ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Περὶ τοῦ μαθηματικοῦ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ ΕΚ ΤΟΥ ΓΕΡΜΑΝΙΚΟΥ
ΜΕΤ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ & ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΡΟΡΗ 11, (πάροδος Αἰόλου) ΤΗΛ. 228.993

ΑΘΗΝΑΙ, 1963

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ ἐν μεταφράσει ἐκ τῆς γερμανικῆς ἐκδιδόμενον ἄρθρον «περὶ τοῦ μαθηματικοῦ Εὐκλείδου» ἐδημοσιεύθη εἰς τὸ τριμηνιαῖον περιοδικὸν τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου «DAS ALTERTUM» (Η ΑΡΧΑΙΟΤΗΣ) Τεῦχος 2ον, Ἰούνιος 1963. Ἀφορμὴν εἰς τὴν δημοσίευσιν τοῦ ἄρθρου αὐτοῦ παρέσχεν ἡ κατόπιν πρωτοβουλίας καὶ μεσολαβήσεως τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου ὑπογραφεῖσα κατὰ τὸ ἔτος 1961 σύμβασις μεταξὺ τοῦ Ἐκδοτικοῦ Οἴκου τῆς Λιψίας B. G. Τόιμπνερ καὶ ἐμοῦ πρὸς ἔκδοσιν ἐν Γερμανίᾳ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τῶν ὁποίων ἡ τελευταία ἔκδοσις εἶχε γίνει κατὰ τὰ ἔτη 1883 — 1888. Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἄρθρου ἐθεωρήθη ἐπιβεβλημένον ὅπως γίνῃ ἀπάντησις δι' ὀλίγων εἰς ἐκείνους οἱ ὁποῖοι προσπαθοῦν συστηματικῶς ἀπό τινων δεκαετηρίδων νὰ ἐκτοπίσουν ἐκ τοῦ ἐπιστημονικοῦ οἰκοδομήματος τὴν Λογικὴν τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (τὰ βασικὰ δηλ. στοιχεῖα τῶν μαθηματικῶν). Τὸ ἐπιχείρημα διὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῆς Λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους εἶναι ὅτι αἱ λέξεις μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου χάνουν τὴν σημασίαν των καὶ ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἀνάγκη νὰ δημιουργηθῇ εἰδικὸς μαθηματικὸς συμβολισμὸς διὰ τοῦ ὁποίου νὰ ἐκφράζωνται οἱ νόμοι τῆς Λογικῆς. Τὸ ἀξίωμα ἐπὶ παραδείγματι, τῆς Λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους, τὸ περιεχόμενον καὶ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου.

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα

κινδυνεύει νὰ χάσῃ τὴν σημασίαν του καὶ δέον νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ συμβολισμοῦ :

$$\text{Ἐὰν } A = B \text{ καὶ } \Gamma = B, \longrightarrow A = \Gamma,$$

ὅπου δὲν ἀναφέρονται τὰ ὀνόματα Ἀριστοτέλης καὶ Εὐκλείδης.

Ἕτερον, ἐξ ἄλλου ἐπιχείρημα διὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ὅτι ταῦτα παρουσιάζουν δῆθεν μερικὰ κενὰ εἰς τὴν διατύπωσιν ὁρισμῶν τινων καὶ ἀξιωμάτων. Τὰ κενὰ αὐτὰ ἐπιχειρεῖ νὰ πληρώσῃ ὁ Δαυῒδ Χίλμπερτ (David Hilbert 1862 — 1943, ἐν Γερμανίᾳ), δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ εὐκλειδείου ὁρισμοῦ τοῦ σημείου καθ' ὃν «σημεῖον εἶναι πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος» διὰ τῆς λέξεως π ρ ά γ μ α τ α, χωρὶς ὅμως νὰ ἑρμηνεύεται τί νοεῖται ὡς πράγματα εἰς τὴν γεωμετρίαν. Οὕτω ὁ Δαυῒδ Χίλμπερτ καθώρισεν ἓν σύστημα ὁρισμῶν καὶ ἀξιωμάτων, τὸ ὁποῖον ὑπὸ τῶν εἰδικῶν ἐχαρακτηρίσθη ὡς μορφοκρατικὸν (Formalismus). Ὁ ἴδιος ὁ Χίλμπερτ λέγει συναφῶς τὰ ἑξῆς·

«Θεωροῦμεν τρία διάφορα συστήματα πραγμάτων : Τὰ πράγματα τοῦ πρώτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν σημεῖα καὶ τὰ παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων A, B, C.... Τὰ πράγματα τοῦ δευτέρου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν εὐθείας καὶ τὰ παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων a, b, c.... Τὰ πράγματα τοῦ τρίτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν ἐπίπεδα καὶ τὰ παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ,..... Τὰ σημεῖα τὰ καλοῦμεν ἐπίσης στοιχεῖα τῆς γραμμικῆς γεωμετρίας, τὰ σημεῖα καὶ τὰς εὐθείας τὰ καλοῦμεν στοιχεῖα τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας, καὶ τὰ σημεῖα, τὰς εὐθείας καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ καλοῦμεν στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας τοῦ χώρου ἢ ἁπλῶς στοιχεῖα τοῦ χώρου (Grundlagen der Geometrie, 8η ἔκδοσις, σελ. 2, 1956).

Καθίσταται φανερὸν ὅτι κατὰ κρυπτοφανῆ τρόπον εἰς τὰς ὑπὸ τοῦ Hilbert διδομένας διασαφηνίσεις γίνεται χρῆσις καὶ ἀοριστολογικὴ κατάχρησις τῶν εὐκλειδείων ὅρων.

Τὸ μορφοκρατικὸν σύστημα τοῦ Δαυῒδ Χίλμπερτ ἔχει εὕρει τὸ μὲν πολλοὺς ὀπαδούς, τὸ δὲ πολλοὺς ἀντιφρονοῦντας. Ὁ ἐκ τῶν ὀπαδῶν τοῦ χιλμπερτείου συστήματος Sir Whittacker ἔφθασεν εἰς τοιοῦτον σημεῖον ἀκρότητος καὶ φανατισμοῦ, ὥστε νὰ γράφῃ :

«Οὕτω τὸ ἔργον αὐτὸ (Σημ. Νοεῖ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου) ἔχασε πᾶσαν ἀξίωσιν νὰ ληφθῇ εἰς τὰ σοβαρὰ ὡς ἐπιστημονικὸν ἔργον» (From Euclid to Eddington, Dover 2α ἔκδ. 1958, Ν. Ὑόρκη).

Δὲν εἶναι τοῦ παρόντος νὰ σχολιάσωμεν τὴν γνώμην τοῦ Sir Whittacker περὶ τῆς ἀξίας τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου· ἁπλῶς θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἐκλογὴ ὑπ᾽ αὐτοῦ τοῦ Sir Eddington (1882 — 1944) ὡς ἐπιστημονικοῦ σταθμοῦ τῆς ἀνθρωπότητος ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Εὐκλείδου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πολὺ τολμηρά.

Μεταξὺ τῶν ἀντιτιθεμένων σφοδρῶς εἰς τὸ μορφοκρατικὸν σύστημα τοῦ Δαυῒδ Χίλμπερτ καὶ εἰς τὰς λεγομένας μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας συγκαταλέγεται καὶ ὁ Hugo Dingler, τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Μονάχου, καὶ ὁ Georg Hammel, τοῦ Πολυτεχνείου τοῦ Βερολίνου. Καὶ οἱ δύο οὗτοι ἐπιστήμονες ὑποστηρίζουν ὅτι ἡ μόνη γεωμετρία, ἡ ὁποία εἶναι σύμφωνος πρὸς τὴν πραγματικότητα εἶναι ἡ εὐκλείδειος. Τὸ μορφοκρατικὸν σύστημα τοῦ Δαυῒδ Χίλμπερτ καὶ πᾶσα μὴ εὐκλείδειος γεωμετρία πιθανόν, λέγουν, νὰ εἶναι λογικὰ κατασκευάσματα τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, οὐδεμίαν ἔχουν ὅμως σχέσιν πρὸς τὴν πραγματικότητα. (Dingler: Über Geschichte und Wesen des Experiments, München 1952. Hammel: Was ist Geometrie? Math. Nachr. Band 4, 1950-51, S. 502, ff.).

Ἡ πολεμικὴ κατὰ τοῦ Ἑλληνικοῦ Πνεύματος ἤρχισεν ἐν Γερμανίᾳ ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ μαθηματικοῦ Κλάιν (1849 — 1925).

Τροφὴν εἰς τὴν πολεμικὴν αὐτὴν ἔδωκεν :

1) ἡ δημιουργία τῶν λεγομένων μὴ εὐκλειδείων γεωμετριῶν

2) ἡ κατὰ τὰς ἀνασκαφὰς τῆς Μεσοποταμίας, τὰς γενομένας πρὸ 80 περίπου ἐτῶν, εὕρεσις πινακίδων αἱ ὁποῖαι περιεῖχον μαθηματικὰς γνώσεις τῶν Βαβυλωνίων

καὶ 3) ἡ διατύπωσις τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων ὑπὸ τοῦ μαθηματικοῦ Γεωργίου Κάντορ (1845 — 1918).

Μὴ εὐκλειδείων γεωμετριῶν διακρίνουν, ὡς γνωστόν, κυρίως δύο εἴδη : 1) ἐκείνην καθ᾽ ἣν ἀντικαθίσταται τὸ 5ον αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου περὶ παραλλήλων διὰ τοῦ ἑξῆς : ἐκ δοθέντος σημείου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἄγονται πρὸς εὐθεῖαν κειμένην ἐπ᾽ αὐτοῦ τοὐλάχιστον δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ 2) ἐκείνην καθ᾽ ἣν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου πάντοτε τέμνονται. Ἡ τελευταία αὐτὴ γεωμετρία ὀνομάζεται ἐλλειπτική. (Σημ. Πρόκειται περὶ εὐθειῶν αἵτινες προέρχονται ἐκ τῆς προβολῆς εἰς ἐπίπεδον μεγίστων κύκλων σφαίρας).

Εἰς τὴν ἐλλειπτικὴν γεωμετρίαν στηρίζεται, ὡς γνωστόν, καὶ ἡ εἰδικὴ θεωρία τῆς σχετικότητος, τῆς ὁποίας ἡ κατὰ τὸ ἔτος 1905 διατυπωθεῖσα σχέσις περὶ ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας ($E = m . c^2$) παρουσιάζει ἐξαιρετικὸν ἐνδιαφέρον. Ὑποστηρίζεται ὅμως ὅτι ἡ ἰσοδυναμία μάζης καὶ ἐνεργείας εἶχε διατυπωθῆ πολὺ ἐνωρίτερον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς εὐκλειδείου γεωμετρίας καὶ δὴ καὶ 1) κατὰ τὸ ἔτος 1895 ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ φυσικοχημικοῦ Ostwald (βραβεῖον Νόμπελ 1909), 2) ὑπὸ τοῦ Γάλλου φυσικοῦ καὶ κοινωνιολόγου Gustav Le Bon, τῷ 1897, 3) ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ φυσικοῦ Hasenöhrl τῷ 1904. Ὁ Hasenöhrl εἶχε διατυπώσει καὶ τὴν εὐκλείδειον σχέσιν $E = \frac{8}{3} m . c^2$ (Wolfgang Riezler, Einführung in die Kernphysik, σελ. 26, 1959).

Περὶ τῶν μαθηματικῶν τῶν Βαβυλωνίων ἔχει ἀσχοληθῆ ἰδιαιτέρως ὁ Neugebauer. Οὗτος κατὰ τὸ 1933, μὲ τὴν ἄνοδον τῶν Ἐθνικοσοσιαλιστῶν εἰς τὴν Ἀρχήν, κατέφυγεν ἐκ τῆς Γερμανίας εἰς τὴν Δανίαν καὶ ἐκεῖθεν εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας τῆς Ἀμερικῆς. Σήμερον ὑπηρετεῖ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Princeton. Ὁ Neugebauer εἰρωνευόμενος τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας λέγει ὅτι «ἄνευ τῶν βαθυτάτων μαθηματικῶν ἐπιτευγμάτων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἡ ἀνθρωπότης θὰ εἶχε ἤδη προχωρήσει κατὰ 2.000 ἔτη εἰς τὴν πρόοδον τῶν μαθηματικῶν». Δὲν λέγει ὅμως ὁ Neugebauer ποῖος καὶ διατί ἠμπόδισε τοὺς Βαβυλωνίους νὰ προχωρήσουν εἰς τὰ μαθηματικά των ἐπιτεύγματα.

Τῷ 1883 ὁ Γεώργιος Κάντορ (1845 — 1918) ἐδημοσίευσεν ἐν Λιψίᾳ τὴν πραγματείαν του «Ἀρχαὶ μιᾶς θεωρίας τῶν Συνόλων» λέγων ὅτι διὰ τοῦ ὁρισμοῦ τὸν ὁποῖον οὗτος δίδει εἰς τὸ Σύνολον, ὁρίζει κάτι τὸ ὁποῖον εἶναι συγγενὲς πρὸς τὸ Πλατωνικὸν εἶδος ἢ ἰδέαν, ὡς ἐπίσης καὶ πρὸς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ὁ Πλάτων εἰς τὸν Διάλογον αὐτοῦ Φίληβος ὀνομάζει μεικτόν. Ἔκτοτε ὁ Γεώργιος Κάντορ ἐπλούτησε καὶ δι' ἄλλων πραγματειῶν τὴν ἀρχικήν του θεωρίαν περὶ Συνόλων, ἡ ὁποία ἐπηρέασε τόσον πολὺ τὴν μαθηματικὴν σκέψιν τῆς ἐποχῆς του, ὥστε ὁ Δαυῒδ Χίλμπερτ νὰ παρομοιάσῃ αὐτὴν πρὸς παράδεισον τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Δέον νὰ σημειωθῇ ἐνταῦθα ὅτι ὁλόκληρον θεωρίαν περὶ Συνόλων περιλαμβάνει ὁ Πλάτων εἰς τὸν Διάλογον αὐτοῦ Παρμενίδης. Δὲν συναντᾷ τις ὅμως, εἰς κανένα Διάλογον τοῦ Πλάτωνος, προσπάθειάν του, ὅπως ἀντικαταστήσῃ τὴν ἀριθμητικὴν διὰ τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων. Μερικὰ στοιχεῖα τῆς πλατωνικῆς θεωρίας περὶ Συνόλων ἀνεκοινώσαμεν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν (Πρακτικὰ αὐτῆς 16.10.1958). Ἀφορμὴν ἐκ τῆς ἀνακοινώσεως ταύτης λαβὼν ὁ Ἀμερικανὸς καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ YALE R. S. Brumbaugh συνέλεξεν ὅλα τὰ περὶ Συνόλων χωρία τοῦ Διαλόγου Παρμενίδης καὶ παρέθεσεν αὐτὰ εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου του, PLATO ON THE ONE, the hypotheses in the Parmenides, New Haven, 1961.

Παρὰ τὴν γνώμην τοῦ Χίλμπερτ, ἑνὸς κορυφαίου μαθηματικοῦ, περὶ τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων, ἡ θεωρία αὕτη δὲν ἔπαυσε νὰ ἀποτελῇ ἀντικείμενον διαρκοῦς ἐλέγχου καὶ κριτικῆς. Καὶ τοῦτο διότι παρουσιάζει πολλὰς ἀντινομίας μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ἐκείνην καθ' ἣν τὸ μέρος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὅλον. Περὶ τῶν ἀντινομιῶν τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων πραγματεύεται καὶ ὁ ὑπέρμαχος τῆς θεωρίας αὐτῆς καθηγητὴς ἐν τῷ Ἑβραϊκῷ Πανεπιστημίῳ τῆς Ἱερουσαλὴμ Ἀβραὰμ Φραῖνκελ, εἰς τὴν πραγματείαν του τὴν ἐκδοθεῖσαν ἐν Βερολίνῳ κατὰ τὸ ἔτος 1959, ὑπὸ τὸν τίτλον «Θεωρία τῶν Συνόλων καὶ Λογική» (Abraham Fraenkel, Mengenlehre und Logik, Berlin 1959, σελ. 50 κ.ἑ.)

Ὑπὸ πολλῶν ὑποστηρίζεται ὅτι εἰς μὲν τὰ Πανεπιστήμια ἡ ἐπιστημονικὴ ἔρευνα εἶναι ἀπολύτως ἐλευθέρα. Εἰς τὰ Γυμνάσια ὅμως δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ εἰσάγωνται θεωρίαι, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ὑπὸ ἔλεγχον καὶ κριτικὴν καὶ δὲν ἔχουν γίνει παραδεκταὶ ὑφ' ὅλων. Ἐκτὸς ὅμως τούτου πολλοὶ διερωτῶνται ποῦ ἔγκειται ἡ παιδευτικὴ σημασία τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων, ὥστε νὰ εἰσαχθῇ αὕτη καὶ εἰς τὰ Γυμνάσια ; Τοὐναντίον, δὲν διδάσκεται εἰς τὰ Γυμνάσια καὶ εἰς μερικὰ ἀκόμη Πανεπιστήμια ἡ ἐγγραφὴ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων εἰς σφαῖραν (τῶν λεγομένων Πλατωνικῶν σχημάτων), ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν ὑψίστων οὐ μόνον ἐπιστημονικῶν ἀλλὰ καὶ καλλιτεχνικῶν δημιουργημάτων τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, δηλ. τοῦ Ἑλληνικοῦ. Ἐξ ἄλλου, τονίζεται ὅτι, ἀσχέτως πρὸς τὰς ἀντινομίας τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων, τὸ γεγονὸς ὅτι μόνον 4 ἐπὶ τοῖς χιλίοις περίπου τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων ὅλου τοῦ κόσμου σπουδάζουν μαθηματικὰ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον ἔχει ἐπισύρει τὴν προσοχὴν πολλῶν διακεκριμένων Ἐκπαιδευτικῶν τῆς Δυτικῆς Εὐρώπης, οἱ ὁποῖοι ὑποστηρίζουν ὅτι εἶναι λίαν ἐπιβλαβὲς νὰ παραμελῆται ἡ μαθηματικὴ προπαιδεία τῶν μαθητῶν χάριν τῶν λεγομένων συγχρόνων δῆθεν μαθηματικῶν, τῶν ὁποίων ἡ ἀξία καὶ ἡ ἀλήθεια ἀμφισβητοῦνται ὑπὸ πολλῶν.

Ε. Σ. Σ.

Περὶ τοῦ μαθηματικοῦ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

Ὑπὸ ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Περὶ τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ μεγάλου Ἕλληνος μαθηματικοῦ, δὲν γνωρίζομεν οὔτε τὸν τόπον οὔτε τὸν χρόνον τῆς γεννήσεως καὶ τοῦ θανάτου. Αἱ περὶ τοῦ βίου του πληροφορίαι τῶν ἀρχαίων εἶναι πολὺ ἐλλειπεῖς : Ἦτο Ἕλλην καὶ ἔδρασεν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, πόλιν τὴν ὁποίαν ἵδρυσεν κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 331 π. Χ. ὁ Μέγας Ἀλέξανδρος· ἡ ἀκμή του συμπίπτει μὲ τὸν χρόνον τῆς βασιλείας τοῦ Πτολεμαίου τοῦ Α΄ (323 — 285 π. Χ.). Καθ' ὅλα τὰ φαινόμενα ὁ Εὐκλείδης ἦτο διευθυντὴς τῆς περιφήμου ἀλεξανδρινῆς Σχολῆς ἢ ὁ πρῶτος πρύτανις τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ἀλεξανδρείας, ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὸν τίτλον του μὲ τὸν σύγχρονον τρόπον ἐκφράσεως. Ὁ Πρόκλος (410 — 485 μ.Χ.), ὁ πρύτανις τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος ἐν Ἀθήναις, ἀποκαλεῖ τὸν Εὐκλείδην Πλατωνικόν, τουτέστι γνώστην καὶ ὀπαδὸν τῆς φιλοσοφίας τοῦ Πλάτωνος.

Ἀπὸ τοῦ θανάτου τοῦ Πλάτωνος (347 π. Χ.) μέχρι τοῦ πρώτου ἔτους τῆς βασιλείας τοῦ Πτολεμαίου τοῦ Α΄ (323 π. Χ.) παρῆλθον εἴκοσι τέσσαρα ἔτη. Εἰς αὐτὸ τὸ χρονικὸν διάστημα πρέπει ὁ Εὐκλείδης νὰ εἶχε ἀποκτήσει ὄνομα ὡς διαπρεπὴς μαθηματικός, διὰ νὰ κληθῇ ὑπὸ τοῦ πρώτου ἡγεμόνος τῆς Αἰγύπτου (μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου), τοῦ Πτολεμαίου τοῦ Α΄, ὡς διευθυντής, πιθανώτατα ὡς ὀργανωτής, τοῦ ἑλληνικοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ἀλεξανδρείας. Ὅτι ὁ Πτολεμαῖος ὁ Α΄ ἐξήτει ἀκριβῶς εἰς τὰς Ἀθήνας τοὺς διαπρεπεστέρους ἐκ τοῦ Ἑλληνικοῦ Πνευματικοῦ Κόσμου διὰ τὴν πρωτεύουσάν του τὸ συνάγομεν ἐκ τοῦ Ἀλκίφρονος, ἑνὸς ἀγχίνου καὶ χαριτωμένου συγγραφέως τῆς Ἀλεξανδρείας. Ὁ Ἀλκίφρων μᾶς πληροφορεῖ περὶ τῆς προσκλήσεως τοῦ Μενάνδρου· ἐν τούτοις ὅμως ὁ ποιητὴς δὲν μετέβη εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, ἕνεκα τῆς ἀγάπης του πρὸς τὴν πόλιν τῶν Ἀθηνῶν καὶ διότι ἡ φίλη του Γλυκέρα ἠσθάνετο ἀποστροφὴν διὰ τὰ μακρυνὰ ταξίδια (W. Plankl. ΑΛΚΙΦΡΩΝ, Ἐπιστολαὶ Ἑταιρῶν, Μόναχον 1942, 26). Ἐθεωρεῖτο λοιπὸν ὁ Εὐκλείδης, ὀλίγα ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Πλάτωνος, ὡς μέγας μαθηματικὸς ἐν Ἀθήναις, μάλιστα ἔπρεπε νὰ εἶναι ὁ μεγαλύτερος, διὰ νὰ κληθῇ ὑπὸ τοῦ Πτολεμαίου εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, διὰ νὰ ἀναλάβῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ Πανεπιστημίου.

Παρὰ τοῦ μαθηματικοῦ Πάππου, ὁ ὁποῖος ἔζησεν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ κατὰ τὸν τρίτον αἰῶνα μ. Χ., πληροφορούμεθα (II, 7, σ. 676 κ. ἑ. Hultsch), ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο εὐμενὴς πρὸς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ μανθάνωσιν γεωμετρίαν. Χαριτωμένον εἶναι ἓν ἐπεισόδιον, τὸ ὁποῖον ἀναφέρει ὁ Στοβαῖος, μεταξὺ τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἑνὸς πλουσίου νέου (Meineke 4, 205) : Εἷς νέος ἐπεσκέφθη κάποτε τὸν Εὐκλείδην καὶ τὸν παρεκάλεσε νὰ διδαχθῇ ἀπὸ αὐτὸν γεωμετρίαν. Ἀφοῦ ὅμως οὗτος ἔμαθε τὸ πρῶτον θεώρημα, ἠρώτησε τὸν Εὐκλείδην : «Καὶ τώρα τί θὰ κερδίσω μὲ τὸ θεώρημα αὐτό ;» ὁ Εὐκλείδης ἔστρεψε πρὸς τὸν ὑπηρέτην του καὶ τοῦ εἶπε : «δός του τρεῖς δεκάρες, διὰ νὰ κερδίσῃ κάτι ἀπὸ τὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἔμαθε !».

Τὸ εὔχαρι τοῦ χαρακτῆρος του θὰ ἠδύνατο νὰ φανερώσῃ καὶ τὸ ἀκόλουθον ἀλγεβρικὸν πρόβλημα, διατυπωμένον ὑπὸ μορφὴν στίχων, τὸ ὁποῖον ἀποδίδεται εἰς τὸν Εὐκλείδην (Ἀνθολογία Παλατίνα, Editio stereotypa Tauchnitiana 3, Appendix 26).

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορτωμέναι σῖτον ὡδοιποροῦσαν·
ὑπὸ τὸ βάρος ὅμως τοῦ φορτώματος, τὸ ὁποῖον ἔφερον, ἐστέναζεν ἡ ὄνος·
ταύτην ἰδοῦσα βαρυστενάζουσαν ἡ ἡμίονος τὴν ἠρώτησε·
«Μητέρα γιατί θρηνεῖς κλαίουσα σὰν κορίτσι;»
Ἐὰν μοῦ ἔδιδες ἕνα σάκκον, θὰ εἶχα διπλασίους ἀπὸ σέ·
ἐὰν δὲ ἐλάμβανες ἀπὸ ἐμὲ ἕνα, θὰ εἴχαμε ἴσον».
Εἰπὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν σάκκων ἄριστε γνῶστα τῆς γεωμετρίας.
(Ἡ ὄνος εἶχε 5 καὶ ἡ ἡμίονος 7 σάκκους).

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν καλύτερον τὸ ἔργον τοῦ Εὐκλείδου, ἰδίως τὰ Στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν τὴν μαθηματικὴν δημιουργίαν τριῶν αἰώνων τοῦ Ἑλληνικοῦ Πνεύματος (600—300 π. Χ.) πρέπει, ἔστω καὶ διὰ βραχέων, νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὰ Προελληνικὰ μαθηματικά. Ἡ ἀρχαιοτέρα γραπτὴ πηγὴ διὰ τὰ αἰγυπτιακὰ μαθηματικὰ εἶναι ὁ πάπυρος, ὁ φερόμενος ὑπὸ τὸ ὄνομα Ρίντ, ὅστις ἐγράφη ὑπὸ τοῦ Ἄμες περὶ τὸ ἔτος 1.700 π.Χ. (Βρεταννικὸν Μουσεῖον). Ἐκτὸς τούτου ὑπάρχει ἀκόμη πλῆθος βαβυλωνιακῶν πινακίδων, ἐκ τῶν ὁποίων συνάγεται, ὅτι οἱ Σουμέριοι (μὴ σημιτικὸς λαὸς) καὶ οἱ διάδοχοί των οἱ Βαβυλώνιοι (σημιτικὸς λαός), εἶχον καλλιεργήσει τὰ μαθηματικὰ εἰς τὴν Μεσοποταμίαν χώραν. Περὶ τῶν βαβυλωνιακῶν πινακίδων μαθηματικοῦ περιεχομένου ἔχει γίνει πολλὴ συζήτησις καὶ ἔχουν γραφῆ πολλά. Πολλαὶ ἐκ τῶν πινακίδων αὐτῶν δὲν ἐσώθησαν εἰς καλὴν κατάστασιν. Κατὰ τὸ πλεῖστον δὲν γνωρίζομεν εἰς ποίαν ἐποχὴν ἀνήκουν. «Αἱ ἐκ τοῦ ἐμπορίου ἀποκτηθεῖσαι πινακίδες προέρχονται, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ἐξ ἀρχαιοκαπηλείας οὕτως, ὥστε συχνὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ ὁ τόπος τῆς προελεύσεώς των, πολὺ δὲ περισσότερον τὸ ἀρχαιολογικὸν στρῶμα καὶ ἡ χρονολογία τῆς γραφῆς των» (K. Vogel, Προελληνικὰ μαθηματικὰ 2, Ἀννόβερον καὶ Πάδερμπόρν 1959, 113). Παρὰ ταῦτα «ἀπὸ ὑποθέσεις» καὶ «ἀπὸ ἐλευθέραν ἀπόδοσιν» ἑνὸς μετὰ δυσκολίας ἀναγινωσκομένου βαβυλωνιακοῦ κειμένου συνήγαγόν τινες τὸ συμπέρασμα, ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι ὄχι μόνον ἐγνώριζον τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, ἀλλὰ ἀκόμη, ὅτι εἶχον εἰς τὰ μαθηματικά των καὶ ἓν εἶδος ἀποδείξεως. (O. Neugebauer, Προελληνικὰ μαθηματικὰ 1, Βερολῖνον 1934, 35, 168, 203).

Εἶναι φανερόν, ὅτι πρέπει κανεὶς πρῶτα νὰ κάμῃ μίαν σύγκρισιν τοῦ περιεχομένου τῶν βαβυλωνιακῶν κειμένων καὶ τῶν μαθηματικῶν τοῦ Ἥρωνος καὶ τοῦ Διοφάντου διὰ νὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ σχηματίσῃ γνώμην θεμελιουμένην ἐπιστημονικῶς. Ἐκτὸς ὅμως τούτου πολλαὶ βαβυλωνιακαὶ πινακίδες προέρχονται ἐκ τῶν χρόνων τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, εἶναι δηλαδὴ τὸ περιεχόμενόν των προϊὸν τῆς δημιουργίας τοῦ Ἑλληνικοῦ Πνεύματος. Τὸ ἀποκορύφωμα τῆς ἐλάχιστα θεμελιουμένης ἀντιλήψεως περὶ τῶν βαβυλωνιακῶν μαθηματικῶν τὸ συναντᾷ κανεὶς εἰς τὴν ἀκόλουθον διατύπωσιν : ...Τόσον εἰς τὴν περιοχὴν τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, ὅσον καὶ εἰς τὴν περιοχὴν τῆς στοιχειώδους θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν, ὅσον τέλος καὶ εἰς τὴν περιοχὴν τῶν ἐξισώσεων ὑπάρχει ὅλον τὸ ὑλικὸν ἐπὶ τοῦ ὁποίου οἰκοδομοῦν τὰ Ἑλληνικὰ μαθηματικά... Οἱ Ἕλληνες εὑρίσκονται εἰς τὸ μέσον καὶ ὄχι πλέον εἰς τὴν ἀρχήν... Ἡ κατανόησις τῆς ὑπάρξεως τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ἐξηγοράσθη (Σημ. μετ. Ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων) μὲ τὴν ἀπότομον διακοπὴν ἑνὸς συστήματος, τὸ ὁποῖον εἶχεν ἤδη ἐξελιχθῇ (Σημ. μετ. Ὑπὸ τῶν Βαβυλωνίων) εἰς ἕνα ἀλγεβρικὸν συμβολισμόν, ὁ ὁποῖος θὰ ἦτο δυνατὸν καθ᾽ ὅλα τὰ σημεῖα νὰ ἀναπτυχθῇ καὶ νὰ φθάσῃ ἀμέσως εἰς τὴν ἄλγεβραν τῆς Ἀναγεννήσεως χωρὶς τὰς βαθυτάτας (Σημ. μετ. Ἐδῶ μὲ τὴν λέξιν βαθυτάτας εἰρωνεύεται ὁ συγγραφεὺς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας) μαθηματικὰς δημιουργίας τῶν Ἑλλήνων, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ κερδηθοῦν 2.000 ἔτη. (Σημ. μεταφ. Δηλ. 2.000 ἔτη ὠπισθοδρόμησαν τὴν ἐπιστήμην τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὸν O. Neugebauer, οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες!!) (O. Neugebauer, Σπουδαὶ ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῆς ἀρχαίας ἀλγέβρας III, Πηγαὶ καὶ σπουδαὶ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν B 3 1936).

Ὁ Εὐκλείδης (;). Εἰκὼν ἐκ ῥωμαϊκοῦ χειρογράφου εὑρισκομένου εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῆς γερμανικῆς κωμοπόλεως Βόλφενμπύττελ (ἀριθ. χειρ. 2403) τοῦ 6ου αἰῶνος μ. Χ.

Ὡς γνωρίζομεν σήμερον, οὐδὲν ἴχνος ἀποδείξεως ὑπάρχει εἰς τὰ μαθηματικὰ θεωρήματα τῶν παλαιῶν πεπολιτισμένων λαῶν τῆς Ἀνατολῆς. Ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ μαθηματικὰ θεωρήματα ἐπεφυλάχθη ὑπὸ τῆς Θείας Προνοίας διὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας. Ἡ θεμελίωσις τῶν μαθηματικῶν ὡς ἐπιστήμης εἶναι ἀποκλειστικὸν ἔργον τῶν Ἑλλήνων. Εἰς τὸν πρόλογον τῆς δευτέρας ἐκδόσεώς του «Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου» ὁ Ἐμμανουὴλ Κάντιος λέγει τὰ ἀκόλουθα :

«Τὰ Μαθηματικὰ εὗρον κατὰ τοὺς ἀπωτάτους χρόνους, μέχρι τῶν ὁποίων φθάνει ἡ ἱστορία τῆς ἀνθρωπίνης λογικῆς, εἰς τὸν ἀξιοθαύμαστον λαὸν τῶν Ἑλλήνων τὸν ἀσφαλῆ δρόμον μιᾶς ἐπιστήμης. Ὅμως δὲν πρέπει νὰ σκεφθῇ κανείς, ὅτι τὸ πρᾶγμα ἦτο διὰ τὴν ἐπιστήμην αὐτὴν τόσον εὔκολον, ὥστε νὰ ἀκολουθήσῃ τὴν βασιλικὴν ἀτραπὸν ἢ πολὺ περισσότερον νὰ αὐτοδημιουργηθῇ ὅπως τοῦτο συνέβη μὲ τὴν Λογικήν, ὅπου αὕτη ἔχει νὰ κάμῃ μόνον μὲ τὸν ἑαυτόν της· πολὺ περισσότερον πιστεύω, ὅτι ἐπὶ μακρὸν (ἰδίως μεταξὺ τῶν Αἰγυπτίων) παρέμειναν ταῦτα παραπαίοντα καὶ ὅτι ἡ μεταβολὴ ἐκ τῆς καταστάσεώς των αὐτῆς δέον νὰ ἀποδοθῇ εἰς μίαν ἐπανάστασιν, τὴν ὁποίαν προεκάλεσεν ἡ εὐτυχὴς ἔμπνευσις ἑνὸς μόνου ἀνδρός, κατά τινα προσπάθειαν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὁδός, ἡ ὁποία ἔπρεπε νὰ ἀκολουθηθῇ δὲν ἦτο πλέον δυνατὸν νὰ εἶναι ἐσφαλμένη καὶ εἶχε πλέον προδηλωθῇ καὶ διανοιχθῇ δι᾽ ὅλας τὰς ἐποχὰς ὁ ἀσφαλὴς καὶ ἀπεριόριστος δρόμος μιᾶς ἐπιστήμης. Ἡ ἱστορία τῆς ἐπαναστάσεως αὐτῆς τοῦ σκέπτεσθαι...., καὶ τοῦ εὐτυχοῦς, ὅστις τὴν ἐπραγματοποίησε, δὲν διεσώθη μέχρις ἡμῶν. Ἐν τούτοις ὁ θρῦλος, τὸν ὁποῖον μᾶς παραδίδει ὁ Διογένης ὁ Λαέρτιος, ὁ ὁποῖος κατονομάζει τὸν πιθανὸν εὑρετήν, ἐκ τῶν μικροτάτων καὶ κατὰ τὴν κοινὴν κρίσιν μὴ ἐχόντων ἀνάγκην ἀποδείξεως στοιχείων τῶν γεωμετρικῶν ἀποδείξεων, ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ ἀνάμνησις τῆς μεταβολῆς, ἡ ὁποία προεκλήθη ἐκ τοῦ πρώτου ἴχνους τῆς ἀναπτύξεως τοῦ νέου αὐτοῦ δρόμου, ἔπρεπε νὰ εἶχε φανῇ εἰς τοὺς μαθηματικοὺς ἐξόχως σπουδαία καὶ ὡς ἐκ τούτου νὰ παραμείνῃ ἀλησμόνητος. Ὁ πρῶτος ὅστις ἀπέδειξε τὰ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου (εἴτε Θαλῆς ὠνομάζετο εἴτε ἄλλως πως) ἔσχε μίαν ἀναλαμπὴν ...... (R. Schmidt Λιψία 1944).

Τὸ περιεχόμενον τῶν Στοιχείων.

Ἐκ τοῦ τίτλου Στοιχεῖα τὸν ὁποῖον φέρει τὸ κύριον ἔργον τοῦ Εὐκλείδου, εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσῃ τις, ὅτι τὸ ἔργον τοῦτο περιέχει γενικῶς τὰ στοιχεῖα τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ἡ ὕλη τῶν Στοιχείων ἔχει κατανεμηθῆ εἰς 13 βιβλία. Τὰ βιβλία 1 — 6 καὶ 10 — 13 περιέχουν τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας, ἐν ᾧ τὰ βιβλία 7 — 9 περιέχουν τὰ στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν. Εὑρίσκεται δηλ. εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, πᾶν ὅ,τι εἶναι ἀπαραίτητον διὰ τὴν περαιτέρω οἰκοδόμησιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

Τὰ σχήματα τῶν Στοιχείων.

Τὰ γεωμετρικὰ σχήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιορίζονται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν εὐθειῶν γραμμῶν καὶ κύκλων, δηλ. εἰς σχήματα, τὰ ὁποῖα σχεδιάζονται διὰ κανόνος καὶ διαβήτου. Πολὺ ἐνωρὶς ὅμως, σχεδὸν 200 ἔτη πρὸ τοῦ Εὐκλείδου, οἱ Ἕλληνες ἐχρησιμοποίησαν εἰς τὰ μαθηματικά των καὶ ἄλλας καμπύλας, ὅπως π.χ. τὰς κωνικὰς τομάς. Παρὰ ταῦτα ὅμως, τὰ Στοιχεῖα ἔπρεπε νὰ περιέχουν θεωρήματα, τὰ ὁποῖα ἀποδεικνύονται μὲ τὴν βοήθειαν μόνον εὐθειῶν γραμμῶν καὶ κύκλων. Τὴν αἰτίαν τούτου πληροφορούμεθα ἐκ τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἥρωνος, ὅπου βλέπει κανεὶς ποίαν σημασίαν ἔχει διὰ τὰ μαθηματικὰ τὸ θεοσεβὲς καὶ τὸ μυστηριακόν, ἰδίως ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Πυθαγόρου. Κατὰ τὸν Ἥρωνα ὁ κύκλος δὲν ἔχει ἀρχὴν καὶ τέλος· ὅθεν συμβολίζει τὸν Θεόν. Ἡ εὐθεία γραμμὴ ἀποτελεῖται ἐκ σημείων· ἔχει ἀρχήν, μέσον καὶ τέλος. Παριστάνει τὴν γένεσιν, τὴν ζωὴν καὶ τὸν θάνατον. Εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ κύκλοι παριστάνουν κατὰ ταῦτα τὴν ἐπικοινωνίαν τῶν ἀνθρώπων πρὸς τὸν Θεόν· συνδέουν τὸν ἄνθρωπον πρὸς τὸν Θεόν (ἔκδ. J. L. Heiberg, Ἥρωνος Ἀλεξανδρέως τόμ. IV, ὁρισμοί). Ἐκ τοιούτων σκέψεων ὁρμώμενοι, αἱ ὁποῖαι φέρουν ἰδίως τὴν σφραγίδα τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς, ἐθεώρουν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὡς ἄλυτα τὰ τρία περίφημα προβλήματα: 1) τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, 2) τὸν διπλασιασμὸν τοῦ κύβου καὶ 3) τὴν τριχοτόμησιν ὀξείας γωνίας, καίτοι εἶχον λύσει αὐτὰ δι' ἄλλων καμπύλων παρὰ δι' εὐθειῶν γραμμῶν καὶ κύκλων. Διότι τὰ προβλήματα αὐτὰ δὲν λύονται δι' εὐθειῶν καὶ κύκλων.

Οἱ ἀριθμητικοὶ ὑπολογισμοὶ καὶ τὰ Στοιχεῖα.

Εἰς τὰ 13 βιβλία τῶν Στοιχείων δὲν ὑπάρχει κανεὶς ἀριθμητικὸς ὑπολογισμός. Ὁ ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς δὲν ἔχει καμμίαν σχέσιν μὲ τὴν ἀγωγὴν τοῦ ἀνθρώπου καὶ τὴν ἐπιστήμην. Εἶναι οὗτος ὑπόθεσις τῶν καθημερινῶν ἀναγκῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς καὶ εἶχεν ἀφεθῆ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα εἰς τὰ καθήκοντα τῶν δούλων καὶ τῶν γραμματοδιδασκάλων.

Ἡ σχέσις τοῦ Εὐκλείδου πρὸς τὰ Στοιχεῖα.

Πολὺ συχνά, ἀκόμη καὶ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, ἐτέθη τὸ ἐρώτημα, κατὰ πόσον ὁ Εὐκλείδης εἶχε συμβάλει εἰς τὴν δημιουργίαν τῶν Στοιχείων. Ἀπὸ τὸν Πρόκλον καὶ ἄλλας πηγὰς πληροφορούμεθα, ὅτι πολλὰ θεωρήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ὀφείλονται εἰς τὸν Εὔδοξον, τὸν Θεαίτητον καὶ τοὺς Πυθαγορείους. Δὲν γνωρίζομεν, ἂν ὁ Εὐκλείδης προσωπικῶς ἀνεκάλυψεν ἔστω καὶ ἓν θεώρημα τῶν Στοιχείων. Ἐὰν παρὰ ταῦτα διαβάζῃ κανεὶς τὰ Στοιχεῖα, εἰς τὸ πρωτότυπον καὶ ὄχι ἐν μεταφράσει, καταλήγει εἰς τὴν ἀκράδαντον πεποίθησιν, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο πράγματι μέγας μαθηματικὸς καὶ συγχρόνως καὶ καλλιτέχνης. Ὅπως ὁ Φειδίας ἦτο καλλιτέχνης τοῦ μαρμάρου, οὕτω πως ὁ Εὐκλείδης ἦτο καλλιτέχνης τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Εἶναι ὁ Φειδίας τοῦ πνεύματος.

Ἡ ἔκδοσις τῶν Στοιχείων.

Τὰ Στοιχεῖα ἐγράφησαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου τὸ πρῶτον, περίπου κατὰ τὸ 300 π.Χ. Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς αὐτῆς μέχρι τοῦ ἔτους 380 μ.Χ. περίπου δὲν γνωρίζομεν τίποτε περὶ μιᾶς συστηματικῆς ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων. Τὰ Στοιχεῖα, τὰ κυκλοφορήσαντα μέχρι τοῦ 1814 εἰς ὅλους τοὺς λαοὺς προέρχονται κατὰ πᾶσαν πιθανότητα ἔκ τινος ἐκδόσεως τοῦ λογίου Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως. Ἡ ἔκδοσις ὅμως αὕτη περιεῖχε καὶ πολλὰς ξένας προσθήκας. Ὅτε ὁ Ναπολέων ὁ πρῶτος κατέλαβε τὴν Ρώμην, ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Peyrard ηὗρε εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ χειρόγραφον τῶν Στοιχείων, τὰ ὁποῖα προήρχοντο ἐξ ἐκδόσεως παλαιοτέρας τῆς τοῦ Θέωνος. Μετὰ τὴν Παρισινὴν ἔκδοσιν τοῦ Peyrard (1814—1818) ἐξεδόθησαν τὰ Στοιχεῖα, κατόπιν λίαν κοπιώδους καὶ ἀξιοθαυμάστου ἐργασίας, ὑπὸ τοῦ Δανοῦ λογίου J. L. Heiberg ἐν Λιψίᾳ, εἰς τὸν ἐκδοτικὸν οἶκον B. C. Teubner (4 τόμοι «Στοιχεῖα» καὶ 1 τόμος σχόλια, 1883 — 1888). Εἰς τὰ μέχρι σήμερον σωθέντα Ἅπαντα τοῦ Εὐκλείδου ἀνήκουν καὶ 3 τόμοι ἀκόμη, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἐκδοθῆ ἐπίσης εἰς τὸν οἶκον B. C. Teubner. Ὁ πρῶτος τόμος ἐκ τούτων περιέχει τὰ «Ὀπτικὰ» τὰ «Κατοπτρικὰ» καὶ σχόλια (Ἔκδ. J. L. Heiberg, 1895). Οἱ ἄλλοι δύο τόμοι ἐξεδόθησαν ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ λογίου H. Menge: Ἡ πραγματεία τοῦ Εὐκλείδου «Δεδομένα» μὲ σχόλια (1896), ἔπειτα αἱ πραγματεῖαι «Φαινόμενα» (Ἀστρονομία) μέ σχόλια, «Κατατομὴ Κανόνος» (Μουσική), «Εἰσαγωγὴ ἁρμονικὴ» (Ἐπίσης μουσική) (1916). Δυστυχῶς πολλαὶ σπουδαῖαι πραγματεῖαι τοῦ Εὐκλείδου ἐχάθησαν. Αὗται εἶναι: Τὸ περὶ Διαιρέσεων σχημάτων βιβλίον, 2) Ψευδάρια, 3) Πορίσματα, 4) δύο βιβλία, Τόποι πρὸς Ἐπιφανείᾳ, 5) τέσσαρα βιβλία Περὶ Κωνικῶν τομῶν, 6) ἓν βιβλίον Περὶ Μηχανικῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω μνημονευμένων ἔργων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι γνήσια τὰ «Δεδομένα» καὶ τὰ «Φαινόμενα». Τὰ ἄλλα ἔργα: Ὀπτικά, Κατοπτρικά, Κατατομὴ κανόνος, Εἰσαγωγὴ ἁρμονικὴ δὲν εἶναι γνήσια κατὰ τὴν γνώμην μου. Καθ' ὅλα τὰ φαινόμενα τὰ ἔργα ταῦτα προέρχονται ἐκ τετραδίων μαθητῶν, οἵ ὁποῖοι εἶχον χρησιμοποιήσει τὰς πραγματείας τοῦ Εὐκλείδου. Τὰ Στοιχεῖα ἐτυπώθησαν διὰ πρώτην φορὰν κατὰ τὸ 1530 ὑπὸ τοῦ Simon Grynaeus εἰς τὴν Βασιλείαν.

Σημεριναὶ ἀντιλήψεις περὶ τῶν Στοιχείων.

Ἡ ἐκμάθησις τῶν Στοιχείων εἰς τὰ Σχολεῖα οὔτε ἁπλῆ εἶναι οὔτε εὔκολος. Δυστυχῶς δὲν ὑπάρχει βασιλικὴ ἀτραπὸς διὰ τὴν ἐκμάθησιν τῶν μαθηματικῶν. Ἐκτὸς τούτου, μετὰ κάθε μεγάλον πόλεμον ἐπιχειροῦν εἰς μερικὰς χώρας πειράματα, διὰ τῶν ὁποίων προσπαθοῦν νὰ καταστήσουν εὐκολωτέραν τὴν διδασκαλίαν τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰ Σχολεῖα καὶ νὰ προσφέρουν εἰς τοὺς μαθητάς, ὅ,τι θὰ εἶναι ὠφέλιμον διὰ τὴν ἐπαγγελματικήν των μόρφωσιν. Ἡ Τεχνικὴ ἔχει τὰς ἀπαιτήσεις της διὰ τὸ πρακτικὸν καὶ τὸ ὠφέλιμον καὶ δὲν ἐνδιαφέρεται διὰ τὴν ἀγωγὴν τῆς ἀνθρωπίνης ψυχῆς. Λησμονοῦν ὅμως ἐν προκειμένῳ τὴν εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος περιεχομένην ῥῆσιν, ὅτι ἡ διδασκαλία τῆς γεωμετρίας ἀποσκοπεῖ εἰς τὸ νὰ καταστήσῃ εὐκολώτερον κατανοητὴν τὴν ἰδέαν τοῦ Ἀγαθοῦ, δηλαδὴ τοῦ Θεοῦ (πρὸς τὸ κατιδεῖν ῥᾷον τὴν τοῦ ἀγαθοῦ ἰδέαν, 526 de). Ἐπὶ τῇ βάσει διαφόρων ἀντιλήψεων, αἱ ὁποῖαι ἀποσκοποῦν βεβαίως εἰς τὸ πρακτικόν, τὸ ὠφέλιμον καὶ τὸ κερδοφόρον, προσπαθοῦν πολλοὶ λόγιοι νὰ ἀπομακρύνουν ἐκ τοῦ οἰκοδομήματος τῆς ἐπιστήμης τὴν Λογικὴν τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ νὰ ἀντικαταστήσουν αὐτὰ διὰ τῆς καλουμένης μαθηματικῆς λογικῆς καὶ τῶν σχεδὸν ἐμπειρικῶν μαθηματικῶν τῶν καλουμένων συγχρόνων. Ἂς μᾶς ἐπιτραπῇ νὰ φρονῶμεν ἐν προκειμένῳ, ὅτι ἡ προσπάθεια αὐτὴ ἔχει πολλὴν ὁμοιότητα μὲ τὴν περίπτωσιν τοῦ πλουσίου ἐκείνου νέου, ὁ ὁποῖος ἠρώτησε τότε τὸν Εὐκλείδην, πόσα θὰ κερδίσῃ μὲ τὴν ἐκμάθησιν τοῦ πρώτου γεωμετρικοῦ θεωρήματος.

Ἡ ἔρευνα διὰ τὰ Στοιχεῖα καὶ μία ἀπήχησις αὐτῆς.

Κατὰ τὰ τελευταῖα 200 ἔτη ἡ σπουδὴ τῶν Στοιχείων καὶ πρὸ παντὸς ἡ ἔρευνα τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας ἦτο πολὺ ἐντατική. Ἀνεκαλύφθησαν νέα σπουδαῖα θεωρήματα καὶ κατὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ 5ου αἰτήματος (ἀξιώματος) τοῦ Εὐκλείδου δι' ἄλλου, εὗρον τὰς καλουμένας μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας. Ἡ ὀνομασία «μὴ εὐκλείδειος γεωμετρία» θεωρεῖται ὑπό τινων ὡς μὴ ἐπιτυχής. «Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου» θὰ ἦτο ὅρος ὀρθότερος. Ἐὰν κανεὶς ἐκ τῶν 14 ἀξιωμάτων τοῦ Εὐκλείδου ἀντικαθιστᾷ τὸ ἕν δι' ἄλλου καὶ μὲ τοῦτο καὶ τὰ ἄλλα 13 ἱδρύῃ ἓν ἐπιστημονικὸν οἰκοδόμημα, δὲν ἐπιτρέπεται νὰ ὀνομάζῃ τοῦτο «μὴ εὐκλείδειον». Μὴ εὐκλείδειον σημαίνει, ὅτι τοῦτο δὲν ἔχει σχέσιν μὲ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦτο δὲν συμβαίνει, μὰ τὴν ἀλήθειαν. Αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι παρέσχον τὴν ἀφορμὴν εἰς τὸν Γάλλον λόγιον Ἰούλιον Ταννερὺ (Jules Tannery) νὰ γράψῃ μερικὰς σκέψεις, τὰς ὁποίας ἀποδίδομεν κατωτέρω μὲ μερικὰς παραλλαγάς. (Science et Philosophie, Paris 1934 Kap. 9)·

«Πόσον θὰ εἴχομεν νὰ ὠφεληθῶμεν, ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ ἐπαναφέρωμεν ἐκ τοῦ Ὑπερπέραν τὸν Εὐκλείδην μεταξύ μας. Ὁ Ζεύς, πατὴρ ἀνδρῶν τε θεῶν τε κατὰ τὸν Ὅμηρον, ἤκουσε εὐμενῶς τὴν παράκλησιν αὐτὴν τῶν ἀνθρώπων καὶ ἔδωκε τὴν ἄδειαν εἰς τὸν Εὐκλείδην, νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν γῆν. Ὡς συνοδόν του ὥρισε τὸν Ἑρρῖκον Πουανκαρέ. Ὁ Εὐκλείδης ἀκολουθῶν τὴν γεωμετρίαν του ἔφθασεν ἐκ τοῦ οὐρανοῦ εἰς τὸ Βερολῖνον ἀστραπιαίως, ὅπου τὸν ὑπεδέχθησαν μὲ μεγάλον ἐνθουσιασμόν. Τοῦ ἐνεχείρισαν ἐκεῖ τηλεγράφημα ἐκ Σπάρτης τοῦ κ. Βούρβαχη (νὰ μὴ γίνῃ σύγχυσις μὲ τὸν λόγιον Παρισινὸν Ν. Βούρβαχην), διὰ τοῦ ὁποίου παρεκαλεῖτο ὁ Εὐκλείδης νὰ μὴ ἀνακοινώσῃ ὅτι ἀφίχθη ἐκ τοῦ οὐρανοῦ «ἀστραπιαίως», διότι τοῦτο ἀπαγορεύεται ὑπὸ τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητος. Ἐν τῷ μεταξὺ ὁ Πουανκαρέ, ὁ ὁποῖος εἶχεν ἀναλάβει τὸ ταξίδιόν του πρὸς τὴν γῆν μὴ εὐκλειδείως, εἶχε φθάσει εἰς τὸ νεφέλωμα τῆς Ἀνδρομέδας, καίτοι οὗτος κατὰ τὸ διάστημα τῆς πρώτης του ζωῆς εἶχε δηλώσει, ὅτι ἡ εὐκλείδειος καὶ αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι εἶναι ἰσότιμοι. Ὁ Εὐκλείδης ἀνεκηρύχθη ὑφ' ὅλων τῶν Κρατῶν Γενικὸς Ἐπιθεωρητὴς τῶν Μαθηματικῶν καὶ μετέβη εἰς τὴν Λιψίαν, ὅπου ἐπρομηθεύθη παρὰ τοῦ ἐκδοτικοῦ οἴκου B. C. Teubner τὸ πολύτιμον ἔργον τοῦ J. L. Heiberg (Χάϊμπεργκ) «Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου». Μὲ ἐφόδιον τὸ ἔργον αὐτὸ μετέβη εἰς τὴν πόλιν Γκαίττιγκεν τῆς Γερμανίας, ὅπου ἐπληροφορήθη διὰ τὴν ὕπαρξιν τῶν μὴ εὐκλειδείων γεωμετριῶν. Μὲ ἱκανοποίησιν ἔλαβεν γνῶσιν, ὅτι ὁ Γκάους ἀπέσχε τῶν μὴ εὐκλειδείων αὐτῶν γεωμετριῶν ἐκ τοῦ φόβου τῶν κραυγῶν τῶν Βοιωτῶν. Ἔμεινε πολὺ εὐχαριστημένος ὅταν ἐπληροφορήθη, ὅτι εἰς τὸ 5ον αἴτημά του εἶχε δοθῆ τιμητικὴ θέσις εἰς τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τοῦ Hilbert καὶ εἶπε, τί θὰ συνέβαινε εἰς τὸν κόσμον, ἂν τυχὸν δὲν εἶχε δοθῆ ἡ τιμητικὴ αὐτὴ θέσις. «Θαυμάζω, εἶπεν ἔπειτα, τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Dedekind - Cantor, τὴν τελείαν ἐπαγωγὴν τοῦ Pascal ἢ τοῦ Poincaré καὶ τὴν τομὴν τοῦ Dedekind, τὰ ὁποῖα ὅλα στηρίζονται εἰς τὰ Στοιχεῖα μου. Πολὺ μοῦ ἀρέσει τὸ ὄνομα «ἐξαντλητικὴ μέθοδος» τὴν ὁποίαν μὲ πολὺν κόπον ἀνεκάλυψαν, διὰ τὴν Ἀνάλυσιν τὴν περιεχομένην εἰς τὸ 12ον βιβλίον τῶν Στοιχείων. Ἐν τῷ μεταξὺ τὸ σύμπαν διεστέλλετο ἀδιακόπως συμφώνως μὲ τὴν μὴ εὐκλείδειον γεωμετρίαν, καὶ ὁ Εὐκλείδης εὑρέθη εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐρωτήσῃ ποῦ τέλος πάντων κεῖται τὸ κέντρον αὐτοῦ τοῦ πάντοτε μὴ εὐκλειδείως, ἀλλὰ συνεχῶς διατεινομένου σύμπαντος. «Θὰ ἦτο πολὺ ὡραῖον, εἶπε, ἐὰν ἠδύνατο κανεὶς νὰ δώσῃ εἰς τὰ μικρὰ παιδιὰ ὡς παιγνίδια τοιαῦτα σύμπαντα εἰς ἐπαρκῆ καὶ ἀνάλογον ἀριθμόν. Ὁ Εὐκλείδης ἦτο πολὺ ἀνήσυχος, διότι ὁ Πουανκαρὲ δὲν εἶχεν ἀκόμη φθάση ἀπὸ τὸν οὐρανόν. «Πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ συμβαίνῃ αὐτό ;» εἶπε. «Ἔχω ἀκούσει, ὅτι αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι ἰσχύουν ἰδιαιτέρως διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις καὶ τὰ μεγάλα τρίγωνα. Εἶμαι πολὺ εὐχαριστημένος, συνέχισε, διότι οἱ πύραυλοί σας καὶ οἱ δορυφόροι σας ἵπτανται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς γεωμετρίας μου. Θὰ ἦτο ἐξόχως ἐνδιαφέρον, ἐὰν κανεὶς ἦτο δυνατὸν νὰ δώσῃ εἰς τὰ σχήματα αὐτὰ μὴ εὐκλείδειον ταχύτητα. Νομίζω, ὅτι διὰ τοιαύτης μὴ εὐκλειδείου ταχύτητος θὰ εἴχατε ἤδη ἀποβιβασθῆ τοὐλάχιστον εἰς τὴν σελήνην καὶ τὸν ἄρην. Εἶναι κρίμα, ὅτι οἱ κατασκευασταὶ τῶν πυραύλων καὶ τῶν δορυφόρων παραμελοῦν τὰς μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις». Ὅταν ἐδήλωσαν εἰς τὸν Γενικὸν Ἐπιθεωρητὴν τῶν Μαθηματικῶν, ὅλου τοῦ κόσμου, ὅτι ἡ σημερινὴ νεολαία μανθάνει τὴν γεωμετρίαν διὰ νὰ κερδίζῃ κάτι, ἀνεπήδησεν ἀπὸ τὸ κάθισμά του, ἤνοιξε τοὺς μεγάλους ὀφθαλμούς του, τοὺς ἔκλεισε πάλιν καὶ εἶπε μονολογῶν: Τί μεγάλαι μεταβολαὶ ἐπῆλθον τώρα εἰς τὴν ζωὴν τῶν ἀνθρώπων, ἐν ᾧ προηγουμένως ὁ ἔκλαμπρος ἥλιος τῆς Ἑλλάδος, αἱ διαυγεῖς γραμμαὶ τοῦ ὁρίζοντός της, τὸ διαρκὲς γέλοιο τῶν θαλασσῶν της, οἱ λαμπροὶ ναοί, τὰ μεγαλοπρεπῆ ἀγάλματα, οἱ ποιηταὶ καὶ αἱ φιλοσοφικαὶ συζητήσεις, τὰ πάντα τέλος προσεφέροντο διὰ τὴν ἀγωγὴν τῶν νέων!