87	» τρίτης δυωνύμου	50
	»	» τετάρτης ἀποτομῆς	88	» τετάρτης δυωνύμου	51
	»	» πέμπτης ἀποτομῆς	89	» πέμπτης δυωνύμου	52
	»	» ἕκτης ἀποτομῆς	90	» ἕκτης δυωνύμου	53

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser vertritt mit seiner Interpretation des X. Buches der Elemente Euklids die Meinung, der Zweck des X. Buches sei es, die Symmetrie und Harmonie aufzuzeigen die sich ergibt, wenn man bei der konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks die einfachsten irrationalen Grössen verwendet. Nach einigen Vorbemerkungen stellt der Verfasser fest, dass die Sätze 10 und 27 - 35, den Aufbau der ganzen Theorie des X. Buches der Elemente vorbereiten. In diesen zehn Sätzen werden die einfachsten möglichen irrationale Grössen konstruiert, während in den folgenden Sätzen 36 - 41 sechs irrationale Summen von diesen Grössen gebildet werden. Diese sind : 1) Binomiale 2) Erste Bimediale 3) Zweite Bimediale 4) Major 5) Quadriert Rationales plus Medialem Ergebende 6) Quadriert die Summe zweier Medialer Ergebende. Dann betrachtet Euklid ein rechtwinkliges Hilfsdreieck (zweite Definitions - gruppe), indem er sechs mögliche Fälle unterscheidet und sechs neue irrationalen Summen bildet. Diese sind : 1) Erste Binomiale 2) Zweite Binomiale 3) Dritte Binomiale 4)

Vierte Binomiale 5) Fünfte Binomiale 6) Sechste Binomiale (48 - 53). Nun wird der erste entscheidende Punkt der Theorie vorgeführt. Er ist durch die Tafeln I und II wiedergegeben.

Uebersetzung der Titel der Tafeln.

TAFEL I, (und III).

<table>
<tr><th colspan="3">ES IST GEGEBEN:</th><th>ES WIRD BEWIESEN:</th></tr>
<tr><td colspan="2">Von der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die von der Höhe geschnitten wird,</td><td rowspan="2">folglich
die Höhe</td><td rowspan="2">Die Höhe des Dreiecks ist eine Irrationale von der Form</td></tr>
<tr><td>der 1. Teil
die Rationale</td><td>der 2. Teil
die Irrationale</td></tr>
</table>

TAFEL II, (und IV).

<table>
<tr><th colspan="2">ES IST GEGEBEN:</th><th>ES WIRD BEWIESEN:</th></tr>
<tr><td>Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks von der Ecke des rechten Winkels aus
die Irrationale</td><td>Der eine Hypotenusenabschnitt
die Rationale</td><td>Der andere Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form</td></tr>
</table>

Anstatt der sechs Summen von irrationalen Grössen (Sätze 36 - 41) bildet nun Euklid sechs Differenzen von denselben irrationalen Grössen (Sätze 73 - 78). Diese sind : 1) Apotome 2) Erste Medialapotome 3) Zweite Medialapotome 4) Minor 5) Mit Rationalem mediale Summenfläche Ergebende 6) Mit Medialem mediale Summenfläche Ergebende. Dann betrachtet Euklid ein rechtwinkliges Hilfsdreieck (dasselbe wie in der 2. Definitionsgruppe, nun 3. Definitionsgruppe), indem er sechs mögliche Fälle unterscheidet und sechs neue irrationale Differenzen bildet. Diese sind : 1) Erste Apotome 2) Zweite Apotome 3) Dritte Apotome 4) Vierte Apotome 5) Fünfte Apotome 6) Sechste Apotome (Sätze 85 - 90). Nun wird der zweite entscheidende Punkt der Theorie vorgeführt. Er wird durch die Tafeln III und IV wiedergegeben. Die Titel der Tafeln III und IV, sind dieselben wie die der Tafeln I bzw. II.

Satz 112 und seine Umkehrung (S. 113) geben die Konstruktion von 12 rechtwinkligen Dreiecken; die Sätze sind eng mit der ganzen Theorie des X. Buches verbunden.

	ES SIND GEGEBEN:			ES WIRD BEWIESEN:	
	Die Höhe des Dreiecks von der Ecke des rechten Winkels aus	Der eine Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form einer		Der andere Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form einer	
112	eine Rationale	Ersten Binomiale	S. 48	Ersten Apotome	S. 85
	»	Zweiten Binomiale	49	Zweiten Apotome	86
	»	Dritten Binomiale	50	Dritten Apotome	87
	»	Vierten Binomiale	51	Vierten Apotome	88
	»	Fünften Binomiale	52	Fünften Apotome	89
	»	Sechsten Binomiale	53	Sechsten Apotome	90
113	»	Ersten Apotome	85	Ersten Binomiale	48
	»	Zweiten Apotome	86	Zweiten Binomiale	49
	»	Dritten Apotome	87	Dritten Binomiale	50
	»	Vierten Apotome	88	Vierten Binomiale	51
	»	Fünften Apotome	89	Fünften Binomiale	52
	«	Sechsten Apotome	90	Sechsten Binomiale	53

Auch die Sätze 114 und 115 sind eng mit der Theorie des X. Buches verbunden. Infolgedessen darf man sie als echte Sätze betrachten. Die zwölf irrationallen Linien der Sätzc 36 41 und 73 - 78. sind die Summen bzw. die Differenzen der positiven Wurzeln von sechs biquadratischen Gleichungen. Die zwölf irrationalen Linien der Sätze 48 - 53 und 85 - 90 sind die Summen bzw. die Differenzen der positiven Wurzeln von sechs quadratischen Gleichungen. Es wird aber bemerkt, dass Satz VI 28 schwierigere Probleme löst.

ΕΥΔΟΞΟΣ

'Ο Εὔδοξος κατήγετο ἐκ τῆς Κνίδου, παραθαλασσίας πόλεως τῆς Μ. 'Ασίας, κειμένης ἀπέναντι τῶν νήσων Κῶ καὶ Νισύρου. Κατ' ἄλλους ἔζησεν ἀπὸ 408 - 355 π.Χ.,ἐνῷ κατὰ τὸν Francois Lasserre ἀπὸ 395 - 342 π.Χ. Πιθανωτέρα εἶναι ἡ γνώμη τοῦ F. Lasserre. "Ολοι οἱ παλαιοὶ συγγραφεῖς συμφωνοῦν ὅτι ὁ Εὔδοξος ἔζησε 53 ἔτη. (Die Fragmente des Eudoxos von Knidos, vom F. Lasserre, W. de Gruyter, Berlin 1966, σελ. 138 - 139). Κατὰ τὸν Διογένη Λαέρτιον (VIII 86) ὁ Εὔδοξος εἰς ἡλικίαν 23 ἐτῶν ἦλθεν εἰς τὸν Πειραιᾶ, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀνέβαινε καθημερινῶς εἰς τὰς 'Αθήνας πεζῇ, διὰ νὰ παρακολουθῇ μαθήματα εἰς τὴν 'Ακαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, ἐπὶ 2 μῆνας. Κατόπιν μετέβη εἰς τὸν Τάραντα τῆς 'Ιταλίας, ὅπου παρηκολούθησε μαθήματα τοῦ περιφήμου μαθηματικοῦ καὶ μηχανικοῦ 'Αρχύτα. "Ηκμασε κατὰ τὴν 103 'Ολυμπιάδα, ὅπερ συμφωνεῖ πρὸς τὴν ἀνωτέρω χρονολόγησιν τοῦ Lasserre. 'Ακολούθως μετέβη εἰς τὴν Αἴγυπτον, ὅπου ἔμεινε περίπου 16 μῆνας εἰς τὴν πόλιν Κερκέσουραν ἢ Κερκάσωρον (15 περίπου χιλιόμετρα βορείως τῆς Μέμφιδος, παρὰ τὸν Νεῖλον), ὅπου τοῦ εἶχον ἱδρύσει στοιχειῶδες 'Αστεροσκοπεῖον (Στράβων, Γεωγραφικὰ 17. 806 - 807). 'Ο Εὔδοξος ἦτο μαθηματικός, ἀστρονόμος, γεωγράφος, νομοθέτης. Διὰ τὴν λαμπρότητα τῆς φήμης ὠνομάζετο κατὰ Δ. Λαέρτιον, "Ενδοξος ἀντὶ Εὔδοξος.'Εκ τῆς Αἰγύπτου μετέβη εἰς τὴν Κύζικον (τῆς Προποντίδος) ὅπου ἵδρυσε Σχολήν. 'Εκεῖθεν μετέβη εἰς τὰς 'Αθήνας, ὅπου ἐπίσης ἵδρυσε Σχολήν. Κατόπιν παρακλήσεων τοῦ Πλάτωνος διέλυσε τήν Σχολήν του καὶ προσελήφθη ὡς καθηγητὴς εἰς τὴν 'Ακαδημίαν τοῦ Πλάτωνος.

Κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ πέμπτον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι εὕρημα τοῦ Εὐδόξου (Euclides V, 1, Heiberg - Stamatis, Λειψία 1977,σελὶς 211). Εἰς τὸ σχόλιον γράφεται: «1. Σκοπὸς τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ περὶ ἀναλογιῶν διαλαβεῖν· κοινὸν γὰρ τοῦτο τὸ βιβλίον γεωμετρίας τε καὶ ἀριθμητικῆς καὶ μουσικῆς καὶ πάσης ἁπλῶς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.2. 'Ιστέον ὅτι τὸ βιβλίον ὅλον θεωρηματικόν ἐστιν.

3. Τοῦτο τὸ βιβλίον (τὸ 5) Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου τοῦ μαθηματικοῦ τοῦ κατὰ τοὺς Πλάτωνος χρόνους γεγονότος εἶναι λέγεται, ἐπιγέγραπται δὲ ὅμως Εὐκλείδου, ἀλλ' οὐ κατά τινα ψευδῆ ἐπιγραφήν· εὑρέσεως μὲν γὰρ ἕνεκα ἄλλου τινὸς οὐδὲν κωλύει εἶναι, τῆς μέντοι κατὰ στοιχεῖον αὐτῶν συντάξεως χάριν καὶ τῆς πρὸς ἄλλα τῶν οὕτω ταχθέντων ἀκολουθίας ὡμολόγηται παρὰ πᾶσιν Εὐκλείδου εἶναι».

'Ο 'Αρχιμήδης πληροφορεῖ ἡμᾶς ὅτι ὁ Εὔδοξος ἀπέδειξεν ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον. (προοίμιον τῆς πραγματείας του περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, προοίμιον τῆς πραγματείας του περὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς (τετρ. παραβολῆς), προοίμιον τῆς πραγματείας του, Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς 'Ερατοσθένην ἔφοδος). Προσθέτει δὲ ὁ 'Αρχιμήδης ὅτι δὲν ὀφείλεται μικρὸς ἔπαινος εἰς τὸν Δημόκριτον, ὅστις ἐξήγγειλε τὰ θεωρήματα αὐτὰ ἄνευ ἀποδείξεως (πιθανῶς διὰ ζυγίσεως).

'Ο Πρόκλος (εἰς Εὐκλείδην σελ. 67, 2, Friedlein) λέγει ὅτι εἰς τὰς τρεῖς ὑπαρχούσας ἀναλογίας, ὁ Εὔδοξος προσέθηκεν ἄλλας τρεῖς, ὁ δὲ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς λέγει ὅτι αἱ πρῶται τρεῖς ἀναλογίαι ἀνάγονται εἰς τὸν Πυθαγόραν, τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν 'Αριστοτέλη (ἡ ἀριθμητική, ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία). (Νικομάχου 'Αριθμητικὴ εἰσαγωγή, 22, σελὶς 122, R. Hoche), καὶ Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη, 'Ιστορία τῶν 'Ελληνικῶν Μαθηματικῶν, 'Αθῆναι 1980, σελ. 138. 'Ο Εὐκλείδης δὲν περιέλαβε λεπτομερείας περὶ τῶν ἀναλογιῶν εἰς τὰ Στοιχεῖα του. 'Αρκετὰς λεπτομερείας ἐπ' αὐτῶν διέσωσεν ὁ Νικόμαχος.

'Εκ τῶν 10 ἀναλογιῶν τοῦ Νικομάχου, τῶν ἐκτιθεμένων κατωτέρω, αἱ ὑπ' ἀριθ. 4, 5, 6 εἶναι ἐπινόησις τοῦ Εὐδόξου.

Παρὰ τοῦ Σιμπλικίου (6 αἰών), σχολιαστοῦ ἔργων τοῦ 'Αριστοτέλους, πληροφορούμεθα ὅτι ὁ Πλάτων παρεκάλεσε τοὺς μαθηματικοὺς τῆς 'Ακαδημίας του νὰ εὕρωσι τοὺς νόμους κινήσεως τῶν Πλανητῶν. 'Ο Εὔδοξος διετύπωσε τὴν θεωρίαν ὅτι οἱ πλανῆται θεωροῦνται τοποθετημένοι ἐπὶ 26 σφαιρῶν, αἵτινες κινοῦνται ὁμαλῶς. 'Εκ τῶν σφαιρῶν τούτων αἱ μεν 6 ἀνήκουν εἰς τὸν Ἥλιον καὶ τὴν Σελήνην, αἱ ἄλλαι δὲ εἰς τοὺς ὑπολοίπους 5 πλανήτας. (Σιμπλίκιος εἰς Περὶ Οὐρανοῦ 'Αριστοτέλους, σελ. 492, Heiberg). [Σημ. Κατὰ τοὺς ἀρχαίους οἱ 7 πλανῆται ἦσαν οἱ ἑξῆς:

Ἥλιος, Σελήνη, 'Ερμῆς, 'Αφροδίτη, Ἄρης, Ζεύς, Κρόνος].

Τὰ ἔργα τοῦ Εὐδόξου ἐχάθησαν. Σώζονται ἐλάχιστα ἀποσπάσματα καὶ μερικοὶ τίτλοι ἔργων του. Οὗτοι εἶναι:

Φαινόμενα, Ἔνοπτρον, Περὶ ταχῶν (ταχυτήτων τῶν Πλανητῶν), περὶ ἀφανισμῶν ἡλιακῶν (ὅλα ἀστρονομικά), 'Οκταετηρὶς (ἡμερολογιακόν), Γῆς περίοδος (γεωγραφικόν). (Franc. Lasserre, ἐνθ' ἀνωτέρω).

'Ο Βιτρούβιος πληροφορεῖ ἡμᾶς, ὅτι ὁ Εὔδοξος εἶχε κατασκευάσει ἡλιακὸν ὡρολόγιον, ὀνομαζόμενον 'Αράχνη (Vitruvius, Archit, 236. 8). ('Ερμηνεία τῆς 'Αράχνης ὡς ὀργάνου ἀστρονομικοῦ πρὸς μέτρησιν γωνιῶν κλπ. ὑπὸ E. Maula, E. Kasanen, J. Mattila, Finnland, at the Conference or the History of the Mesurement, April 27 - 30 in Budapest, 1976).

ΕΥΔΟΞΟΣ - ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

ΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

Τὸ πέμπτον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν εἰς 25 θεωρήματα. Τῶν θεωρημάτων προτάσσοται 18 ορισμοί. Ὁλόκληρον τὸ βιβλίον, κατά τινα σχολιαστήν, ἀποδίδεται εἰς τὸν Εὔδοξον (395 - 342 π.Χ.) καθηγητὴν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος.

Οἱ 18 ὁρισμοὶ τοῦ 5ου βιβλίου τῶν Στοιχείων.

1. Μέρος εἶναι μέγεθος μεγέθους, τὸ μικρότερον τοῦ μεγαλυτέρου, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεγαλύτερον.

2. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεγαλύτερον τοῦ μικροτέρου, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ μικροτέρου.

3. Λόγος δύο ὁμογενῶν μεγεθῶν εἶναι ἡ κατὰ πηλικότητά τινα σχέσις.

4. Μεγέθη λέγονται ὅτι ἔχουν λόγον πρὸς ἄλληλα, ὅταν πολλαπλασιαζόμενα δύνανται νὰ ὑπερέχουν ἀλλήλων. (Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι ἀσαφής. Ἐκ τοῦ 8 ὅμως θεωρήματος συνάγεται ὅτι ἐὰν $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι $(\alpha - \beta)\nu > \alpha$. Ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας).

5. Μεγέθη λέγονται ὅτι εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ οἱονδήποτε πολλαπλασιασμὸν ἢ εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴσα ἢ μικρότερα, ὅταν ληφθοῦν καταλλήλως. (Θὰ εἶναι δηλ. $A : B = \Gamma : \Delta$, μόνον ἐὰν δι' οἱουσδήποτε δύο φυσικοὺς ἀριθμοὺς μ, ν ἰσχύῃ μία τῶν τριῶν σχέσεων:

1) $\mu.A > \nu.B$ καὶ συγχρόνως $\mu.\Gamma > \nu.\Delta$
2) $\mu.A = \nu.B$ καὶ συγχρόνως $\mu.\Gamma = \nu.\Delta$
3) $\mu.A < \nu.B$ καὶ συγχρόνως $\mu.\Gamma < \nu.\Delta$

Ἡ ἑρμηνεία τοῦ ὁρισμοῦ 5 ἐλήφθη ἔκ τινων θεωρημάτων τοῦ 5ου βιβλίου καὶ ἐδόθη κατὰ τὸ τέλος τοῦ παρελθόντος αἰῶνος).

6. Τὰ δὲ μεγέθη τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον ἂς καλῶνται ἀνάλογα.

7. Ὅταν δὲ ἐκ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου ὑπερέχει τοῦ πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ πολλαπλάσιον τοῦ τρίτου δὲν ὑπερέχῃ τοῦ πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου, τότε τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον λέγεται ὅτι ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ δεύτερον ἀπὸ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

8. Ἐλαχίστη δὲ ἀναλογία εἶναι ἡ περιέχουσα τρεῖς ὅρους.

9. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, λέγεται, ὅτι τὸ πρῶτον, πρὸς τὸ τρίτον εὑρίσκεται εἰς διπλάσιον λόγον ἢ τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον. (δηλ. ἐὰν $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, εἶναι $\alpha : \gamma = \alpha^2 : \beta^2$).

10. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, λέγεται, ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον εὑρίσκεται εἰς τριπλάσιον λόγον ἢ τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἀναλόγως τῆς ὑπαρχούσης ἀναλογίας. (δηλ. ἐὰν $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta$, εἶναι $\alpha : \delta = \alpha^3 : \beta^3$ καὶ γενικῶς, ἐὰν $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta = \ldots = \kappa : \lambda$ εἶναι $\alpha : \lambda = \alpha^\nu : \beta^\nu$)

11. Ἐάν $\alpha : \beta = \gamma : \delta = \ldots = \kappa : \lambda$ ὁμόλογα μεγέθη, εἶναι τὰ $\alpha, \gamma \ldots \kappa$ καὶ $\beta, \delta \ldots \lambda$.

12. Ἐναλλὰξ λόγος. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, εἶναι $\alpha : \gamma = \beta : \delta$.

13. Ἀνάπαλιν λόγος. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, εἶναι $\beta : \alpha = \delta : \gamma$.

14. Σύνθεσις λόγου. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, εἶναι $(\alpha + \beta) : \beta = (\gamma + \delta) : \delta$. (λέγεται, συνθέντι).

15. Διαίρεσις λόγου. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, εἶναι $(\alpha - \beta) : \beta = (\gamma - \delta) : \delta$. (λέγεται, διελόντι).

16. Ἀναστροφὴ λόγου. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, εἶναι $\alpha : (\alpha - \beta) = \gamma(\gamma - \delta)$.

17. Ἐάν $\alpha : \beta = A : B$
$\beta : \gamma = B : \Gamma$
$\gamma : \delta = \Gamma : \Delta$
$\mu : \nu = M : N$, ὁ λόγος $\alpha{:}\nu = A{:}N$ λέγεται «δι' ἴσου λόγος» λαμβάνεται δὲ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἰσοτήτων κατὰ μέλη.

18. Ἐάν $\alpha : \beta = B : \Gamma$
$\beta : \gamma = A : B$, ὁ λόγος $\alpha : \gamma = A : \Gamma$ λέγεται «δι' ἴσου λόγος, ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ» λαμβάνεται δὲ διὰ πολλ/σμοῦ τῶν ἰσοτήτων κατὰ μέλη (αἱ σχέσεις $\alpha : \beta = B : \Gamma$ καὶ $\beta : \gamma = A : B$ λέγονται τεταραγμένη ἀναλογία).

ΑΙ ΔΕΚΑ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΝΙΚΟΜΑΧΟΝ

Ὁ Νικόμαχος (σ. 140, 14) ὑπενθυμίζει ὅτι ἀπὸ τοῦ Πυθαγόρου (580 - 490 π.Χ.) μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Πλάτωνος (427 - 347 π.Χ.) καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους (384 - 322 π.Χ.) τρεῖς ἦσαν αἱ κύριαι ἀναλογίαι, ἡ ἀριθμητική, ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ἁρμονική. Κατόπιν προσετέθησαν ἄλλαι τρεῖς (ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, ὡς ἀνεφέρθη ἤδη), αἱ ὁποῖαι ἐκλήθησαν ὑπεναντίαι αὐτῶν. Μεταγενεστέρως προσετέθησαν ἄλλαι τέσσαρες, καὶ ἔγιναν ἐν ὅλῳ δέκα. Αὗται εἶναι ὅταν ἔχωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς $\alpha > \beta > \gamma$, αἱ κάτωθι:

1. $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \dfrac{\alpha}{\alpha} = \dfrac{\beta}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\gamma}$, $\alpha + \gamma = 2\beta$, $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$, ἀριθμητική.

2. $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma}$, $\alpha\gamma = \beta^2$, $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$, γεωμετρική.

3. $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{2}{\beta}$ (ὁ τύπος τῶν κοίλων σφαιρ. κατόπτρων), $\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$, ἁρμονική.

Ἡ ἁρμονικὴ εἶναι ὑπεναντία τῆς ἀριθμητικῆς, διότι εἰς μὲν τὴν ἀριθμητικὴν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\beta}{\gamma}$, εἰς τὴν ἁρμονικὴν εἶναι ὑπεναντίως, $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\beta}{\gamma}$.

4. $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha+\gamma}=\beta$. Αὕτη λέγεται ὑπεναντία τῆς ἁρμονικῆς, διότι εἰς μὲν τὴν ἁρμονικὴν εἶναι $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$, ἐνταῦθα δὲ εἶναι $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}$.

5. $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}$, $\alpha=\beta+\gamma-\frac{\gamma^2}{\beta}$. Ὑπεναντία τῆς γεωμετρικῆς, διότι εἰς τὴν γεωμετρικὴν εἶναι $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$.

6. $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$, $\gamma=\alpha+\beta-\frac{\alpha^2}{\beta}$. Ὑπεναντία τῆς γεωμετρικῆς.

7. $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$, $\gamma^2=2\alpha\gamma-\alpha\beta$. (Ἀριθ. παράδειγμα, $\alpha=9, \beta=8, \gamma=6$).

8. $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}$, $\alpha^2+\gamma^2=\alpha\,(\beta+\gamma)$. (Ἀριθμ. παράδειγμα, $\alpha=9$, $\beta=7$, $\gamma=6$).

9. $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{\beta}{\gamma}$, $\beta^2+\gamma^2=\gamma(\alpha+\beta)$. (Ἀριθμ. παράδειγμα $\alpha=7$, $\beta=6$, $\gamma=4$).

10. $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$, $\alpha=\beta+\gamma$. (Ἀριθμ. παράδειγμα $\alpha=8$, $\beta=5$, $\gamma=3$).

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ V. 8.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεγαλύτερον πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ μικρότερον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ πρὸς τὸ μεγαλύτερον.

Σύγχρονος διατύπωσις ὁλοκλήρου τῆς ἀποδείξεως.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ α, β καὶ $\alpha > \beta$, ἄλλο δὲ τυχὸν τὸ γ. Λέγω, ὅτι $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{\alpha}$. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις. Α΄.) $\alpha - \beta < \beta$ καὶ Β΄.) $\beta < \alpha - \beta$ [ἡ τρίτη περίπτωσις $\alpha - \beta = \beta$ θεωρεῖται κοινὴ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου καὶ παραλείπεται, διότι εἶναι προφανὲς ὅτι $\frac{2\beta}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{2\beta}$. Ἄλλως τε ἐνταῦθα πρόκειται κυρίως περὶ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν].

Α. 1. Ἔστω πρῶτον $\alpha - \beta < \beta$. Κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Εὐδόξου τὸ μικρότερον τῶν μεγεθῶν, τὸ $\alpha - \beta$, τὸ ὁποῖον βεβαίως εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ μικροτέρου β ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον α, ἐπαναλαμβανόμενον πολλάκις θὰ ὑπερβῇ τὸ τυχὸν μέγεθος γ (ὁσονδήποτε μέγα καὶ ἂν εἶναι τοῦτο ἢ θὰ ὑπερβῇ τὸ μεγαλύτερον μέγεθος α· τὸ νόημα τοῦ ἀξιώματος εἶναι, ὅτι ἐὰν δοθῶσι δύο μεγέθη, ἓν πολὺ μικρὸν καὶ ἄλλο πολὺ μέγα, τὸ μικρότερον λαμβανόμενον ν φορὰς ($\nu = 2, 3 .....$) θὰ ὑπερβῇ τὸ μεγαλύτερον, ὁσονδήποτε μέγα καὶ ἂν ἐλήφθη τοῦτο). Ἂς ληφθῇ τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ $(\alpha - \beta)$, ὥστε $\mu(\alpha - \beta) > \gamma$. Ἐπίσης ἂς ληφθῇ ἰσάκις πρὸς τοῦτο πολλαπλάσιον τοῦ β τὸ μβ. Καὶ τέλος ἂς ληφθῇ τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ γ, ὥστε τὸ πολλαπλάσιον τοῦτο νὰ εἶναι τὸ πρώτως μεγαλύτερον τοῦ μβ ἤτοι $\nu\gamma > \mu\beta$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μβ εἶναι τὸ πρώτως μικρότερον τοῦ νγ, τοῦτο, τὸ μβ, θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ ἴσον πρὸς τὸ $(\nu - 1)\gamma$. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν σχέσιν $\nu\gamma > \mu\beta \geqq (\nu - 1)\gamma$. Καὶ ἐπειδὴ $\mu(\alpha - \beta) > \gamma$ καὶ $\mu\beta \geqq (\nu - 1)\gamma$, διὰ προσθέσεως τῶν ἀνισοτήτων τούτων κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν $\mu\alpha > \nu\gamma$, (1). Εἶναι δὲ $\mu\beta < \nu\gamma$, (2). Εἰς τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) ἔχομεν τέσσαρα μεγέθη τὰ α, γ, β, γ. Τὸ πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου τὸ μα ὑπερέχει τοῦ πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου τοῦ νγ, τὸ πολλαπλάσιον τοῦ τρίτου τὸ μβ, ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου, εἶναι μικρότερον τοῦ πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου τοῦ νγ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου, τοῦ νγ. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν 7, ἐὰν $\mu\alpha > \nu\gamma$ καὶ $\mu\beta \leqq \nu\gamma$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$. Ἐνταῦθα κατὰ μείζονα λόγον ἰσχύει ἡ ἀνισότης, ἀφοῦ μβ εἶναι μόνον $< \nu\gamma$.

Α. 2. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς ἀνισότητας (2) καὶ (1) ὡς ἑξῆς· $\nu\gamma > \mu\beta$ καὶ

$\nu\gamma < \mu\alpha$, τότε κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ ὁρισμοῦ 7 θὰ ἔχωμεν $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{\alpha}$.

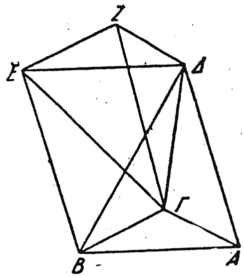
Β. 1. Ἔστω δεύτερον $\beta < \alpha - \beta$. Τὸ μικρότερον μέγεθος β ἐπαναλαμβανόμενον πολλάκις θὰ ὑπερβῇ τὸ τυχὸν μέγεθος γ, ὁσονδήποτε μέγα καὶ ἂν εἶναι τοῦτο. Ἔστω τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ β, ὥστε $\mu\beta > \gamma$. Ἐπίσης ἂς ληφθῇ ἰσάκις πρὸς τοῦτο πολλαπλάσιον τοῦ $\alpha - \beta$ τὸ $\mu(\alpha - \beta)$. Καὶ τέλος ἂς ληφθῇ τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ γ, ὥστε τὸ πολλαπλάσιον τοῦτο νὰ εἶναι τὸ πρώτως μεγαλύτερον τοῦ $\mu(\alpha - \beta)$ ἤτοι $\nu\gamma > \mu(\alpha - \beta)$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $\mu(\alpha - \beta)$ εἶναι τὸ πρώτως μικρότερον τοῦ νγ, τὸ $\mu(\alpha - \beta)$ θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ ἴσον πρὸς τὸ $(\nu - 1)\gamma$. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν σχέσιν $\nu\gamma > \mu(\alpha - \beta) \geqq (\nu - 1)\gamma$. Καὶ ἐπειδὴ $\mu\beta > \gamma$ καὶ $\mu(\alpha - \beta) \geqq (\nu - 1)\gamma$, διὰ προσθέσεως τῶν ἀνισοτήτων τούτων κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν $\mu\alpha > \nu\gamma$, (1). Εἶναι δὲ $\mu(\alpha - \beta) < \nu\gamma$. Καὶ ἐπειδὴ $\alpha - \beta > \beta$, θὰ εἶναι κατὰ μείζονα λόγον $\mu\beta < \nu\gamma$ (2). Εἰς τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) ἔχομεν τέσσαρα μεγέθη τὰ α, γ, β, γ, καὶ ἐν ᾧ πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου εἶναι μεγαλύτερον πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, τὸ ἰσάκις πρὸς τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον τοῦ τρίτου εἶναι μόνον μικρότερον (ἠδύνατο νὰ εἶναι καὶ ἴσον καὶ νὰ ἰσχύῃ ὁ ὁρισμὸς 7) πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου. Ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν 7, $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

Β. 2. Ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν Α.2. θεωροῦμεν τὰς ἀνισότητας (2) καὶ (1) ὡς ἑξῆς $\nu\gamma > \mu\beta$ καὶ $\nu\gamma < \mu\alpha$. Καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν 7, $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{\alpha}$.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΒΔ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΔ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΕΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. ἀλλὰ ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΕΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΖΓΒΕ, διάμετρος δέ ἐστιν αὐτοῦ ἡ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΕΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· διῄρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.



Καὶ ἐπεὶ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ ΓΑΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται· ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ.

 7.

Πᾶν πρίσμα ἔχον βάσιν τρίγωνον διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας, ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Ἔστω πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΔ, τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΔ (Ι. 34)· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ. Ἀλλὰ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ· διότι περιέχονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ΖΓΒΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ εἶναι ἡ ΓΕ, τὸ τρίγωνον ΓΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΒΕ. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΓΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Ἡ δὲ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, ἐδείχθη ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΕΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ· διηρέθη ἄρα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ· διότι περιέχονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων· ἡ δὲ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, ἐδείχθη ὅτι εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτήν, δηλ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ ὕψος ἴσον [ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, τοιοῦτό καὶ τὸ ἀπεναντίον, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον, καὶ ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ιβ'. ι'.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστίν.

Εἰ γάρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὴ ΑΒΓΔ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κιλίνδρῳ. τὸ δὴ ἀνιστάμενον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου· καί ἐστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα τετραγώνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· καί ἐστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα

Πόρισμα.

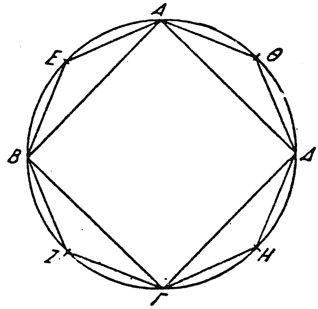
Ὅθεν εἶναι φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς αὐτὴν [ἐπειδὴ καὶ ἂν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος ἔχῃ ἄλλο εὐθύγραμμον σχῆμα (ἐκτὸς δηλ. τοῦ τριγώνου), τοιοῦτο θὰ εἶναι καὶ τὸ σχῆμα τὸ ἀπέναντι τῆς βάσεως, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπέναντι τούτων ἐπίπεδα, τρίγωνα, καὶ εἶναι ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ XII. 10.

Πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸν καὶ ὕψος ἴσον.

Διότι ἂς ἔχῃ κῶνος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς κύλινδρον τὸν κύκλον ΑΒΓΔ καὶ ὕψος ἴσον· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου.

Διότι ἐὰν ὁ κύλινδρος δὲν εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου, θὰ εἶναι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἢ μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου ἢ μικρότερος τοῦ τριπλασίου. Ἔστω πρότερον μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· ὅθεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (XII. 2). Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πρίσμα ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον. Ὅθεν τὸ ἀνυψούμενον πρίσμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδὴ καὶ ἂν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου· καὶ εἶναι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνυψούμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις (XI. 32)· καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἄρα ἀνυψωθὲν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ εἶναι ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου τετραγώνου· τὸ πρίσμα ἄρα τὸ ἀνυψωθὲν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου. Ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ, εἶναι μεγαλύτερον *τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων παραλλήλους ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν*



στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίση ἐστὶ τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων· καί ἐστι τὰ τοῦ κυλίνδρου τμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ὡς ἐδείξαμεν προηγουμένως (XII. 2). Ἂς ἀνυψωθῶσιν ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνυψωθέντων πρισμάτων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυλινδρικοῦ τμήματος, ἐπειδὴ ἐὰν διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀνυψώσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον, ἑκάστου τῶν ἀνυψωθέντων εἶναι τὰ ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα, τὰ ἡμίση· καὶ εἶναι τὰ τμήματα τοῦ κυλίνδρου μικρότερα τῶν ἀνυψωθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῶν ἀντιστοίχων κυλινδρικῶν τμημάτων. Τέμνοντες τώρα τὰ ὑπόλοιπα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε θὰ λάβωμεν κατά τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον κυλινδρικὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου (X. 1). Ἂς ἀπομείνωσι καὶ ἔστωσαν τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι τριπλάσιον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον (θ. 7. πόρ.)· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν τοῦ κώνου, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικροτέρα· διότι ἐμπεριέχεται ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.

Λέγω τώρα, ὅτι ὁ κύλινδρος δὲν εἶναι οὔτε μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἑνὸς τρίτου τοῦ κυλίνδρου. Ἂς ἀναγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ· τὸ τετράγωνον ἄρα ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (θ. 2). Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἀνυψωθεῖσα ἄρα πυραμὶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου, ἐπειδή, ὡς ἐδείξαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἐὰν περὶ τὸν κύκλον περιγράψωμεν τετράγωνον, θὰ εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ τὸ ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀνυψώσωμεν ἀπὸ *τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. καί ἐστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστι ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτωσαν ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ. καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ κυλίνδρου.*

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κῶνον, τὰ ὁποῖα καὶ καλοῦνται πρίσματα, θὰ εἶναι τὸ ἀνυψωθὲν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἥμισυ τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· διότι πρὸς ἄλληλα εἶναι ὡς αἱ βάσεις (XI. 32). Ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πυραμίδος τῆς ἀνυψωθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. Καὶ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κώνου ἡ πυραμὶς ἡ ἀνυψωθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· διότι ἐμπεριέχει αὐτόν. Ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου. Ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ. Καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πυραμίδες ἔχουσαι τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες τώρα τὰ ἀπομένοντα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα ἔχουσαν τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε, θὰ λάβωμεν κατά τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον τμήματά τινα τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου (X. 1). Ἂς ἀπομείνωσι καὶ ἔστωσαν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ' ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον· τὸ πρίσμα ἄρα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ. Ἀλλὰ καὶ μικρότερον· διότι ἐμπεριέχεται ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἐδείχθη δέ, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου· ὁ κύλινδρος ἄρα εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸν καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

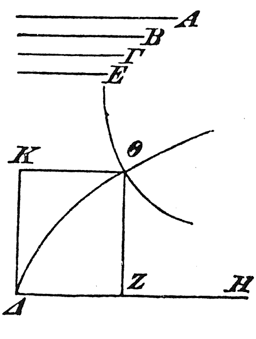
ΜΕΝΑΙΧΜΟΣ

Πιθανῶς ἐκ Προκοννήσου τῆς Προποντίδος, μαθητὴς τοῦ Εὐδόξου καὶ συνεργάτης τοῦ Πλάτωνος εἰς τὴν 'Ακαδημίαν. 'Ο Εὐτόκιος (6 αἰ.) διέσωσε δύο λύσεις τοῦ δηλίου προβλήματος ὑπὸ τοῦ Μεναίχμου, αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνονται εἰς τὸν Γ΄ τόμον τῶν 'Απάντων τοῦ 'Αρχιμήδους (ὑπὸ Heiberg - Stamatis, B. G. Teubner, Stuttgart 1972 σελ. 78 - 84).

Ὡς Μέναιχμος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ Α, Ε· δεῖ δὴ τῶν Α, Ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν.

γεγονέτω, καὶ ἔστωσαν αἱ Β, Γ, καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ ΔΗ πεπερασμένη κατὰ τὸ Δ, καὶ πρὸς τῷ Δ τῇ Γ ἴση κείσθω ἡ ΔΖ, καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΘ, καὶ τῇ Β ἴση κείσθω ἡ ΖΘ. ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β· τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς Α καὶ τῆς Γ, τουτέστι τῆς ΔΖ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τὸ Θ διὰ τοῦ Δ γεγραμμένης. ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΘΚ, ΔΚ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ



ὑπὸ Β, Γ· ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ Α, Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΚΘΖ. ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ Θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς ΚΔ, ΔΖ. δοθὲν ἄρα τὸ Θ· ὥστε καὶ τὸ Ζ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐ-

Ὅπως ὁ Μέναιχμος

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ Α, Ε· πρέπει νὰ εὑρεθοῦν τῶν εὐθειῶν Α, Ε δύο μέσαι ἀνάλογοι.

(Ἀνάλυσις). Ἔστω ὅτι εὑρέθησαν καὶ εἶναι αἱ Β, Γ καὶ ἂς ληφθῇ κατὰ δεδομένην θέσιν ἡ πεπερασμένη κατὰ τὸ Δ εὐθεῖα ΔΗ, καὶ ἐκ τοῦ Δ ἂς ληφθῇ ἡ ΔΖ=Γ καί ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΖΘ, καὶ ἂς κεῖται ΖΘ=Β. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι Α, Β, Γ εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν Α, Γ=B^2; τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν Α καὶ τὴν Γ, τουτέστι τὴν ΔΖ=B^2, τουτέστι =$Z\Theta^2$. Εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον Θ ἐπὶ παραβολῆς διερχομένης διὰ τοῦ Δ. (Ἀπολλωνίου Κωνικὰ Ι. 11). Ἂς ἀχθοῦν παράλληλοι αἱ ΘΚ, ΔΚ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν Β, Γ εἶναι δοθὲν διότι εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν Α, Ε· εἶναι ἄρα δοθὲν τό ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΘ, ΘΖ. Εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον Θ ἐπὶ ὑπερβολῆς, μὲ ἀσυμπτώτους τὰς ΚΔ, ΔΖ (Ἀπολλωνίου Κωνικὰ ΙΙ, 12. Εἶναι ἄρα τὸ Θ δοθέν· ὥστε καὶ τὸ Ζ. (Σύνθεσις). Ἡ σύνθεσις θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς. Ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ Α, Ε, ἡ δὲ κατὰ τὴν θέσιν δοθεῖσα ἡ ΔΗ, πεπερασμένη κατὰ τὸ Δ, καὶ ἂς γραφῇ διὰ τοῦ Δ παραβολή, τῆς ὁποίας ἄξων μὲν εἶναι ἡ ΔΗ, παράμετρος δὲ ἡ Α, τὰ δὲ τετράγωνα τῶν ἐπὶ τὴν ΔΗ εὐθειῶν ἂς εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ παρὰ τὴν Α παρακείμενα χωρία ἔχοντα πλάτη τὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ σημείου Δ (Ἀπολλωνίου Κωνικὰ Ι, 52). Ἂς γραφῇ λοιπὸν ἡ παραβολὴ καὶ ἔστω ἡ ΔΘ, καὶ κάθετος ἡ ΔΚ, καὶ μὲ θεῖαι αἱ Α, Ε, ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ ΔΗ πεπερασμένη κατὰ τὸ Δ, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Δ παραβολή, ἧς ἄξων μὲν ἡ ΔΗ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ Α, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΔΗ ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν Α παρακείμενα χωρία πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Δ σημείῳ. γεγράφθω καὶ ἔστω ἡ ΔΘ, καὶ ὀρθὴ ἡ ΔΚ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς ΚΔ, ΔΖ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ' ἧς αἱ παρὰ τὰς ΚΔ, ΔΖ ἀχθεῖσαι ποιήσουσιν τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ Α, Ε· τεμεῖ δὴ τὴν παραβολήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΘΚ, ΘΖ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΖ, ἔστιν, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ Α, Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΖΔ, ἔστιν, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΖΔ πρὸς τὴν Ε. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΖΘ πρὸς ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΖΘ πρὸς ΖΔ καὶ ἡ ΖΔ πρὸς Ε. κείσθω τῇ μὲν ΘΖ ἴση ἡ Β, τῇ δὲ ΔΖ ἴση ἡ Γ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Β πρὸς τὴν Γ καὶ ἡ Γ πρὸς Ε. αἱ Α, Β, Γ, Ε ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Ἄλλως.

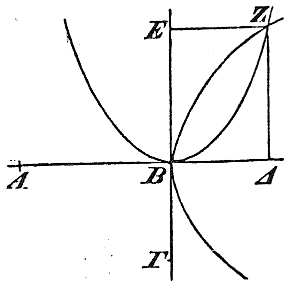
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ ΔΒ, ΒΕ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως τὴν ΒΔ πρὸς ΒΕ καὶ τὴν ΒΕ πρὸς ΒΑ, καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ ΔΖ, ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΕ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τουτέστι τῆς ΕΖ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ, τὸ Ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΕ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΒΕ πρὸς ΒΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΔ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ, τουτέστι τῆς ΔΖ· τὸ Ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΔ. ἧπται δὲ καὶ ἑτέρας δοθείσης τῆς περὶ τὴν ΒΕ· δοθὲν ἄρα τὸ Ζ. καὶ κάθετοι αἱ ΖΔ, ΖΕ· δοθέντα ἄρα τὰ Δ, Ε.

ἀσυμπτώτους τὰς ΚΔ, ΔΖ ἂν γραφῇ ὑπερβολή, ἀπὸ τῆς ὁποίας αἱ ἀχθεῖσαι παράλληλοι ΚΔ, ΔΖ θὰ σχηματίζουν χωρίον ἰσοδύναμον πρός τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν Α, Ε ('Απολλωνίου Κωνικὰ ΙΙ, 5)· θὰ τέμνῃ λοιπὸν τὴν παραβολήν. Ἔστω ὅτι τὴν τέμνει εἰς τὸ σημεῖον Θ καὶ ἃς ἀχθοῦν κάθετοι αἱ ΘΚ, ΘΖ. 'Επειδὴ λοιπὸν τὸ $ΖΘ^2$= ὀρθογώνιον Α×ΔΖ ('Απολλωνίου Κωνικὰ Ι, 11),εἶναι ὡς Α:ΖΘ=ἡ ΘΖ:ΖΔ. Πάλιν, ἐπειδή τὸ ὀρθογώνιον Α×Ε=ΘΖ×ΖΔ, εἶναι, ὡς ἡ Α:ΖΘ=ΖΔ:Ε. 'Αλλ' ὡς ἡ Α:ΖΘ= ἡ ΖΘ:ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α:ΖΘ= ἡ ΖΘ:ΖΔ=ΖΔ:Ε. Ἃς ληφθῇ ἡ μὲν Β=ΘΖ, ἡ δὲ Γ=ΔΖ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ Α:Β=Β:Γ= Γ:Ε. Εἶναι ἄρα αἱ Α, Β, Γ, Ε εἰς συνεχῆ ἀναλογίαν, τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ εὕρωμεν,.

Κατ' ἄλλον τρόπον

('Ανάλυσις). Ἔστωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἃς γίνουν δύο μέσαι ἀνάλογοι αὐτῶν αἱ ΔΒ, ΒΕ, ὥστε νὰ εἶναι ὡς ΓΒ:ΒΔ= ΒΔ:ΒΕ=ΒΕ:ΒΑ, καὶ ἃς ἀχθοῦν κάθετοι αἱ ΔΖ, ΕΖ. 'Επειδὴ λοιπὸν εἶναι, ὡς ΓΒ:ΒΔ=ΔΒ:ΒΕ, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΓΒ×ΒΕ, τουτέστι τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν καὶ τὴν ΒΕ εἶναι=$ΒΔ^2$ δηλ. =$ΕΖ^2$. 'Επειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν καὶ τὴν ΒΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΕΖ^2$, τὸ σημεῖον ἄρα Ζ ἐφάπτεται παραβολῆς τῆς περὶ τὸν ἄξονα τὴν ΒΕ ('Απολλ. Κωνικὰ Ι, 11). Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΑΒ:ΒΕ= ΒΕ:ΒΔ, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΑΒ×ΒΔ, τουτέστι τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν καὶ τὴν ΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΕΒ^2$, τουτέστι ἴσον πρὸς τὸ $ΒΖ^2$· τὸ σημεῖον Ζ ἄρα ἐφάπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΔ. 'Αλλὰ ἐφάπτεται καὶ ἄλλης δοθείσης παραβολῆς τῆς περὶ τὴν ΒΕ· εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον Ζ δοθέν. Καὶ αἱ ΖΔ, ΖΕ εἶναι κάθετοι· εἶναι ἄρα τὰ σημεῖα Δ,Ε δοθέντα.

συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ *ΑΒ*, *ΒΓ* καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τοῦ *Β*, καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν *ΒΕ* παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν *ΒΕ* δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν *ΒΓ*. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν *ΔΒ* παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν *ΑΒ*· τεμοῦσιν δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ *Ζ*, καὶ ἀπὸ τοῦ *Ζ* κάθετοι ἤχθωσαν αἱ *ΖΔ*, *ΖΕ*. ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ *ΖΕ*, τουτέστιν ἡ *ΔΒ*, τὸ ἄρα ὑπὸ *ΓΒΕ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ



ΒΔ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ *ΓΒ* πρὸς *ΒΔ*, ἡ *ΔΒ* πρὸς *ΒΕ*. πάλιν, ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ *ΖΔ*, τουτέστιν ἡ *ΕΒ*, τὸ ἄρα ὑπὸ *ΔΒΑ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ *ΕΒ*· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ *ΔΒ* πρὸς *ΒΕ*, ἡ *ΒΕ* πρὸς *ΒΑ*. ἀλλ' ὡς ἡ *ΔΒ* πρὸς *ΒΕ*, οὕτως ἡ *ΓΒ* πρὸς *ΒΔ*· καὶ ὡς ἄρα ἡ *ΓΒ* πρὸς *ΒΔ*, ἡ *ΒΔ* πρὸς *ΒΕ* καὶ ἡ *ΕΒ* πρὸς *ΒΑ*· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

[Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος Καμαρικῶν].

(Σύνθεσις). Ἡ σύνθεσις δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἔστωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἂς προεκβληθοῦν ἐπ' ἄπειρον, καὶ ἂς γραφῇ περὶ ἄξονα τὴν ΒΕ παραβολή, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν κατηγμένων ἐπὶ τὴν ΒΕ νὰ ἰσοῦνται πρὸς τὰ παρὰ τὴν ΒΓ (παράμετρον) ὀρθογώνια. Πάλιν ἂς γραφῇ περὶ ἄξονα τὴν ΔΒ παραβολή, ὥστε τά τετράγωνα τῶν κατηγμένων νὰ ἰσοῦνται πρὸς τὰ παρὰ τὴν ΑΒ (παράμετρον) ὀρθογώνια· αἱ παραβολαὶ λοιπὸν θὰ τέμνωνται πρὸς ἀλλήλας. Ἔστω ὅτι τέμνονται κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθοῦν κάθετοι αἱ ΖΔ, ΖΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν κατηγμένη εἰς παραβολὴν εἶναι ἡ ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΓΒ \times ΒΕ = ΒΔ^2$. (Ἀπολλ. Κωνικὰ Ι, 11)· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ $ΓΒ : ΒΔ = ΔΒ : ΒΕ$. Πάλιν ἐπειδὴ κατηγμένη εἰς παραβολὴν εἶναι ἡ ΖΔ, τουτέστιν ἡ ΕΒ, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΔΒ \times ΒΑ = ΕΒ^2$ (Ἀπολλ. Κων. Ι, 11)· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ $ΔΒ : ΒΕ = ΒΕ : ΒΑ$. Ἀλλ' ὡς ἡ $ΔΒ : ΒΕ = ΓΒ : ΒΔ$· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΓΒ : ΒΔ = ΒΔ : ΒΕ = ΕΒ : ΒΑ$· τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ εὕρωμεν.

[Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου ὑπὸ τοῦ Μιλησίου μηχανικοῦ Ἰσιδώρου (ἐκ τῶν μηχανικῶν τῆς Ἁγίας Σοφίας) ἡμετέρου διδασκάλου, γραφέντος δέ (τοῦ διαβήτου) ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὰ σχόλιά του τῶν Καμαρικῶν τοῦ Ἥρωνος].

ΣΠΕΥΣΙΠΠΟΣ

'Ο Σπεύσιππος (περίπου 407 - 339 π.Χ.) υἱὸς τῆς ἀδελφῆς τοῦ Πλάτωνος Πωτώνης ἔγινε διευθυντὴς τῆς 'Ακαδημίας μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Πλάτωνος (347 π.Χ.). Ἔγραψε πλεῖστα συγγράμματα μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ἓν ὑπὸ τὸν τίτλον «Μαθηματικός», τὰ ὁποῖα ἐχάθησαν. 'Ο Διογένης Λαέρτιος (4. 5-6) λέγει ὅτι ὁ 'Αριστοτέλης ἠγόρασε τὰ βιβλία τοῦ Σπευσίππου ἀντὶ τριῶν ταλάντων. 'Ο 'Ιάμβλιχος (περίπου 250 - 325 μ.Χ.), εἰς τὰ Θεολογούμενα τῆς 'Αριθμητικῆς του, B. de Falco 61, σ. 82 γράφει ὅτι ὁ Σπεύσιππος ὁρμώμενος ἐκ τῶν συγγραμμάτων τοῦ Φιλολάου συνέταξε βιβλίδιόν τι ὑπὸ τὸν τίτλον «Περὶ τῶν Πυθαγορικῶν ἀριθμῶν». Τὸ ἥμισυ τοῦ βιβλίου τούτου προσθέτει ὁ Δ. Λαέρτιος, (ἔνθ' ἀνωτ.) ἀναφέρεται, εἰς τοὺς ἀριθμούς, εἰς τοὺς πολυγώνους ἀριθμούς, καὶ εἰς τὰ πέντε κανονικὰ πολύεδρα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς σφαῖραν, ἐξετάζον τὰς ἰδιότητας αὐτῶν. Τὸ ἄλλο ἥμισυ τοῦ βιβλίου ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἔρευναν τῆς δεκάδος ἀπὸ συμβολικῆς καὶ θεολογικῆς ἀπόψεως.

ΞΕΝΟΚΡΑΤΗΣ

'Ο Ξενοκράτης (396 - 314 π.Χ.) καταγόμενος ἐκ τῆς Χαλκηδόνος (παρὰ τὸν Βόσπορον) διεδέχθη τὸν Σπεύσιππον εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς 'Ακαδημίας (339 - 314 π.Χ.). Κατὰ τὸν Δ. Λαέρτιον ἔγραψε πολλὰ ἔργα, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τὰ ἑξῆς: 1) Περὶ Λογιστικῶν, βιβλία 9, 2) Περὶ γεωμετρῶν, βιβλία 5. 3) Περὶ ἀριθμῶν, βιβλίον 1. 4) 'Αριθμῶν θεωρία, βιβλίον 1. 5) Περὶ διαστημάτων, βιβλίον 1. 6) Τῶν περὶ 'Αστρολογίας βιβλία 6. 7) Περὶ γεωμετρίας, βιβλία 2. Τίποτε ἀπὸ αὐτὰ δὲν ἐσώθη.(Δ. Λαέρτ. 4. 13 - 14).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *Γκίκας Κωνστ. Εὐ.* Ἄλγεβρα, Ἀθῆναι 1971.
2. *Δαμάσκος Παναγιώτης.* Κύκλος - Εὐθεῖα, Ἀθῆναι 1972.
3. *Ζαχαρίου, Ἀνδρέας καὶ Ἑλένη.* 1) Ἄλγεβρα καὶ θεωρία ἀριθμῶν (Γένεση καὶ ἐξέλιξη). Θεμέλια τῶν Ἐπιστημῶν, τόμος 1, Ἀθῆναι 1979, σελ. 177 - 195, 2) Οἱ Νόμοι τοῦ Πλάτωνος καὶ ἡ ἀκολουθία τῶν πρώτων ἀριθμῶν. (Platos Laws and the sequence of primes, American Mathematical Society, Februar 1982, Issue 16, vol. 3, No 2, Abstract 82 T - 10-130, p. 189). 3) Ζαχαρίου Ἀνδρέας ὑπὲρ τὰ 50 ἄρθρα εἰς τὴν Μεγάλην Σοβιετικὴν Ἐγκυκλοπαιδείαν, μεταξὺ τῶν ὁποίων: Ἀρχιμήδης, Ἀρχύτας, Δήλιον πρόβλημα, Διόφαντος, Εὔδοξος, Εὐκλείδης, Θεαίτητος, Θεόδωρος, Μέναιχμος κλπ.
4. *Ζερβὸς Παναγιώτης,* Σπ. Σχέσις τῶν Μαθηματικῶν μὲ τὰς λοιπὰς ἐπιστήμας καὶ τὴν Φιλοσοφίαν. Δελτίον ΕΜΕ, Μάϊος 1919, 2) Φιλοσοφία καὶ ἐπιστήμη, εἰς Σπύρου Π. Ζερβοῦ Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ Νεώτερα Μαθηματικά, Ἀθῆναι 1972.
5. *Ζερβοῦ Χαρίκλεια,* Παν. Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν μελέτην τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς ποιήσεως, ἔκδ. Καραβία, Ἀθῆναι 1974.
6. *Ζερβὸς Σπῦρος, Παν.* 1) Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ Νεώτερα Μαθηματικά, Ἀθῆναι 1972. 2) Στοιχειώδης Εἰσαγωγὴ σὲ ἔννοιες καὶ προβλήματα τῆς θεμελιώσεως τῆς Λογικῆς καὶ τῶν Μαθηματικῶν. Περιοδικὸν Ἑλληνικὸς Λόγος, Ἀθῆναι 1973.
7. *Κωβαῖος Μιχαήλ, Κων.* 1) Ἱστορία τῆς ἀριθμήσεως, Ἀθῆναι 1946, 1952, (Ἐγκυκλ. περιοδικὸν Ἥλιος)., 2) Τὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδη σὰν σχολικὸ βιβλίο, Περιοδ. Παιδεία καὶ Ζωή, τεῦχος 2, Ἀθῆναι 1952, 3) Ἀντοχὴ τῶν ὑλικῶν Ἀθήνα 1970, 4) Ἐγχειρίδιον Νομογραφίας, Ἀθῆναι 1971 5) Ἱστορία τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν, τόμοι 3. Μετάφρασις ἐκ τοῦ ἰταλικοῦ τοῦ Gino Loria, Ἀθῆναι 1970.
8. *Λιβέρης Διονύσιος.* 1) Γεωμετρία τοῦ ἐπιπέδου, 2) Θεωρητικὴ Γεωμετρία, 3) Στερεομετρία, (Ἀθῆναι 1969, 1974, 1969), 4) Ἀκέραιαι λύσεις τῆς Διοφαντικῆς ἐξισώσεως $\chi^3+\psi^3+t^3+f^3=0$, Ἀθῆναι 1974.
9. *Μάγειρας Παναγιώτης* 1) Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Ἀριθμοθεωρίαν μέρος Α′ καὶ Β′, Ἀθῆναι 1964, 1965, 2) Ἀλγεβρικὰ θέματα μετὰ σημειώσεων Ἀναλύσεως, τόμοι Α′, Β′, Γ′, Δ′, Ε′, ὅλα νέα ἔκδοσις, Ἀθῆναι

1970, 1978, 1971, 1972, 1974, 3) Ἑνότητες εἰς τὰ Νεώτερα Μαθηματικά, Ἀθῆναι 1966.

10. *Μανιᾶς Θεοφάνης.* Ἄγνωστα μεγαλουργήματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, Ἀθῆναι 1972.
11. *Μούκανος Δημήτριος,* Δ. Τὸ πρόβλημα τοῦ ὄντος, Ἀθῆναι 1969.
12. *Moutsopoulos* E. La musique dans l' oeuvre de Platon, Paris 1959.
13. *Νιάρχος Κωνσταντῖνος.* Εἰσαγωγικὰ μαθήματα στὴ Φιλοσοφία, Ἀθῆναι 1982.
14. *Παπαδᾶτος Ἰωάννης Σπ.* Πολύγωνοι καὶ Πολυεδρικοὶ ἀριθμοί, Ἀθήνα 1982.
15. *Bachmakoba Isabella* Gr. ΔИΟΦΑΗΤ ΑΡИΦΜΕΤИΚΑ, Mockba 1974. (Μπαχμάκοβα Ἰσαβέλλα Γρ. Διοφάντου Ἀριθμητικά, Μόσχα 1974).
16. *Gericke Helmuth* Geschichte des Zahlbegriffs, Mannheim 1970.
17. *Ivor Thomas,* Greek Mathematics vol. I, II. Heimamann, London 1957, 1980.
18. Mugler Charles. Dictionnaire Historique de la terminologie géométrique des Grecs, Paris 1958.
19. *Sachs Eva.* Die fünf platonischen Körper, Berlin, 1917, Weidmannsche Buchhandlung.
20. *Schönberger P. Leander* - Steck Max. Proklus Diadochus (deutsch). Deutsche Akademie der Naturforscher (Leopoldina), 1945, Halle (Saale).
21. *Vogel Kurt,* Beiträge zur Geschichte der Arithimetik, Minerva, München, 1978.
22. *B. L. van der Waerden.* Die Pythagoreer, Artemis 1979, Zürich - München.
23. *Anonymer* Kommentar zu Platons Theaetet, Papyrus 9782, Berliner Klassiker Texte, Berlin, Weidmannsche Buchhandlung 1905.
24. *Rosenfeld,* Ἱστορία τῆς μὴ Εὐκλειδείου Γεωμετρίας, καὶ ἀνάπτυξις τῆς ἐννοίας περὶ γεωμετρικοῦ χώρου. Μόσχα, 1976.

Ἐξόχως ἐνδιαφέρον ἄρθρον διὰ τὴν δρᾶσιν τοῦ Πλάτωνος ἐκτὸς τῆς Ἀκαδημίας ἐδημοσίευσεν ὁ καθηγητὴς Konrad Gaiser ὑπὸ τὸν τίτλον Platons Universität, ein neuer Quellentext aus Herculaneum, neue Zürcher Zeitung, Samstag/Sonntag, 7/8. November 1981 Nr. 259. Τὴν πληροφορίαν ταύτην ἀνεκοίνωσεν εἰς ἡμᾶς ὁ διδάκτωρ τῆς Φιλοσοφίας κ. Δημήτριος Δ. Μούκανος.

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ

1.	Ἀρχιμήδους, Τετραγωνισμὸς παραβολῆς	Ἀθῆναι	1946
2.	Ἀρχιμήδους, Μηχανικὰ Ι	»	1946
3.	Τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας	»	1949
4.	Ἀρχιμήδους, Κύκλου μέτρησις	»	1950
5.	Εὐκλείδου, Γεωμετρία, Στοιχείων Βιβλία 1,2,3,4, Τόμος Ι	»	1952
6.	Εὐκλείδου, Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων Βιβλία 5,6,7,8,9, Τόμος ΙΙ	»	1953
7.	Τὰ Ἑλληνικὰ Μαθηματικά, ἐκ τῶν παραδόσεων ἐν τῇ Σχολῇ Γενικῆς Μορφώσεως Ἀνωτέρων Ἀξιωματικῶν τοῦ Γενικοῦ Ἐπιτελείου Στρατοῦ	»	1956
8.	Εὐκλείδου, Περὶ ἀσυμμέτρων, Στοιχείων Βιβλίον 10ον, Τόμ. ΙΙΙ	»	1956
9.	Εὐκλείδου, Στερεομετρία, Στοιχείων Βιβλία 11, 12, 13, Τόμ. IV	»	1957
10.	Ἀνθολογία ἀρχαίων κειμένων. Μαθηματικὰ —Ἀστρονομία — Φυσικὴ — Μηχανικὴ — Γεωγραφία τοῦ πολιτισμοῦ	»	1960
11.	Μετάφρασις τοῦ προηγουμένου εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν	»	1961
12.	Διοφάντου Ἀριθμητικά. Ἡ ἄλγεβρα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων	»	1963
13.	Προσωκρατικοὶ φιλόσοφοι	»	1966
14.	Ἡ Ἑλληνικὴ Ἐπιστήμη	»	1968
15.	Euclides I, Elementa I - IV, B.G. Teubner,	Leipzig	1969
16.	Euclides II, Elementa V - IX, B. G. Teubner,	»	1970
17.	Euclides III, Elementa X, B. G. Teubner,	»	1972
18.	Euclides IV, Elementa XI - XIII, B.G. Teubner,	»	1973
19.	Euclides V, 1, Elem. XIV - XV, Scholia in libros I - V B.G. Teubner	»	1977
20.	Euclides V, 2, Scholia in libros VI - XIII, Appendix Schol. B.G. Teubner	»	1977
21.	Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, τόμος Α΄ μέρη 2. Ἔκδ. Τεχν. Ἐπιμελ. Ἑλλάδος,	Ἀθῆναι	1970
22.	Archimedis Opera Omnia, Vol. I - III, Ed. I.L. Heiberg, corrigenda adiecit Evangelos S. Stamatis, B.G. Teubner,	Stuttgart	1972

23. Ἐπιστημονικαὶ Ἐργασίαι - ἄρθρα, τόμος Α', Ἀθῆναι 1972
24. Ἐπιστημονικαὶ Ἐργασίαι - ἄρθρα, τόμος Β', » 1973
25. Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, τόμος Β'. Ἔκδ. Τεχν. Ἐπιμελ. Ἑλλάδος, » 1973
26. Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, τόμος Γ'. Ἔκδ. Τεχν. Ἐπιμελ. Ἑλλάδος, » 1974
27. Ἄρθρα - Ὁμιλίαι » 1974
28. Ἱστορία τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν » 1976
29. Μαθηματικὰ εἰς τοὺς διαλόγους τοῦ Πλάτωνος » 1976
30. Ἑλληνικὰ Μαθηματικά, Ἔκδ. Ἑταιρείας Φίλων τοῦ Λαοῦ » 1976
31. Ἀπολλωνίου Κωνικά, τόμος Α'. Ἔκδ. Τεχν. Ἐπιμελ. Ἑλλάδος » 1975
32. Ἀπολλωνίου Κωνικά, τόμος Β'. Ἔκδ. Τεχν. Ἐπιμελ. Ἑλλάδος » 1976
33. Ἀπολλωνίου Κωνικά, τόμος Γ'. Ἔκδ. Τεχν. Ἐπιμελ. Ἑλλάδος » 1976
34. Ἀπολλωνίου Κωνικά, τόμος Δ'. Ἔκδ. Τεχν. Ἐπιμελ. Ἑλλάδος. » 1976

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΕΝ ΤΗ ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

35. Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ 11. 6.1953
36. Μία παρατήρησις ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2 παρὰ τοῖς ἀρχαίοις 19.11.1953
37. Ἐπὶ τοῦ εὐκλειδείου θεωρήματος περὶ μεγίστου 10.12.1953
38. Περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παρὰ τοῖς ἀρχαίοις 4. 6.1954
39. Γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 3 2. 6.1955
40. Συμβολὴ εἰς τὴν ἔρευναν τῆς γεωμετρικῆς ἀλγέβρας τῶν Πυθαγορείων 2. 6.1955
41. Ἐπὶ τοῦ εὐκλειδείου θεωρήματος ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων 24.11.1955
42. Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος 12. 1.1956
43. Παρατηρήσεις τινὲς ἐπὶ τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων παρὰ τοῖς ἀρχαίοις 14. 6.1956
44. Ἐπὶ τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου 17. 1.1957
45. Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος μέρος II 31. 1.1957
46. Περὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων παρὰ Πλάτωνι 16.10.1958

47. Περὶ τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας (τοῦ Ἀριστοτέλους) 4. 6.1959
48. Γενίκευσις ἑνὸς προβλήματος ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως τοῦ Διοφάντου 1.12.1960
49. Τὸ ἡλιοκεντρικὸν σύστημα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων 11. 3.1971

ΑΛΛΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ

50. Ἡ λύσις τοῦ δηλίου προβλήματος ὑπὸ τοῦ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου. Περιοδικὸν «Φυσικὸς κόσμος» τῆς Ἑνώσεως τῶν Φυσικῶν τῆς Ἑλλάδος, τεύχη 3 - 4 Ἀθῆναι 1950
51. Συμβολὴ εἰς τὴν ἑρμηνείαν γεωμετρικοῦ χωρίου τοῦ διαλόγου τοῦ Πλάτωνος Μένων. (Περιοδικὸν ΠΛΑΤΩΝ, τεῦχος Β′) » 1951
52. Τὸ Θυμαρίδειον Ἐπάνθημα. (Περιοδικὸν ΠΛΑΤΩΝ, τεῦχος Α′) » 1952
53. Ἀριθμοὶ τέλειοι, πλευρικοί, διαμετρικοί. (Περιοδικὸν ΠΛΑΤΩΝ, τεῦχος Β′) » 1952
54. Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου τεσσάρων ἐλλειπόντων προβλημάτων τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου. Περιοδικὸν ΠΛΑΤΩΝ, τεύχη Α - Β (25/26) » 1961
55. Παρατηρήσεις τινὲς ἐπὶ τῆς μεθόδου «Παρισότητος ἀγωγή» τοῦ Διοφάντου (μέθοδος προσεγγίσεως). Περιοδικὸν ΠΛΑΤΩΝ, τεύχη Α-Β (25-26) » 1961
56. Ἐπὶ τῶν ὁρισμῶν 17 καὶ 18 τοῦ V Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ ὅρου δι' ἴσου. Περιοδικὸν ΠΛΑΤΩΝ, τεύχη 27/28 » 1962
57. Ἀνάλυσις προβλημάτων ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου. Τεῦχος Διαλέξεων τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας » 1962
58. Γενίκευσις ἑνὸς θεωρήματος τοῦ Ἀρχιμήδους. Περιοδικὸν ΠΛΑΤΩΝ, τεύχη 29/30 » 1963
59. Αἱ ἀναλογίαι τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ ἡ σχέσις τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας πρὸς τὸν τύπον τῶν κοίλων σφαιρικῶν κατόπτρων. Περιοδικὸν ΠΛΑΤΩΝ, τεύχη 29/30 » 1963
60. Ἀνάλυσις ἑνὸς προβλήματος τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου. Περιοδικὸν ΠΛΑΤΩΝ, τεύχη 29/30 » 1963
61. Ἀνάλυσις προβλημάτων τινων ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου. (IV, 39. V, 10, 11, 12. VI, λήμματα 1, 2, πρόβλημα 12). Περιοδικὸν ΠΛΑΤΩΝ, τεύχη 31/32 » 1964
62. Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δω-

ρικὴν διάλεκτον, δέκα πέντε θεωρημάτων τοῦ 'Αρχιμήδους, τὰ ὁποῖα σώζονται εἰς τὴν ἀραβικήν. Δελτίον τῆς 'Ελληνικῆς Μαθηματικῆς 'Εταιρείας, Νέα σειρά, τόμος 6 II, τεῦχος 2, σελ. 265-297 » 1965
63. 'Η νῆσος Θούλη καὶ ὁ Πυθέας » 1965
64. Συμβολὴ εἰς τὴν ἑρμηνείαν μουσικοῦ χωρίου τοῦ Τιμαίου τοῦ Πλάτωνος, περιοδ. Πλάτων » 1966
65. Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας παρ' 'Αρχιμήδει. Περ. Πλάτων » 1967
66. 'Αρχιμήδεια. Περιοδ. Πλάτων » 1967
67. Μενάνδρου ψήγματα » 1968
68. Εὐκλείδης, Παιδαγωγικὴ 'Εγκυκλοπαιδεία » 1968
69. Περὶ τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας. Περιοδ. Πλάτων » 1968
70. 'Αρχιμήδους, Περὶ τῆς κατασκευῆς τοῦ εἰς κύκλον ἐγγ. κανον. ἑπταγώνου. 'Ελληνικὴ Μαθηματικὴ 'Εταιρεία. Νέα σειρά, τόμ. 9, τεῦχος 2 » 1968
71. Τὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων καὶ τῶν Αἰγυπτίων. Περιοδικὸν Εὐκλείδης Ε.Μ. 'Εταιρείας τόμ. Α' » 1968
72. Αἱ μυστικαὶ τηλεπικοινωνίαι τῶν ἀρχαίων 'Ελλήνων » 1969
73. Δαίδαλος -'Αρχύτας. Διεθνὲς Διαστημικὸν Συνέδριον Χανίων Κρήτης » 1969
74. Φιλόγελως. 'Εταιρεία Κυκλαδικῶν Μελετῶν, τόμ. Η' 1969 » 1969
75. 'Η θεωρία τῶν Συνδυασμῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα. 'Ελλ. Μαθ. 'Εταιρεία Ν.Σ. τόμ. 11, τεῦχ. 2 » 1970
76. Αἱ Φυσικομαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῆς ἁλώσεως (1453) μέχρι τοῦ 1830 » 1971

ΑΛΛΑΙ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

Κυριώτερα ἄρθρα δημοσιευθέντα εἰς τὸ Παγκόσμιον Λεξικὸν τῶν Ἔργων 'Επιστήμης - Τέχνης - Φιλοσοφίας:

77. 'Απολλώνιος ὁ Περγαῖος, 78. 'Αρχιμήδης, 79. Διόφαντος, 80. Ζήνων ὁ 'Ελεάτης, 81. Θέων ὁ 'Αλεξανδρεύς, 82. Θέων ὁ Σμυρναῖος, 83. 'Ιππίας ὁ 'Ηλεῖος, 84. Κλεομήδης, 85. Μέναιχμος, 86. Μενέλαος, 87. Μέτων ὁ 'Αθηναῖος, 88. Νικομήδης.

Κυριώτερα ἄρθρα δημοσιευθέντα εἰς τὸ 'Εγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν Ἥλιος ὑπὸ τοὺς τίτλους:

89. Γεωμετρία, 90. Δημόκριτος, 91. Διαφορικὸς Λογισμός, 92. 'Εντροπία, 93. Εὔδοξος, 94. Εὐκλείδης, 95. Ζήνων ὁ 'Ελεάτης, 96. Ἥρων, 97. Θαλῆς,

98. Θεαίτητος, 99. Πυθαγόρας, 100. Φυσική φιλοσοφία -'Εντροπία, 101. Φυσικά τοῦ 'Αριστοτέλους, 102. Αἱ φυσικαὶ ἐπιστῆμαι ἐν 'Ελλάδι (τόμος 'Ελλάς).

Κυριώτερα ἄρθρα δημοσιευθέντα εἰς τὴν Γενικὴν Παγκόσμιον 'Εγκυκλοπαιδείαν Πάπυρος - Λαρούς:

103. 'Αναξίμανδρος, 104. 'Αναξιμένης, 105. 'Απολλώνιος ὁ Περγαῖος, 106. 'Αρίσταρχος ὁ Σάμιος, 107. Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος, 108. 'Ιπποκράτης ὁ Χῖος, 109. Αἱ ἐπιστῆμαι ἐν 'Ελλάδι ἀπὸ τῶν ἀρχαιοτάτων χρόνων μέχρι τοῦ δεκάτου πέμπτου αἰῶνος (τόμος 'Ελλάς.)

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

εἰς τὸ μηνιαῖον περιοδικὸν τοῦ 'Ελληνικοῦ 'Ερυθροῦ Σταυροῦ, ὑπὸ τὸν τίτλον «'Ελληνικὸς 'Ερυθρὸς Σταυρὸς Νεότητος». 'Οκτώβριος - Μάϊος ἑκάστου ἔτους.

'Οκτώβριος 1958 - Μάϊος 1959

110. 'Αναξίμανδρος ὁ Μιλήσιος, 111. Θαλῆς ὁ Μιλήσιος, 112. Θαλῆς ὁ Μιλήσιος, αἱ ἀρχαὶ τῆς Μετεωρολογίας καὶ τῆς 'Αστρονομίας, 113. 'Αρχιμήδης ὁ Συρακούσιος, 114. 'Η ἀρχὴ τῆς ἀδρανείας, 'Αριστοτέλης -'Αρχιμήδης, 115. Πυθαγόρας - Κόνων, ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ταχύτητος τῶν σωμάτων, 116. Εὐπαλῖνος ὁ Μεγαρεύς, 117. Ἥρων ὁ 'Αλεξανδρεύς.

'Οκτώβριος 1959 - Μάϊος 1960

118. Εὔδοξος ὁ Κνίδιος, 119. 'Αναξαγόρας, 120. Πυθαγόρας, 121. 'Ερατοσθένης, 122. Λεύκιππος, 123. Δημόκριτος, 124. 'Αρίσταρχος ὁ Σάμιος, 125. Πολύκλειτος ὁ 'Αργεῖος. Τὸ θέατρον τῆς 'Επιδαύρου.

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΓΕΡΜΑΝΙΣΤΙ

Εἰς τὸ περιοδικὸν DAS ALTERTUM ('Η ἀρχαιότης), ἐκδιδόμενον ὑπὸ τῆς 'Ακαδημίας τῶν 'Επιστημῶν τοῦ Βερολίνου:

126. Über Thales von Milet (Περὶ τοῦ Θαλοῦ τοῦ Μιλησίου), τόμος 6, τεῦχος 2, 1960.
127. Über Euklid den Mathematiker (Περὶ τοῦ μαθηματικοῦ Εὐκλείδου), τόμ. 9, τεῦχος 2, 1963.
128. Rekonstruktion des griechischen Textes des Fehlenden Beweises der Aufgabe V19 des Diophantos von Alexandrien, Miscellanea critica, Teil I, B. G. Teubner, Leipzig 1964.
129. Diophantos der Mathematiker (Περὶ τοῦ μαθηματικοῦ Διοφάντου), τόμ. 19, τεῦχος 3, 1973.

Δημοσίευσις εἰς ἰταλικὸν περιοδικὸν HELIKON, Ἑλληνιστί.

130. Αἱ ἀρχαὶ τῶν Μαθηματικῶν καὶ αἱ μέθοδοι ἀποδείξεως. HELIKON, Rivista di traditione e cultura classica, dell'Università di Messina. Roma 1969 - 1970.

131. Τὸ ἑλληνικὸν πνεῦμα. Περιοδικόν, Ἑλληνικὸς Λόγος, Ἀθῆναι, Ἰαν. - Φεβρ. 1974.
132. Ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀσυμμετρίας ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου. Περ. Πλάτων, 1977.

Κριτικαὶ ἐργασιῶν Ἑλλήνων καὶ Ξένων ἐπιστημόνων δημοσιευθεῖσαι εἰς ἑλληνικὰ περιοδικὰ ἀπὸ τοῦ 1953.
Κριτικαὶ ἐργασιῶν ἐπὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν, ξένων ἐπιστημόνων, δημοσιευθεῖσαι εἰς τὸ μαθηματικὸν περιοδικὸν τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου Zentralblatt für Mathematik ἀπὸ τοῦ 1956.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΩΝ

133. Τὰ εἰς τὴν Ἀραβικὴν εὑρεθέντα τέσσαρα νέα βιβλία τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου. Περιοδικὸν Πλάτων 1976.
134. Ἀριθμητικοὶ ὁρισμοὶ τοῦ Εὐκλείδου, ἡ μουσικὴ ἀναλογία καὶ ὁ Ἰάμβλιχος. Περιοδ. Πλάτων 1978.
135. Λεσβιακά. Περιοδ. Ἑλληνικὸς Λόγος. Μάρτιος-Ἀπρίλιος 1978.
136. Ἀριστοτέλης, Ἀθῆναι 1978.
137. Ἀνάλεκτα, Ἀθῆναι 1978.
138. Reprints. Ὀκτὼ ἄρθρα δημοσιευθέντα εἰς τὴν Ἀγγλικὴν καὶ τὴν Γερμανικήν. Ἀθῆναι 1978.
139. Ἑλληνικὰ Μαθηματικά. Ἔκδοσις Ἑταιρείας τῶν Φίλων τοῦ Λαοῦ. Ἀθῆναι 1979.
140. Ὁ Ζυγὸς τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἀθῆναι 1979.
141. Εὐκλείδου, Περὶ Διαιρέσεων, Ἀθῆναι 1979.
142. Ἀριστάρχου Σαμίου, Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων Ἡλίου καὶ Σελήνης. Ἀθῆναι 1980, ἐπὶ τῇ 2300ῇ ἐπετείῳ τῆς γεννήσεώς του. (320 π.Χ.— 1980).
143. Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, Ἀθῆναι 1981
144. Τὰ καυστικὰ κάτοπτρα τοῦ Ἀρχιμήδους, Ἀθῆναι 1982.

Διάθεσις βιβλίων Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη

1) Εὐκλείδου Στοιχεῖα, τόμοι 4 Δρχ. 275
2) Διοφάντου 'Αριθμητικά, τόμ. 1 Δρχ. 120
'Οργανισμὸς 'Εκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων,
'Ιπποκράτους 44, ὄροφος 2.

✶

1) 'Αρχιμήδους ῞Απαντα, τόμοι 3, μέρη 4 Δρχ. 750
2) 'Απολλωνίου Κωνικά, τόμοι 4. Δρχ. 2000
3) 'Επιστημονικαὶ ἐργασίαι, τόμοι Α' καὶ Β'. Δρχ. 1000
Τεχνικὸν 'Επιμελητήριον 'Ελλάδος, ὁδὸς Καραγεώργη τῆς Σερβίας 4, ὄροφος 4.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 3
ΠΗΓΑΙ 5
ΠΡΟΚΛΟΣ 7
ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ 12
ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ — ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 14
ΕΠΙ ΤΟΥ Χ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ 25
ΕΥΔΟΞΟΣ 39
ΕΥΔΟΞΟΣ — ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 41
ΜΕΝΑΙΧΜΟΣ 54
ΣΤΕΥΣΙΠΠΟΣ, ΞΕΝΟΚΡΑΤΗΣ 60
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 61
ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ 63