ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΘΥΜΑΡΙΔΑΣ Ο ΠΑΡΙΟΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΥΜΑΡΙΔΕΙΟΝ ΕΠΑΝΘΗΜΑ

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Ἀνάτυπον
Ἐκ τῆς Ἐπετηρίδος τῆς Ἑταιρείας Κυκλαδικῶν Μελετῶν

ΤΟΜΟΣ Γ΄ 1963

ΤΥΠΟΙΣ Γ. Δ. ΚΥΠΡΑΙΟΥ
ΑΘΗΝΑΙ 1963

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΘΥΜΑΡΙΔΑΣ Ο ΠΑΡΙΟΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΥΜΑΡΙΔΕΙΟΝ ΕΠΑΝΘΗΜΑ

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὰ ἐν τῷ πρώτῳ τόμῳ 1961, τῆς Ἐπετηρίδος τῆς Ἑταιρείας Κυκλαδικῶν Μελετῶν δημοσιευθέντα περὶ τοῦ ἐκ τῆς νήσου Πάρου μεγάλου Πυθαγορείου μαθηματικοῦ Θυμαρίδου ἐκθέτομεν κατωτέρω τὰς μοναδικὰς πληροφορίας περὶ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐπανθήματός του, αἱ ὁποῖαι διεσώθησαν εἰς ἡμᾶς διὰ τοῦ Ἰαμβλίχου (in Nicomachi Arith. Introd., E. Pistelli) καὶ ἀκολούθως παρέχομεν εἰς σύγχρονον ὡραίαν διατύπωσιν, κατὰ τὰς σήμερον συνηθείας, τὸ Θυμαρίδειον ἐπάνθημα καὶ τὰ συναφῆ δύο προβλήματα, ὡς ἐκθέτει αὐτὰ ὁ διαπρεπὴς καὶ ἀριστοῦχος διδάκτωρ τῶν μαθηματικῶν Νικόλαος Δ. Νικολάου, ὁ λαμπρύνας διὰ τῆς διδασκαλίας του ἐπὶ σειρὰν ἐτῶν τὴν Βαρβάκειον Πρότυπον Σχολὴν τοῦ Διδασκαλείου Μέσης Ἐκπαιδεύσεως. (Παράρτημα τοῦ Δελτίου τῆς Ε.Μ.Ε. ἀριθ. 81, Σεπτέμβριος 1957).

Ι. ΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΙ ΤΟΥ ΙΑΜΒΛΙΧΟΥ

1. Μονὰς δὲ ἐστι ποσοῦ τὸ ἐλάχιστον ἢ ποσοῦ τὸ πρῶτον καὶ κοινὸν μέρος ἢ ἀρχὴ ποσοῦ· ὡς δὲ Θυμαρίδας περαίνουσα ποσότης, ἐπεὶ ἑκάστου καὶ ἀρχὴ καὶ τέλος καὶ πέρας καλεῖται, ἔστι δὲ ὧν καὶ τὸ μέσον, ὥσπερ ἀμέλει κύκλου καὶ σφαίρας (σελ. 11, 1-5).

2. Πρῶτος μὲν οὖν καὶ ἀσύνθετος ἀριθμός ἐστι περισσὸς ὃς ὑπὸ μόνης μονάδος πληρούντως μετρεῖται, οὐκέτι δὲ καὶ ὑπ' ἄλλου τινὸς μέρους καὶ ἐπὶ μίαν δὲ διάστασιν προβήσεται ὁ τοιοῦτος. διὰ τοῦτο δὲ αὐτὸν καὶ εὐθυμετρικόν τινες καλοῦσι, Θυμαρίδας δὲ καὶ εὐθυγραμμικόν· ἀπλατὴς γὰρ ἐν τῇ ἐκθέσει ἐφ' ἓν μόνον διιστάμενος. (σ. 26-27, 25-5).

3. Ἐντεῦθεν καὶ ἡ ἔφοδος τοῦ Θυμαριδείου ἐπανθήματος ἐλήφθη.

ὡρισμένων γὰρ ἢ ἀορίστων μερισαμένων ὡρισμένον τι καὶ ἑνὸς οὑτινοσοῦν τοῖς λοιποῖς καθ' ἕκαστον συντεθέντος, τὸ ἐκ πάντων ἀθροισθὲν πλῆθος ἐπὶ μὲν τριῶν μετὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὁρισθεῖσαν ποσότητα ὅλον τῷ συγκριθέντι προσνέμει τ' ἀφ' οὗ τὸ λεῖπον καθ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἀφαιρεθήσεται, ἐπὶ δὲ τεσσάρων τὸ ἥμισυ καὶ ἐπὶ πέντε τὸ τρίτον καὶ ἐπὶ ἓξ τὸ τέταρτον καὶ ἀεὶ ἀκολούθως, δυάδος κἀνταῦθα διαφορᾶς ἐπιφαινομένης πρός τε τὴν ποσότητα τῶν μεριζομένων καὶ πρὸς τὴν τοῦ μορίου κλῆσιν.... ὅτι δὲ οὐ παρέλκει τὸ ἐπάνθημα τοῦτο, ἀλλὰ καὶ πρὸς θεώρημα ἀριθμητικὸν ἔχει τὴν ἀναφορὰν καὶ ἐφόδου γλαφυρωτάτης πρὸς ἀνεύρεσιν αἴτιον ἡμῖν γίνεται, οὕτως ἂν θεωρήσαιμεν. προστετάχθω γὰρ ἡμῖν λόγου χάριν ἀριθμοὺς ἐκθέσθαι τέσσαρας, ὧν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου διπλάσιος ἔσται τρίτου ἅμα καὶ τετάρτου, καὶ πάλιν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου τριπλάσιος δευτέρου ἅμα καὶ τετάρτου, ὁμοίως τε ὁ αὐτὸς πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρτου τετραπλάσιος τῶν δύο μέσων δευτέρου ἅμα καὶ τρίτου, σύμπαντες δὲ ἅμα πενταπλάσιοι τῶν αὐτῶν δύο μέσων, ὡς ἂν καὶ τάξει φυσικῇ τῶν πολλαπλασίων ἀπὸ διπλασίου εἰς πενταπλάσιον ἡ προχώρησις εἴη. ἐφοδευτέον δὴ οὕτως. ἐπεὶ ἡμίσους χρεία διὰ τὸν διπλάσιον, λαμβάνω τὸν δύο ἀριθμόν· πρώτιστος γὰρ ἡμίσους παρεκτικὸς καὶ πρῶτος διπλάσιος. ἐπεὶ δὲ καὶ τρίτου διὰ τὸν τριπλάσιον λόγον, τρὶς ποιῶ τὰ δύο. ὁ δὴ γενόμενος ϛ' δι' ἀμφοτέρους τοὺς γεννήτορας πρῶτος ἔσται καὶ ἡμίσους καὶ τρίτου ἐπιδεκτικός. πάλιν δὲ ἐπεὶ τετάρτου μέρους δεῖ διὰ τὸν τετραπλάσιον λόγον, τετράκις τὰ ϛ' ποιῶ, καὶ ἐπεὶ πενταπλασίου χρεία, τὰ κδ' πεντάκις, ἅπερ γίνεται ρκ', καὶ ἔχω τοῦτον τὸν ἀριθμὸν κοινὸν ὄντα συγκεφαλαίωμα τῶν τεσσάρων ὅρων, ὃ δὴ καὶ θετέον εἶναι μεριστὸν εἰς τοὺς ἀναφανησομένους τέσσαρας ἀριθμούς, οἷς ἐμφανίσονται οἱ προειρημένοι λόγοι. διανεμητέον τὸν ρκ' τρόπῳ τούτῳ. ἐπεὶ οἱ πρῶτοι δύο ἀριθμοὶ τῶν λοιπῶν δύο διπλάσιοι ἔσονται, ἐστὶ δὲ διπλασίων πυθμὴν ὡς δύο πρὸς ἕν, ἅ ἐστιν ὁμοῦ τρία, δὶς ποιῶ τὸν ρκ', καὶ τὸν σμ' μερίζω παρὰ τὸν τρίτον. γίνεται δὴ μέρος ἓν τὰ π'. φημὶ δὴ τοσούτων εἶναι μονάδων τοὺς δύο πρώτους ἀριθμούς, οἵπερ διπλάσιοι ἔσονται τῶν λοιπῶν δύο, ὄντων δηλονότι καὶ αὐτῶν ἐν τεσσαράκοντα μονάσι. πάλιν ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος τριπλάσιοι ἔσονται τῶν λοιπῶν δευτέρου καὶ τετάρτου, ὡς τρία πρὸς ἕν, ἅ ἐστιν ὁμοῦ δ', ποιῶ τρὶς τὸν αὐτὸν ρκ' καὶ γίνεται τξ', ἃ μερίζω παρὰ τὸ τέταρτον, ἵν' ᾖ τὸ μέρος ϙ. φημὶ δὴ τοσούτων εἶναι μονάδων τὸν πρῶτον ἅμα καὶ τὸν τρίτον, τοὺς τριπλασίους τῶν λοιπῶν δευτέρου καὶ τετάρτου, ὄντων δηλονότι ἐν μονάσι λ'. πάλιν ἐπεὶ ὁ πρῶτος σὺν τῷ τετάρτῳ τετραπλάσιός ἐστι τῶν δύο μέ-

σων δευτέρου καὶ τρίτου, ὡς τέσσαρα πρὸς ἕν, ἅ ἐστιν ὁμοῦ πέντε, τετράκις ποιῶ τὰ ρκ', γίνεται υπ', μερίζω παρὰ τὸν ε' καὶ ἔχω μέρος ἓν τὰ ϟ ς'. τοσούτων οὖν φημι μονάδων εἶναι τὸν πρῶτον σὺν τῷ τετάρτῳ, οἵπερ τετραπλάσιοί εἰσι τῶν δύο μέσων ἐν μονάσιν ὄντων κδ'. κατὰ συνδυασμὸν οὖν εὑρημένων τῶν ἀριθμῶν, οὐδέπω δὲ καθ' ἑαυτοὺς διακεκριμένων, ἔφοδον ἡμῖν τῆς διακρίσεως παρέχει ἡ τοῦ Θυμαρίδου ἐπανθήματος γνῶσις. συγκεφαλαιωθέντων γὰρ ὁμοῦ τῶν κατὰ τὰς συζυγίας ἀριθμῶν, λέγω δὲ τοῦ π' καὶ ϟ καὶ ϟ ς', τὸ σύμπαν ἔσται σξς'. ἀφαιρῶ δὴ τὸν ἐξ ἀρχῆς μερισθέντα εἰς τοὺς τέσσαρας ὅρους τὸν ρκ, καὶ λείπεταί μοι ρμς', ὧν ἐπεὶ τέσσαρές εἰσιν οἱ μερισάμενοι τὸ ἥμισυ ἕξει ὃ κατὰ τὴν πρώτην συζυγίαν ἴδιον ὁ π'. ἔστι δὲ ἥμισυ ὁ ογ', καὶ τὰ λοιπὰ ἀπὸ τῶν π' τὰ ζ' ἔσται τοῦ δευτέρου ὅρου. ἐπειδὴ ἡ δευτέρα συζυγία περιέχει ἀριθμὸν τὸν ϟ', πάλιν ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ϟ' τὸν ογ', καὶ λείπεται ιζ', ἅ φημι εἶναι τοῦ τρίτου ὅρου. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ τρίτη συζυγία ϟς' ἐστὶ μονάδων, πάλιν ἀφαιρῶ τὰ ογ', καὶ τὰ λοιπὰ κγ' προσνέμω τῷ τετάρτῳ ὅρῳ. καὶ οὕτως γίνεταί μοι ὁ πρῶτος ὅρος τῶν ογ', ὡσανεὶ γνώμων τῆς τῶν συζυγιῶν εὑρέσεως, ὥστε καθ' ἕκαστον ἰδίᾳ διακεκριμένους τοὺς τέσσαρας εὑρεθῆναι ἐφεξῆς ὄντας ογ' ζ' ιζ' κγ', οἵπερ εἰσὶν ὁμοῦ ρκ' περιέχοντες τοὺς εἰρημένους λόγους τόν τε διπλάσιον καὶ πενταπλάσιον. πρώτιστοι μὲν οὖν οὗτοι καὶ πυθμενικοὶ ἀριθμοὶ ἐν τελείαις μονάσιν τοὺς εἰρημένους λόγους ἐπιδέχονται. εἰ δὲ καὶ μερίζειν θέλοιμεν τὴν μονάδα καὶ τοὺς κατ' αὐτὴν εἰδοποιηθέντας ἀριθμοὺς περισσοὺς εἰς δύο ἴσα, φανήσονται καὶ οἱ τῶν προκειμένων ἀριθμῶν ἡμίσεις τοὺς αὐτοὺς περιέχοντες λόγους ὅ τε λς' (″καὶ ὁ γ' (″καὶ ὁ η' (″καὶ ια' (″, ὧν καὶ τὰ συγκεφαλαιώματα ξ', ἅτινα ἡμίση ἔσται δηλονότι τοῦ προτέρου συγκεφαλαιώματος τοῦ ρκ'. εἰ δὲ καὶ πολλαπλασίους τῶν ἐξ ἀρχῆς ποιῶμεν καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασίου εἶδος, ἢ ἐπιμορίους, ἢ ἐπιμερεῖς, οἱ γενόμενοι πάντως τοὺς αὐτοὺς λόγους περιέξουσιν. ἵνα δὲ τεσσάρων ἄλλων ἀριθμῶν ἐκτεθέντων κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τοῖς προτέροις ὁμοταγεῖς κατὰ συνδυασμὸν τὸν προειρημένον τῶν ὁμοιοτάτων, ἀντὶ μὲν πολλαπλασίων γενικῶς ⟨ὑποπολλαπλάσιοι γίνωνται⟩, εἰδικῶς δὲ ἀντὶ μὲν διπλασίων ἡμιόλιοι, ἀντὶ δὲ τριπλασίων ἐπίτριτοι, ἀντὶ δὲ τετραπλασίων ἐπιτέταρτοι, λαμβάνω κατὰ τὴν αὐτὴν ἔφοδον, ἐπεὶ ἡμιολίου λόγου χρεία, ἀντὶ διπλασίου τὸν πρῶτον δυνάμενον ἥμισυ παρασχεῖν, τουτέστι τὸν δύο, ὅσπερ ἦν καὶ πρῶτος διπλάσιος ἐπὶ τῶν προτέρων ἀριθμῶν, καὶ πεντάκις αὐτὸν ποιῶ, διότι σύστημά ἐστι τὰ ε' τῶν τὸν ἡμιόλιον λόγον περιεχόντων τοῦ γ' καὶ β'. καὶ ἐπεὶ ἀντὶ τριπλασίου ἐπιτρίτου λόγου χρεία, πυθμὴν δὲ ἐπιτρίτων ὁ δ' πρὸς γ' ἐστίν, ὁμοῦ ζ', ποιῶ ταῦτα δεκάκις, γίνεται ο'. πάλιν ἐπεὶ χρεία ἐπιτετάρτου ἀντὶ τετραπλασίου, ἔστι δὲ πυθμὴν ἐπιτετάρτων ε' πρὸς δ', ἅ ἐστι ὁμοῦ θ', ἐνάκις ποιῶ τὸν ο' γίνεται, χλ'. οὗτος οὖν ἔσται ὁ συνέχων τοὺς περιεκτικοὺς τῶν εἰρημένων λόγων ἀριθμούς. καὶ ἐπεὶ ἡμιολίου λόγου χρεία, διότι τοὺς πρώτους δύο ἀριθμοὺς τῶν ὑστέρων δύο ἡμιολίους εἶναι δεήσει, ἔστι δὲ ὁ πρῶτος λόγος ἐν τοῖς ἡμιόλιον λόγον περιέχουσι πυθμέσιν δ γ', τρὶς ποιῶ τὸν χλ' καὶ ⟨γίνεται⟩ αωϞ', ἃ μερίζω παρὰ τὸν ε', ὅ ἐστι σύστημα τῶν πυθμενικῶν ἡμιόλιον, καὶ ἴσχω πέμπτον μέρος τὸν ⟨τοη'⟩ ἀριθμόν, ⟨ὅν⟩ φημι εἶναι πρώτην συζυγίαν τῶν ἀναφανησομένων πρώτου καὶ δευτέρου ἀριθμοῦ, οἳ ἔσονται ἐν τῇ ἐκθέσει ἡμιόλιοι τῶν ὑστέρων δύο. πάλιν ὅτι ἐπιτρίτου λόγου χρεία, διότι τὸν πρῶτον καὶ τὸν τρίτον ἀριθμὸν συνάμφω ἐπιτρίτους χρὴ εἶναι δευτέρου καὶ τετάρτου, ἔστι δὲ πρόλογος ἐν ἐπιτρίτῳ πυθμέσιν δ δ', τετράκις ποιῶ τὸν χλ', γίνεται, ͵βφκ', ἃ μερίζω παρὰ τὸ συναμφότερον τῶν τὸν ἐπίτριτον λόγον περιεχόντων πυθμένων, τουτέστι τὸν ζ', καὶ ἴσχω μέρος ζ^{ον} τὸν τξ' ἀριθμόν, ὃς γίνεταί μοι δευτέρας συζυγίας τῶν ἀναφανησομένων πρώτου καὶ τρίτου ἀριθμοῦ, οἳ συνάμφω ἐπίτριτοι ἔσονται δευτέρου καὶ τετάρτου. ὁμοίως διότι ἐπιτετάρτου λόγου χρεία, ἵνα πρῶτος καὶ τέταρτος συνάμφω τῶν δύο μέσων ἐπιτέταρτοι ὦσιν, ἔστι δὲ πρόλογος ἐν ἐπιτετάρτῳ πυθμέσι ⟨δ ε'⟩, ποιῶ πεντάκις τὸν χλ', γίνεται γρν', ἃ μερίζω παρὰ τὸ συναμφότερον τῶν τὸν ἐπιτέταρτον λόγον περιεχόντων πυθμένων, τουτέστιν θ', καὶ ἴσχω μέρος θ^{ον} τν', ἃ δὴ λέγω τρίτην εἶναι συζυγίαν πρώτου καὶ τετάρτου ἀριθμοῦ, οἳ συνάμφω ἐπιτέταρτοι γενήσονται δευτέρου ἅμα καὶ τρίτου. ἵνα δὲ καὶ διακρίνω εἰς τοὺς ζητουμένους τέσσαρας ἀριθμοὺς τὰς τρεῖς συζυγίας, χρήσομαι τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ τοῦ Θυμαριδείου ἐπανθήματος. συγκεφαλαιῶ γὰρ πάλιν τοὺς τῶν συζυγιῶν ἀριθμοὺς τόν τε τοη' καὶ τὸν τξ' καὶ τὸν τν', ἵν' ᾖ μοι τὸ ἀθροισθὲν πλῆθος ͵απη', καὶ πάλιν ἀφαιρῶ τὸ ἐξ ἀρχῆς συγκεφαλαίωμα χλ'. καὶ ἐπειδὴ τέσσαρές εἰσιν οἱ ζητούμενοι ὅροι, τὸ ἥμισυ τοῦ λειπομένου ἀριθμοῦ τοῦ υνη' τὰ σκθ' προσνέμω τῷ πρώτῳ ὅρῳ τῶν ζητουμένων, ὃς πρὸς τοὺς λοιποὺς τρεῖς τὴν σύγκρισιν ἕξει. ἀπὸ δὲ τοη', ὅσπερ ἦν τῆς πρώτης συζυγίας ἀριθμός, ἂν ἀφέλω τὰ σκθ', λείπεταί μοι ρμθ'. τοῦτον οὖν φημι τὸν δεύτερον ἐν τῇ ἐκθέσει ἀριθμὸν εἶναι. πάλιν ἐπεὶ ἡ δευτέρα συζυγία ἀριθμός ἐστιν ὁ τῶν τξ', ἀφαιρῶ τὸν αὐτὸν σκθ' καὶ λείπεταί μοι ρλα', ὅν φημι εἶναι τρίτον ὅρον ἐν τῇ ἐκθέσει. ὁμοίως ἐπεὶ τρίτης συζυγίας ἐστὶ τὰ τν', ἀφέλω σκθ', λείπω ρκα' καὶ ἴσχω τὸν τέταρτον. ὁμοῦ οὖν τῶν τεσσάρων ὅρων τάξει τούτων σκθ' ρμθ' ρλα' ρκα' ὁ μὲν πρῶτος καὶ δεύτερος συνάμφω ἔσονται *τρίτου τε καὶ τετάρτου ἡμιόλιοι, πρῶτος δὲ ἅμα καὶ τρίτος δευτέρου καὶ τετάρτου ἐπίτριτοι, πρῶτος δὲ πάλιν καὶ τέταρτος συνάμφω δευτέρου τε καὶ τρίτου ἐπιτέταρτοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Ἐντεῦθεν ἐλήφθη καὶ ἡ μέθοδος τοῦ ἐπανθήματος (κανόνος) τοῦ Θυμαρίδου. Διότι, ἀφοῦ δοθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀγνώστων καὶ σχηματισθοῦν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ἑνὸς τυχόντος ἀγνώστου μεθ' ἑκάστου τῶν λοιπῶν, ὅταν μὲν οἱ ἄγνωστοι εἶναι τρεῖς, ὁ τυχὼν ληφθεὶς ἄγνωστος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων μεῖον τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀγνώστων, ὅταν δὲ οἱ ἄγνωστοι εἶναι τέσσαρες θὰ διαιρέσωμεν τὴν ληφθεῖσαν διαφορὰν διὰ δύο, ὅταν εἶναι πέντε θὰ διαιρέσωμεν διὰ τρία, ὅταν εἶναι ἕξ θὰ διαιρέσωμεν διὰ τέσσαρα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἀναφαινομένου καὶ ἐνταῦθα ὅτι ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ πλήθους τῶν ἀγνώστων πρέπει νὰ ἀφαιρῶμεν τὸν 2 καὶ διὰ τοῦ ὑπολοίπου νὰ γίνεται ἡ διαίρεσις.... Ὅτι δὲ δὲν παρέλκει τὸ ἐπάνθημα τοῦτο ἀλλ' ἀναφέρεται καὶ εἰς ἀριθμητικὸν θεώρημα καὶ γίνεται αἴτιον εἰς ἡμᾶς νὰ ἀνεύρωμεν γλαφυρωτάτην μέθοδον, τὸ ἐρευνῶμεν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἄς ὑποθέσωμεν λόγου χάριν, ὅτι ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τέσσαρας ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου εἶναι διπλάσιος τοῦ τρίτου μετὰ τοῦ τετάρτου, καὶ πάλιν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου εἶναι τριπλάσιος τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τετάρτου, καὶ ὁμοίως ὁ αὐτὸς πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρτου εἶναι τετραπλάσιος τῶν δύο μέσων, δηλ. τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τρίτου, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν νὰ εἶναι πενταπλάσιον τῶν αὐτῶν δύο μέσων δηλ. τοῦ δευτέρου μετά τοῦ τρίτου, ὡς ἐὰν ἡ προχώρησις κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν πολλαπλασίων ἀπὸ τοῦ διπλασίου εἰς τὸ πενταπλάσιον νὰ ἀκολουθῇ φυσικήν τινα τάξιν. Πρὸς τοῦτο δέον νὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν ἑξῆς μέθοδον. Ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ ὁ ἥμισυς ἀριθμός, ἐπειδὴ ἐδόθη ὁ διπλάσιος, λαμβάνω τὸν ἀριθμὸν δύο· διότι ἐκ τῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ πρώτιστος ὁ παρέχων ἡμίση καὶ ὁ πρῶτος διπλάσιος. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ τὸ ἓν τρίτον, ἐπειδὴ ἐδόθη τὸ τριπλάσιον, τριπλασιάζω τὸν δοθέντα δύο. Ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 6 ἕνεκα τῶν παραγόντων αὐτοῦ 2 καὶ 3 εἶναι ὁ πρῶτος ἐκ τῶν ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐπιδεκτικὸς εἰς τὸ νὰ δίδῃ ἥμισυ καὶ ἓν τρίτον. Πάλιν δέ, ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ τὸ ἓν τέταρτον, ἐπειδὴ ἐδόθη τὸ τετραπλάσιον, τετραπλασιάζω τὸν ἕξ, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ τὸ πενταπλάσιον λαμβάνω τὰ 24 πεντάκις, τὰ ὁποῖα δίδουν 120 καὶ ἔχω τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀγνώστων, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ μερίσω εἰς τοὺς ἀναφανησομένους τέσσαρας ἀριθμούς, εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἐμφανισθοῦν οἱ προειρημένοι λόγοι. Ὁ 120 δέον νὰ διαμοιρασθῇ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἐπειδὴ οἱ πρῶτοι δύο ἀριθμοὶ εἶναι διπλάσιοι τῶν ἄλλων δύο, ὑπάρχει δὲ πυθμὴν τῶν διπλασίων ὡς τὸ δύο πρὸς ἓν (σημ. Καὶ ὁ 10 εἶναι διπλάσιος τοῦ 5, ἀλλὰ ὁ μικρότατος πάντων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι διπλάσιοι ἄλλου εἶναι ὁ 2, διπλάσιος ὢν τοῦ 1. Ὁ 2 λέγεται πυθμὴν τῶν διπλασίων. Ὁ 3 εἶναι πυθμὴν τῶν τριπλασίων, κλπ), τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 3, διπλασιάζω τὸν 120 καὶ τὸν 240 διαιρῶ διὰ 3. Λαμβάνω λοιπὸν πηλίκον 80. Λέγω, ὅτι τόσας μονάδας ἔχουν οἱ δύο πρῶτοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι θὰ εἶναι διπλάσιοι τῶν δύο ἄλλων, οἱ ὁποῖοι συνεπῶς ἔχουν ἄθροισμα 40 μονάδας. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος θὰ εἶναι τριπλάσιοι τῶν λοιπῶν, δηλ. τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τετάρτου, εὑρίσκονται δηλ. τὰ ἀθροίσματα ταῦτα εἰς σχέσιν ὡς 3 πρὸς 1, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα 4, τριπλασιάζω τὸν αὐτὸν 120 καὶ λαμβάνω 360 τὸν ὁποῖον διαιρῶ διὰ τοῦ 4, ὁπότε τὸ πηλίκον εἶναι 90. Λέγω, ὅτι τόσας μονάδας ἔχουν ὁμοῦ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος καὶ ὅτι συνεπῶς οὗτοι ἀφοῦ εἶναι τριπλάσιοι τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τετάρτου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων τούτων θὰ εἶναι 30. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρτου εἶναι τετραπλάσιοι τῶν δύο μέσων, δηλ. τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου, εὑρίσκονται δηλ. τὰ ἀθροίσματα ταῦτα εἰς σχέσιν 4 πρὸς 1, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα 5, τετραπλασιάζω τὸν 120 καὶ λαμβάνω 480, τὸν ὁποῖον διαιρῶ διὰ 5 καὶ λαμβάνω πηλίκον 96. Τόσας μονάδας ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου μετὰ τοῦ τετάρτου, τὸ ὁποῖον εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μέσων, οἱ ὁποῖοι συνεπῶς θὰ ἔχουν ἄθροισμα 24. Ἐν ᾧ λοιπὸν ἔχομεν εὕρει ἀθροίσματα τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν, κατὰ συνδυασμόν, χωρὶς ὅμως νὰ ἔχωμεν εὕρει τοὺς ἀριθμοὺς κεχωρισμένως, κατορθώνομεν νὰ λάβωμεν ἕκαστον ἀριθμὸν κεχωρισμένως, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν μέθοδον τοῦ Θυμαρίδου. Διότι, ἀφοῦ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα, ἐννοῶ δὲ τὸ 80 καὶ 90 καὶ 96 τὸ ὅλον θὰ εἶναι 266. Ἀφαιρῶ λοιπὸν τὸν ἐξ ἀρχῆς μερισθέντα εἰς τοὺς τέσσαρας ὅρους τὸν 120, καὶ μοῦ μένουν 146, ἐκ τῶν ὁποίων ἐπειδὴ τέσσαρες εἶναι οἱ ἄγνωστοι τὸ ἥμισυ θὰ ἔχῃ ὁ ἄγνωστος ἐκ τοῦ πρώτου μερικοῦ ἀθροίσματος ὁ 80. Εἶναι δὲ τὸ ἥμισυ (τοῦ 146) ὁ 73 καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὅταν ἀφαιρεθῇ τοῦτο ἀπὸ τοῦ 80, τὰ 7 θὰ εἶναι ὁ δεύτερος ἄγνωστος. Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μερικὸν ἄθροισμα περιέχει τὸν ἀριθμὸν 90, πάλιν ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ 90 τὸν 73 καὶ λαμβάνω 17, τὰ ὁποῖα λέγω ὅτι εἶναι ὁ τρίτος ἄγνωστος. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ τρίτον μερικὸν ἄθροισμα εἶναι 96, πάλιν ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ 96 τὸν 73 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 23 θὰ εἶναι ὁ τέταρτος ἄγνωστος καὶ τοιουτοτρόπως ὁ πρῶτος ἄγνωστος 73 καθίσταται ὡς ἓν εἶδος γνώμονος τῆς εὑρέσεως τῶν ἀγνώστων ἐκ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων, ὥστε νὰ εὑρεθοῦν δηλαδὴ κεχωρισμένως οἱ τέσσαρες ἄγνωστοι διαδοχικῶς οἱ 73, 7, 17, 23, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 120 καὶ περιέχουν τοὺς εἰρημένους λόγους καὶ τὸν διπλάσιον καὶ τὸν πενταπλάσιον. Οὗτοι λοιπὸν πρώτιστοι καὶ πυθμενικοὶ ἀριθμοὶ ἐπιδέχονται τοὺς εἰρημένους λόγους μὲ ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἐκπεφρασμένους. Ἐὰν δὲ τυχὸν θέλωμεν νὰ μερίσωμεν τὴν μονάδα καὶ τοὺς ἐπὶ τῇ βάσει ταύτης ληφθησομένους περιττοὺς ἀριθμοὺς εἰς δύο ἴσα μέρη, θὰ φανοῦν καὶ τὰ ἡμίση τῶν προκειμένων ἀριθμῶν περιέχοντα τοὺς αὐτοὺς λόγους, καὶ τὸν $36\frac{1}{2}$ καὶ τὸν $3\frac{1}{2}$ καὶ τὸν $8\frac{1}{2}$ καὶ τὸν $11\frac{1}{2}$, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 60, τὸ ὁποῖον εἶναι ἥμισυ τοῦ 120, ὅπερ ἦτο τὸ προηγούμενον ἄθροισμα τῶν (τεσσάρων) ἀγνώστων. Ἐὰν δὲ κάμωμεν τοὺς ἀριθμοὺς πολλαπλασίους τῶν ἀρχικῶς ληφθέντων, οἱουδήποτε εἴδους, ἢ ἐπιμορίους ἢ ἐπιμερεῖς (τῆς μορφῆς $\frac{\nu+1}{\nu}$ ἢ $\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}$ ἀντιστοίχως) οἱ προκύπτοντες θὰ περιέχουν πάντως τοὺς αὐτοὺς λόγους. Ἵνα δὲ ἀφοῦ ζητήσωμεν τέσσαρας ἄλλους ἀριθμοὺς κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τοὺς προηγουμένους ὁμοταγεῖς κατὰ τὸν προειρημένον συνδυασμὸν τῶν ὁμοιοτάτων, ἀντὶ μὲν πολλαπλασίων γενικῶς λάβωμεν ὑποπολλαπλασίους (δηλ. κλασματικοὺς) εἰδικῶς δὲ ἀντὶ μὲν διπλασίων λάβωμεν $^3/_2$ ἀντὶ δὲ τριπλασίων $^4/_3$, ἀντὶ δὲ τετραπλασίων $^5/_4$ θὰ λάβω κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον, ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη τριῶν δευτέρων ($^3/_2$), ἀντὶ διπλασίου τὸν πρῶτον, ὅστις δύναται νὰ δώσῃ ἥμισυ, τουτέστι τὸν 2, ὁ ὁποῖος ἦτο καὶ πρῶτος διπλάσιος εἰς τοὺς προηγουμένους ἀριθμούς, καὶ πενταπλασιάζω αὐτόν, διότι ὁ 5 εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ 3 καὶ τοῦ 2, οἵτινες περιέχουν τὸν ἡμιόλιον λόγον. Καὶ ἐπειδὴ ἀντὶ τριπλασίου εἶναι ἀνάγκη ἐπιτρίτου ($^4/_3$) λόγου, οἱ μικρότεροι δὲ ἀριθμοὶ τοῦ λόγου τούτου (ὁ πυθμὴν) εἶναι ὁ 4 πρὸς τὸν 3, μὲ ἄθροισμα 7, δεκαπλασιάζω ταῦτα καὶ ἔχω 70. Πάλιν ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη ἐπιτετάρτου ($^5/_4$) ἀντὶ τετραπλασίου, εἶναι δὲ οἱ μικρότεροι ἀριθμοὶ τοῦ λόγου τούτου (ὁ πυθμὴν) ὁ 5 πρὸς τὸν 4, μὲ ἄθροισμα 9, ἐννεαπλασιάζω τὸν 70, καὶ ἔχω 630. Οὗτος λοιπὸν εἶναι ὁ συνέχων τοὺς περιεκτικοὺς ἀριθμοὺς τῶν εἰρημένων λόγων [δηλ. τὸ διπλάσιον τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν ἀθροισμάτων τῶν ὅρων τῶν λόγων 2, (3+2), (4+3), (5+4)]. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη ἡμιολίου λόγου, διότι οἱ πρῶτοι δύο ἀριθμοὶ θὰ εἶναι ἀνάγκη τῶν ἑπομένων δύο νὰ εἶναι ἡμιόλιοι, εἶναι δὲ πρῶτος μικρότερος ὅρος τοῦ ἡμιολίου λόγου (τοῦ $^3/_2$) ὁ 3, τριπλασιάζω τὸν 630 καὶ λαμβάνω 1890, τὰ ὁποῖα διαιρῶ διὰ 5, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμιολίου λόγου (τοῦ 3:2) καὶ λαμβάνω ὡς πέμπτον μέρος τὸν ἀριθμὸν 378, ὁ ὁποῖος, λέγω ὅτι εἶναι τὸ πρῶτον μερικὸν ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου τῶν ζητουμένων ἀγνώστων, οἱ ὁποῖοι ζητοῦνται κατὰ τὴν ἐκφώνησιν νὰ εἶναι ἡμιόλιοι τῶν ἄλλων δύο (τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου). Πάλιν ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη ἐπιτρίτου λόγου (δηλ. $^4/_3$), διότι τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι ἐπίτριτον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, εἶναι δὲ πρῶτος ὅρος μικρότατος τοῦ ἐπιτρίτου λόγου ὁ 4, τετραπλασιάζω τὸν 630 καὶ λαμβάνω 2520, τὰ ὁποῖα διαιρῶ διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μικροτάτων ὅρων τοῦ ἐπιτρίτου λόγου τουτέστι τοῦ 7, καὶ θὰ ἔχω ὡς ἕβδομον μέρος τὸν ἀριθμὸν 260, ὅστις εἶναι τὸ δεύτερον μερικὸν ἄθροισμα τῶν ζητουμένων ἀγνώστων πρώτου καὶ τρίτου, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὰ $^4/_3$ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου. Ὁμοίως ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη ἐπιτετάρτου λόγου ($^5/_4$), ἵνα τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ τετάρτου εἶναι τὰ $^5/_4$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μέσων (δευτέρου καὶ τρίτου), εἶναι δὲ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ λόγου $^5/_4$ ὁ 5, πενταπλασιάζω τὸν 630 καὶ λαμβάνω 3150, τὰ ὁποῖα διαιρῶ διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μικροτάτων ἀριθμῶν τῶν ἐκφραζόντων τὸν ἐπιτέταρτον λόγον, δηλ. διὰ τοῦ 9, καὶ θὰ ἔχω ἔνατον μέρος τὸν 350, τὰ ὁποῖα λέγω ὅτι εἶναι τὸ τρίτον μερικὸν ἄθροισμα τῶν ζητουμένων ἀγνώστων τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τετάρτου ἀριθμοῦ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι τὰ $^5/_4$ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου. Ἵνα δὲ καὶ ἐκ τῶν τριῶν μερικῶν ἀθροισμάτων λάβω κεχωρισμένως ἕκαστον τῶν τεσσάρων ἀγνώστων, θὰ χρησιμοποιήσω τὴν αὐτὴν μέθοδον τοῦ Θυμαριδείου ἐπανθήματος. Διότι προσθέτω πάλιν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ἤτοι τὸν 378 καὶ τὸν 360 καὶ τὸν 350, διὰ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμά των 1088 καὶ πάλιν ἀφαιρῶ τὸ ἀρχικὸν ἄθροισμα τῶν ἀγνώστων τὸ 630. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ζητούμενοι ἄγνωστοι εἶναι τέσσαρες, τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς 458 δηλ. τὸ 229 θὰ εἶναι ὁ πρῶτος τῶν ζητουμένων ἀγνώστων, ὁ ὁποῖος προσετέθη εἰς ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριῶν ἀγνώστων. Ἀπὸ δὲ τοῦ 378, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ πρῶτον μερικὸν ἄθροισμα, ἂν ἀφαιρέσω τὰ 229 θὰ λάβω 149. Λέγω ὅτι οὗτος εἶναι ὁ δεύτερος ζητούμενος ἄγνωστος. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μερικὸν ἄθροισμα εἶναι ὁ ἀριθμὸς 360, ἀφαιρῶ τὸν αὐτὸν 229 καὶ θὰ λάβω 131, ὁ ὁποῖος, λέγω, ὅτι εἶναι ὁ τρίτος ζητούμενος ἄγνωστος. Ὁμοίως ἐπειδὴ τὸ τρίτον μερικὸν ἄθροισμα εἶναι τὰ 350, ἀφαιρῶ 229, λαμβάνω ὑπόλοιπον 121 καὶ θὰ ἔχω τὸν τέταρτον ἄγνωστον. Θεωροῦντες τοὺς τέσσαρας ὅρους τούτους κατὰ σειρὰν 229, 149, 131, 121 βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ δευτέρου εἶναι τὰ $^3/_2$ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου, τὸ ἄθροισμα δὲ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου εἶναι τά $^4/_3$ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, πάλιν δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου εἶναι τὰ $^5/_4$ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II. Ἡ διατύπωσις τοῦ Νικ. Δ. Νικολάου:

..... 2) «Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $x + x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{\nu-1} = S$, (1), $x + x_1 = S_1$, $x + x_2 = S_2$, $x + x_3 = S_3$, ... $x + x_{\nu-1} = S_{\nu-1}$, (2).

Τὸ Θυμαρίδειον τοῦτο σύστημα λύομεν ὡς ἑξῆς. Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $(\nu - 1)x + (x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{\nu-1}) = S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_{\nu-1}$, (3).

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν (1) εἶναι $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{\nu-1} = S - x$ ἡ (3) γίνεται $(\nu - 1)x + S - x = S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_{\nu-1}$. Ἐκ δὲ ταύτης εἶναι

$$x = \frac{(S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_{\nu-1}) - S}{\nu - 2}.$$

Εὑρισκομένου οὕτω τοῦ x ὑπολογίζονται οἱ λοιποὶ ἄγνωστοι x_1, $x_2 \ldots\ldots x_{\nu-1}$ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2).

3) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκέραιαι ρίζαι τοῦ συστήματος:

$$x + y = 2(z + w) \qquad (1)$$
$$x + z = 3(y + w) \qquad (2)$$
$$x + w = 4(y + z) \qquad (3)$$

Λύσις. Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸ σύστημα τοῦτο τὴν μορφὴν τοῦ Θυμαριδείου ἐπανθήματος ἐργαζόμενοι ὡς ἑξῆς·

Θέτομεν $x + y + z + w = \varkappa$, (4), καὶ παρατηροῦμεν ὅτι δι' ἀκεραίας τιμὰς τῶν x, y, z, w ὁ $\varkappa$ ὀφείλει νὰ εἶναι ἀκέραιος. Ἂν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (4) ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς τὰς (1), (2), (3), εὑρίσκομεν $z + w = \frac{1}{3}\varkappa$, $y + w = \frac{1}{4}\varkappa$ καὶ $y + z = \frac{1}{5}\varkappa$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (1), (2), (3) εὑρίσκομεν $x + y = \frac{2}{3}\varkappa$, $x + z = \frac{3}{4}\varkappa$ καὶ $x + w = \frac{4}{5}\varkappa$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ $\frac{2}{3}\varkappa$, $\frac{3}{4}\varkappa$, $\frac{4}{5}\varkappa$ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι ὁ $\varkappa$ θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 60 (τὸ ἐλ. κ πολ.

τοῦ 3, 4, 5) ἤτοι $\varkappa = 60\ \lambda$ καὶ λ ἀκέραιος. Κατὰ ταῦτα ἀναγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος $x + y + z + w = 60\ \lambda$, $x + y = \frac{2}{3}.60\ \lambda = 40\ \lambda$, $x + z = 45\ \lambda$, $x + w = 48\ \lambda$. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο ἔχει τὴν μορφὴν τοῦ Θυμαριδείου ἐπανθήματος θὰ εἶναι

$$x = \frac{40 + 45 + 48 - 60}{2}\ .\ \lambda.$$ Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 2 μὴ διαιρῶν τὸν ἀριθμητὴν εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτόν. Καὶ ἐπειδὴ ἀπαιτεῖται νὰ εἶναι ὁ x ἀκέραιος πρέπει ὁ λ νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2, ἤτοι $\lambda = 2\ \rho$, ὅπου ρ ἀκέραιος. Θὰ εἶναι λοιπὸν $x = (40 + 45 + 48 - 60)\ \rho = 73\ \rho$, $x + y = 80\ \rho$, $x + z = 90\ \rho$, $x + w = 96\ \rho$.

Τὸ σύστημα λοιπὸν ἀληθεύει διὰ $x = 73\ \rho$, $y = 7\ \rho$, $z = 17\ \rho$, $w = 23\ \rho$ διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ρ. Οὕτω διὰ $\rho = 1$ εἶναι $x = 73$, $y = 7$, $z = 17$, $w = 23$ κλπ.

4) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκέραιαι ρίζαι τοῦ συστήματος

$$x + y = \frac{3}{2}(z + w) \qquad (1)$$
$$x + z = \frac{4}{3}(y + w) \qquad (2)$$
$$x + w = \frac{5}{4}(y + z) \qquad (3)$$

Λύσις. Θέτομεν $x + y + z + w = \varkappa$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ κ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος. Ὡς δὲ προηγουμένως (§ 3) εὑρίσκομεν ὅτι $x + y = \frac{3}{5}\varkappa$, $x + z = \frac{4}{7}\varkappa$, $x + w = \frac{5}{9}\varkappa$.

Ἐπειδὴ δι' ἀκεραίας ρίζας οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{5}\varkappa$, $\frac{4}{7}\varkappa$, $\frac{5}{9}\varkappa$ εἶναι ἀκέραιοι, ὁ κ πρέπει νὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν 5, 7, 9 ἤτοι $\varkappa = 5.\ 7.\ 9.\ \lambda$ (5. 7. 9 Ε. Κ. Π.) καὶ λ ἀκέραιος. Τὸ ζήτημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος :

$x + y + z + w = 315\ \lambda$, $x + y = 189\ \lambda$, $x + z = 180\ \lambda$, $x + w = 175\ \lambda$, ὅπερ ἔχει τὴν μορφὴν τοῦ Θυμαριδείου ἐπανθήματος (§ 2) καθ' ὃ ἔχομεν

$$x = \frac{189 + 180 + 175 - 315}{2} . \lambda$$

Ὡς δὲ προηγουμένως, διὰ νὰ εἶναι ὁ x ἀκέραιος πρέπει ὁ $\lambda = 2\,\rho$, ὅπου ρ ἀκέραιος. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ὅτι

$$x = (189 + 180 + 175 - 315)\,\rho = 229\,\rho,$$

$x + y = 189.\,2\,\rho = 378\,\rho$. $y = (378 - 229)\,\rho = 149\,\rho$, $z = 131\,\rho$, $w = 121\,\rho$.

Τὸ δοθὲν λοιπὸν σύστημα ἔχει ἀκεραίας ρίζας $x = 229\,\rho$, $y = 149\,\rho$, $z = 131\,\rho$, $w = 121\,\rho$, διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ρ. Οὕτω διὰ $\rho = 1$ εἶναι

$x = 229$, $y = 149$, $z = 131$, $w = 121$. Διὰ $\rho = 2$ εἶναι $x = 458$, $y = 298$, $z = 262$, $w = 242$ κτλ. Νικ. Δ. Νικολάου».

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ