

Sd. Stamates

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Α Ν Α Τ Υ Π Ο Ν

Ἐκ τῆς Μεγάλης Παιδαγωγικῆς Ἐγκυκλοπαιδείας



Ε Ν Α Θ Η Ν Α Ι Σ

1 9 6 8

Akademie der Wissenschaften der DDK
Zentralinstitut für Alte Geschichte u. Archäologie
Bibliothek

Sd
S 58

φμα. Δὲν εἶχεν, ἐπομένως, ἄδικον ὁ εἰπὼν ὅτι τὸ εὐθυμογράφημα εἶναι μία μορφή τραγωδίας γραμμένη ἀπὸ μεγάλου λογοτέχνη, ὁ ὁποῖος ἔχων συνειδητοποιήσει τὸ μάταιον τῆς ζωῆς, φθάνει εἰς τὸ σημείον τοῦ γέλιου, διότι ἔχει πρὸς τοῦτο τὴν δύναμιν, κάμων καὶ τοὺς ἄλλους νὰ γελοῦν μὲ τὰς μορφάς τοῦ ἀνθρώπου πάθους, τὰς ὁποίας διαγράφει, μὴ ἀποφεύγων οὔτε αὐτὴν τοῦ θανάτου. Ἡ γνώμη αὐτῆ δικαιώνει τὸν Μπάυρον ὁ ὁποῖος ἔλεγεν ὅτι οἱ πλέον φαῖδροι ἦρωες τῆς παγκοσμίου λογοτεχνίας εἶναι ὁ Δὼν Κιχώτης καὶ ὁ Σάντσο Πάντσα, ἀκριβῶς διότι ὡς θλιβεροὶ κάμνουν πολλοὺς νὰ γελοῦν μαζί των. Πρέπει ἐπίσης, εἰς τὸ σημείον τοῦτο νὰ ἐνθυμηθῶμεν τὸ δοκίμιον τοῦ Γρ. Ξενοπούλου «Διασκεδαστικὴ Τέχνη», ὅπου σημειώνει ὅτι τὸ νὰ περιφρονοῦν πολλοὶ Νεο-Ἕλληνας κριτικοὶ πολλὰ λογοτεχνικὰ διασκεδαστικὰ ἔργα τὰ ὁποία διασκεδάζουν τὸν κόσμον, καὶ διὰ τοῦτο νὰ ἐπαινοῦν ἐκεῖνα τὰ ὁποία προκαλοῦν πληξίν, αὐτὸ δὲν εἶναι τι ἄλλο παρὰ πλάνη. Πράγματι, ἡ Τέχνη δὲν κρίνεται μόνον ἀπὸ τὴν εὐχαρίστησιν ἢ τὴν ἄνιαν ποῦ προκαλεῖ. Εἶχεν ἄδικον ὅμως ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, ὅτι πλείστοι λογοτέχνη παρεξηγοῦν τὸ τί σημαίνει «διασκεδαστικόν, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ὠθοῦν εἰς τὸν χῶρον τῆς Τέχνης ὅτι εἶναι εὐθηνὸν καὶ ἀνάξιον λόγου, ἐπειδὴ τὸ κοινὸν ἀρέσκειται εἰς τὸ εὐθυμον. Ὅτι ἡ εὐθυμος νότα μέσα εἰς τὸν χῶρον τῆς Τέχνης εἶναι ἀπαραίτητος, τοῦτο δὲν τὸ παρέβλεψαν οὔτε ὁ Ὅμηρος οὔτε ὁ Ἡσίοδος οὔτε ὁ Πίνδαρος οὔτε οἱ Τραγικοί. Ἀπόδειξις ὅτι συνέδεον τὴν Τραγωδίαν μὲ τὸ Σατυρικὸν δρᾶμα. Διότι ἐβλεπον τὴν Τέχνην ὡς ἐνιαίαν καὶ ὡς ἀποστολὴν ἔχουσαν πέραν ἀπὸ τοῦ νὰ καλῆ εἰς στοχασμὸν νὰ προκαλῆ καὶ τὴν τέρψιν. Αὐτὴ ἡ θέσις, ἐπίσης, ἐξηγεῖ διατὶ ἡ αἴσθησις τοῦ «διασκεδαστικοῦ» δὲν εἶναι τι τὸ μονομερὲς ἢ τι τὸ ἀπολύτως ἀντικειμενικόν. Ἡ ἀκόμη διατὶ τὸ ἴδιον τὸ «διασκεδαστικόν» ἢ τὸ «εὐθυμον» διακρίνεται διὰ τὸ ποικίλον τῆς ἀποχρώσεως του, ὅτι δικαιώνει τὸν Σῶ ὁ ὁποῖος λέγει ὅτι ἡ εὐθυμία εἶναι ἐντελῶς προσωπικὸν θέμα. Συμπερασματικῶς: τὸ εὐθυμογράφημα, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ «ἀστέιον» καὶ τὸ «εὐτράπελον», εἶναι εἶδος τὸ ὁποῖον ὡς ἐκ τῆς φύσεώς του χωρεῖ πέραν τῆς ἐπιφανείας διὰ τῆς μεθόδου τῆς καθέτου τομῆς. Δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν ὅτι εἰς τὴν νεοελληνικὴν λογοτεχνίαν, πλὴν εὐτυχῶν ἐξαιρέσεων, τὸ εὐθυμογράφημα μένει εἰς τὸ περιθώριον, ἀπὸ παρεξήγησιν, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ὡς εἶδος ἡ εὐθυμος τέχνη ξεκινᾷ ἀπὸ τὰ προκλασσικὰ χρόνια, διὰ νὰ εὔρη εἰς τὸ πρόσωπον τῶν κλασσικῶν σατιρικῶν τὴν πλέον ὑπεύθυνον ἐκφρασίαν τῆς.

Ἄγγελος Φουριώτης

Εὐθύνη

I. Ἐννοια καὶ προβλήματα

Εὐθύνη εἶναι μία ἀπάντησις, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς τὸν ἀπαντῶντα καὶ μάλιστα εἰς ὀλόκληρον τὴν ὑπαρξίν του. Αὐτῆς προηγείται μία προσφώνησις, ἡ ὁποία καλεῖ τὸν προσφωνηθέντα νὰ ἀπαντήσῃ σχετικῶς μὲ τὴν εὐθύνην του. Αὕτη δυνατόν νὰ προέρχεται ἀπὸ ἄλλους ἀνθρώπους, ἀπὸ τὸν ἴδιον τὸν ἑαυτὸν ἢ ἀπὸ τὸν Θεόν· συμφώνως πρὸς ταῦτα διακρίνομεν κοινωνικὴν εὐθύνην, αὐτοεὐθύνην καὶ θρησκευτικὴν εὐθύνην. Κοινωνικὴ εὐθύνη εἶναι εὐθύνη ἀπέναντι τῆς κοινότητος, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἄνθρωπος εἶναι ὀφειλέτης· ἡ πλέον καταφανὴς μορφή αὐτῆς εἶναι ἡ εὐθύνη ἐνώπιον τοῦ δικαστηρίου. Αὐτοεὐθύνη ἀπαντᾷ εἰς τὴν ἀξίωσιν, τὴν ὁποίαν θέτει ὁ ἄνθρωπος εἰς τὸν ἴδιον τὸν ἑαυτὸν του καὶ ἐπειδὴ δὲν ἱκανοποιεῖ ταύτην, αἰσθάνεται ἐνοχος. Θρησκευτικὴ εὐθύνη εἶναι εὐθύνη ἀπέναντι τῆς ἀπολύτου ἀξιώσεως τοῦ Θεοῦ· ἐναντι αὐτοῦ ἡ ἐνοχὴ μεταβάλλεται εἰς ἁμαρτίαν.— Εὐθύνη εἶναι ἡ μεταβληθεῖσα εἰς στάσιν ἐτοιμότητος νὰ πειθαρχῆ εἰς τὴν προσφώνησιν καὶ ἀναλαμβάνων τὸ χρέος νὰ ἐγγυᾷ-

σαι διὰ τὸν ἑαυτὸν σου. Ὁ ὑπεύθυνος αἰσθάνεται ὅτι εἶναι ὑπεύθυνος ἀπέναντι τίνος καὶ διὰ τι· εὐθύνη εἰς τὴν κοινότητα μετ' ἄλλων εἶναι συνυπευθυνότης (ἀλληλεγγύη).

Εἶναι ἴδιον τοῦ χαρακτήρος τοῦ ἀνθρώπου νὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἀναλαμβάνῃ εὐθύνην. Ἐξ αἰτίας τούτου αἰσθάνεται ὡς ἐλευθέρως προσωπικότης· μόνον τότε δύναται τις νὰ ὀδηγήσῃ ἐνσυνειδήτως τινὰ εἰς τὴν εὐθύνην, ὅταν αἱ ἐνέργειαι του πηγάζουν ἀπὸ ἰδικὴν του συνεργίαν. Οὕτω γίνεται διὰ τὸν Κάντιον ἐκ τῆς ἠθικῆς εὐθύνης ἡ ἐλευθερία βεβαία παρὰ πᾶσαν ἀντίληψιν τῆς αἰτιοκρατικῆς δεσμεύσεως τοῦ ἀνθρώπου. Κατὰ πόσον ὅμως εἰς μεμονωμένην περίπτωσιν δύναται τις νὰ καταλογίξῃ εἰς τοὺς ἐνεργοῦντας (κυρίως παιδιὰ καὶ ἀνθρώπους μὲ ἠλαττωμένην ἱκανότητα κρίσεως) τὰς πράξεις των, ἔχει ἐκάστοτε ἀνάγκην μιᾶς ἰδιαιτέρας ἐξετάσεως. Ἐπίμαχον εἶναι πρὸ παντός, ἀπέναντι τίνος ἀνωτάτης ἀρχῆς εἶναι ὑπεύθυνος ὁ ἄνθρωπος. Ἐὰν ἀπέναντι τῆς κοινότητος (συνάνθρωπος, λαὸς, κράτος, ἀνθρωπότης κ.ο.κ.), τότε ἀποκτᾷ ἡ κοινωνικὴ εὐθύνη τὸν ἀνώτερον βαθμὸν (ἀλτρουϊσμός ὡς ἀξίωμα τῆς ἠθικῆς). Ἐὰν ὅμως γνωρίζῃ ὁ ἄνθρωπος ὅτι εἶναι ὑπεύθυνος ἀπέναντι τοῦ ἑαυτοῦ του, τότε δύναται νὰ νοηθῇ τὸ «ἑαυτοῦ» ἢ ὡς ἐλευθέρως βούλησις (ἄκριος ὑπαρξισμός) ἢ ὡς πραγματικὸς ἑαυτοῦ (συνειδησιακὴ ἠθικὴ). Ἐὰν τέλος θεωρῆται ὡς ἀνωτάτη ἀρχὴ ἡ ἀξίωσις τοῦ Θεοῦ (ὅπως ἐξαγγέλλεται εἰς τὰ συγγράμματα καὶ εἰς τὴν ἐκκλησίαν ἢ εἰς τὴν ὡς φωνὴν Θεοῦ ἐννοουμένην συνειδήσιν), τότε πᾶσα εὐθύνη γίνεται εὐθύνη ἀπέναντι τοῦ Θεοῦ. Ἡ περὶ τῆς ὀρθῆς αὐτοκατανοήσεως τοῦ ἀνθρώπου διαμάχη εἶναι πάντοτε καὶ μία διαμάχη περὶ τῆς ἀνωτάτης εὐθύνης.

II. Παιδαγωγικὴ ἀξιολόγησις

Εἰς ὄλους τοὺς παιδαγωγικῶς σπουδαίους τομεῖς ζωῆς (οἰκογένεια, σχολεῖον καὶ ἄλλοι τόποι μορφώσεως καὶ ἀναπτύξεως, ἐκκλησία κ.ο.κ.) ὑπάρχει μία ὀρισμένη εὐθύνη τοῦ παιδαγωγοῦ διὰ τοὺς ὑπὸ ἐκπαίδευσιν ἀνάληψις εὐθύνης εἶναι γενικῶς ἓνα βασικὸν χαρακτηριστικὸν τῆς παιδαγωγικῆς δραστηριότητος. Ἐνταῦθα σπουδαίαν σημασίαν ἔχει νὰ καταστήσῃ σὺ ὁ ἴδιος τὸν ὑπὸ ἐκπαίδευσιν ἓνα ὑπεύθυνον ἄνθρωπον. Ὅθεν πρέπει τις νὰ δεῖξῃ εἰς αὐτὸν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰς ἀξιώσεις, ἐναντι τῶν ὁποίων εἶναι ὑπεύθυνος, καὶ τὰς περιοχὰς ζωῆς, εἰς τὰς ὁποίας δύναται νὰ εἶναι ὑπεύθυνος διὰ τὸν ἑαυτὸν του καὶ δι' ἄλλους, καὶ ἀφ' ἑτέρου νὰ φροντίξῃ ὥστε εἰς μιαν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἐπικρατεῖ φόβος εὐθύνης νὰ ἀναλαμβάνῃ οὗτος ἀδιστακτικῶς καὶ μὲ σταθερὰν ἀπόφασιν τὴν εὐθύνην του (Ἐλευθερία).

Βιβλιογραφία: E. Grisebach, Die Grenzen des Erziehers u. seine U. (1924); E. Schlund OFM, V. (1926); W. Weischedel, Das Wesen der U. (1933); A. Schuler, U. (1948).

W. Weischedel

Εὐκλείδης

I. Βιογραφία

Μέγας Ἕλληνας μαθηματικὸς τῶν Ἀλεξανδρινῶν χρόνων. Ὁ τόπος καὶ ὁ χρόνος τῆς γεννήσεως καὶ τοῦ θανάτου αὐτοῦ δὲν εἶναι γνωστά. Κατὰ πᾶσαν πιθανότητα ἐγεννήθη περὶ τὸ 350 π.Χ. καὶ ἐσπούδασε φιλοσοφίαν καὶ μαθηματικὰ ἐν Ἀθήναις εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος. Φαίνεται ὅτι εἶχε διακριτὴν εἰς τὰς Ἀθήνας ὡς μαθηματικὸς καὶ εἶναι ὁ πρῶτος Πρύτανης τοῦ ὑπὸ τοῦ βασιλέως Πτολεμαίου τοῦ Α' ἰδρυθέντος ἐν Ἀλεξανδρείᾳ Πανεπιστημίου. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς διαμνημονεύσεως τοῦ νεοπλατωνικοῦ φιλοσόφου Πρόκλου (410-485 μ.Χ.), ὅστις εἰς τὰ σχολία αὐτοῦ εἰς τὸ α' βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου τοποθετεῖ αὐτὸν χρονικῶς ὀλίγον μετὰ τὸν μαθητὴν τοῦ Πλάτωνος Φίλιππον τὸν Μενδαῖον (καταγόμενον δηλ. ἐκ τῆς πόλεως Μένδης, τῆς Χαλκιδικῆς χερσονήσου) καὶ πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (287-212 π.Χ.) καὶ τοῦ Ἐρατοσθέ-

νους, λέγων τὰ ἐξῆς: «Γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου· νεώτερος μὲν οὖν ἐστὶ τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους. Οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὡς πού φησιν Ἐρατοσθένης. Καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστὶ καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκείος, ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν». Ἦκμασε δὲ ὁ ἀνὴρ οὗτος ἐπὶ Πτολεμαίου τοῦ Α' (323-285 π.Χ.)· εἶναι λοιπὸν νεώτερος τῶν μαθητῶν τοῦ Πλάτωνος, μεγαλύτερος δὲ τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Διότι αὐτοὶ ἦσαν σύγχρονοι μεταξύ των, ὡς λέγει κάπου ὁ Ἐρατοσθένης. Εἶναι δὲ ὁπαδὸς τῶν φιλοσοφικῶν θεωριῶν τοῦ Πλάτωνος καὶ οἰκείος πρὸς τὴν φιλοσοφίαν αὐτήν, καὶ ἔνεκα τοῦ λόγου τούτου ἔθεσεν ὡς τελικὸν σκοπὸν τῆς συγγραφῆς τῶν Στοιχείων τὴν κατασκευὴν τῶν καλουμένων πλατωνικῶν σχημάτων δηλ. τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων. (Procli in primum Eucl. Elem. Comm. Ἐκδ. C. Friedlein, Lipsiae 1873, σελ. 68,10. Ἀνατύπωσις Lipsiae 1967).

Παρὰ τοῦ μαθηματικοῦ Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως πληροφοροῦμεθα ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο εὐμενὴς πρὸς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ διδάσκωνται γεωμετρίαν (Πάππου Συναγωγή, ἔκδ. Hultsch, Βερολίνον 1877, τόμ. II σελ. 676, 37. Ἀνατύπωσις Hakker, Ἀμστερνταμ 1965), ὁ δὲ Στοβαῖος διέσωσε τὸ ἀκόλουθον χαρακτηριστικὸν ἐπισοδίου μεταξύ τοῦ Εὐκλείδου καὶ τινος μαθητοῦ του: «Παρ' Εὐκλείδῃ τις ἀρξάμενος γεωμετρῆν, ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην, τί δέ μοι πλέον ἐστὶ ταῦτα μανθάνοντι; Καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας «δὸς αὐτῷ, ἔφη, τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ἄν μανθάνει κερδαίνειν». [Ὅταν τις ἀρχίσας νὰ διδάσκειται γεωμετρίαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ἔμαθε τὸ πρῶτον θεώρημα (σημ.: κατασκευὴ ἰσοπλεύρου τριγώνου), ἠρώτησε τὸν Εὐκλείδην «καὶ τώρα τί κέρδος θὰ ἔχω ἀφοῦ ἔμαθα τοῦτο;». Καὶ ὁ Εὐκλείδης καλέσας τὸν ὑπηρέτην του, εἶπε, «δὸς του τρεῖς δεκάρες, ἐπειδὴ πρέπει νὰ κερδίξῃ ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ ὅποια μανθάνει». Ἀνθ. Στοβαίου, ἔκδ. Meineke, τόμ. IV σελ. 205. Ἀνανώσις C. Wachsmuth, Βερολίνον 1884, τόμ. 2 σελ. 228,114. Ἀνατύπωσις, Βερολίνον 1958)]. Εἰς τὸ προηγουμένως μνημονευθὲν μέρος τῶν σχολίων τοῦ Πρόκλου περιλαμβάνεται καὶ τὸ ἐξῆς ἀνέκδοτον: Λέγεται, ὅτι ὁ Πτολεμαῖος ὁ Α' ἠρώτησε κάποτε τὸν Εὐκλείδην, ἂν ὑπάρχη εὐκόλος τρόπος ἐκμάθησεν τῆς γεωμετρίας. Ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀπήντησεν ὅτι δὲν ὑπάρχει «βασιλικὴ ἀτραπὸς ἐπὶ γεωμετρίαν». Τὸ αὐτὸ ἀνέκδοτον μνημονεύει καὶ ὁ Στοβαῖος (ἐνθ' ἄνωτ.), ἀποδιδόμενον ὁμως μεταξύ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου καὶ τοῦ μαθητοῦ τοῦ Πλάτωνος, περιφήμου μαθηματικοῦ Μεναιχμοῦ, ὡς ἐξῆς: «Μεναιχμον τὸν γεωμέτρην Ἀλέξανδρος ἤξιον συντόμως αὐτῷ παραδοῦναι τὴν γεωμετρίαν· ὁ δὲ «ὦ βασιλεῦ», εἶπε, «κατὰ μὲν τὴν χώραν ὁδοὶ εἰσὶν ἰδιωτικαὶ καὶ βασιλικαί, ἐν δὲ τῇ γεωμετρίᾳ πᾶσιν ἐστὶν ὁδὸς μία». Ὁ Στοβαῖος γράφει ὅτι λαμβάνει τὰς πληροφορίας του ἐκ τῶν συγγραφῶν τοῦ μαθηματικοῦ Σερήνου (ἀκμὴ περὶ τὸ 350 μ.Χ.). Εἰς τὸν Εὐκλείδην ἀποδίδεται καὶ τὸ ἐξῆς μαθηματικὸν ἐπίγραμμα:

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι σίτον ἔβαινον·
αὐτὰρ ὄνος στεναχίζεν ἐπ' ἄχθει φόρτου ἑοῖς·
τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἔρέεινεν ἐκεῖνη·
«Μῆτερ τί κλαῖουσ' ὀλοφύρεαι, ἤτε κούρη;
εἰ μέτρον ἐν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἤρα·
εἰ δὲ ἐν ἀντιλάβῃς, πάντως ἰσότητα φυλάξεις».

Εἶπε τὸ μέτρον, ἄριστε γεωμετρῆς ἐπίστορ.

[Ἡμίονος καὶ ὄνος φορτωμένοι σίτον ὁδοιποροῦσαν / ἡ ὄνος ὁμως, ἔνεκα τοῦ βάρους, τὸ ὅποιον ἔφερον, ἐστενάξε· ταύτην ἰδοῦσα βαρυστενάχουσαν, ἠρώτησεν ἡ ἡμίονος / «Μήτηρ, γιατί θρηνεῖς κλαῖουσα σάν κορίτσι; / ἔάν μοῦ εἰδῆς ἓνα σάκκον θὰ ἔφερα διπλάσιους ἀπὸ σέ· / ἔάν δὲ ἐλάμβανες ἀπὸ ἐμὲ ἓνα θὰ εἶχαμε ἴσους». Εἶπε τὸν ἀριθμὸν τῶν σάκκων, ἄριστε γνῶστα τῆς γεωμετρίας. (Ἡ ἡμίονος ἔφερον 7 σάκκους καὶ ἡ ὄνος 5).

(Ε.Σ. Σταμάτη, Διοφάντου Ἀριθμητικά, Ὀργ. Ἐκδ. Διδασκ. Βιβλίων, Ἀθῆναι 1963, σελ. 402)].

II. Τὸ ἔργον τοῦ Εὐκλείδου

Ὁ Εὐκλείδης ἔγραψε πολλά ἔργα, ἐκ τῶν ὁποίων ἄλλα ἐσώθησαν καὶ ἄλλα ἀπωλέσθησαν. Εἰς τὰ διασωθέντα ἔργα περιλαμβάνονται τὰ ὑπὸ τοὺς τίτλους: 1) Στοιχεῖα, 2) Δεδομένα, 3) Ὀπτικά, 4) Κατοπτρικά, 5) Φαινόμενα (ἀστρονομία), 6) Κατατομὴ κανόνος (θεωρία μουσικῆς), 7) Εἰσαγωγή ἀρμονικῆ (ἐπίσης θεωρία μουσικῆς). Εἰς τὰ ἀπολεσθέντα ἔργα περιλαμβάνονται τὰ ὑπὸ τοὺς τίτλους: 1) Περί διαιρέσεων (σημμάτων), 2) Ψευδάρια. Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ περιλαμβάνοντο ἀπατηλοὶ συλλογισμοὶ διὰ νὰ ἐξασκήσουν τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν διάκρισιν τῶν ὀρθῶν ἀπὸ τοὺς ἀπατηλοῦς, τοὺς ψευδεῖς συλλογισμοῦς. 3) Πορίσματα, 4) Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ, εἰς δύο βιβλία (περὶ γεωμετρικῶν τόπων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ), 5) Κωνικαὶ τομαί, εἰς τέσσαρα βιβλία, 6) Μηχανικά, εἰς ἓν βιβλίον. Ἐκ τῶν διασωθέντων βιβλίων δὲν θεωροῦνται γνήσια ἢ Κατατομὴ κανόνος καὶ ἡ Εἰσαγωγή ἀρμονικῆ, ἅτινα ἀποδίδονται εἰς σημαντικῆς μαθητῶν τοῦ Εὐκλείδου. Μεταβολὰς ἔχουν ὑποστῆ καὶ τὰ ὑπὸ τοὺς τίτλους Ὀπτικά καὶ Κατοπτρικά ἔργα.

III. Τὰ Στοιχεῖα

1. Τὸ σπουδαιότατον καὶ ἀθάνατον ἔργον τοῦ Εὐκλείδου εἶναι τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Στοιχεῖα. Ὑπὸ τοῦτον νοοῦνται τὰ στοιχεῖα τῶν μαθηματικῶν. Ἡ ὅλη τοῦ περιφήμου αὐτοῦ συγγράμματος, τὸ ὅποιον ἀποτελεῖ τὸ μαθηματικὸν εὐαγγέλιον τῆς ἀνθρωπότητος, κατανέμεται εἰς δέκα τρία (13) βιβλία. Οἱ μεταγενέστεροι τοῦ Εὐκλείδου συγγραφεῖς, ἀναφερόμενοι εἰς αὐτὸν τὸν μνημονεύουν, κατὰ τὸ πλεῖστον, οὐχὶ ὀνομαστικῶς ἀλλὰ ὑπὸ τὸ ὄνομα «στοιχειωτῆς». Τὸ περιεχόμενον τῶν Στοιχείων προέρχεται ἐξ ἐμβριθεστάτης ἐπιλογῆς τῶν στοιχείων τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης τῆς δημιουργηθείσης ἀποκλειστικῶς ὑπὸ τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος ἀπὸ τοῦ 600 μέχρι τοῦ 300 π.Χ., ἢ τοῖς εἰς διάστημα 300 ἐτῶν (ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι τοῦ Εὐκλείδου). Δὲν εἶναι γνωστὸν ἂν εἰς τὰ Στοιχεῖα περιλαμβάνονται καὶ θεωρήματα ἐπινοηθέντα ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου. Πιστεύεται ὁμως ὅτι ἀρκετὰ ἐξ αὐτῶν ἀποτελοῦν εὐκλείδειον δημιουργίαν. Μνημειώδης καὶ εὐστοχωτάτη θεωρεῖται ἡ ἀξιολόγησις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τοῦ Πρόκλου, ὅστις εἰς τὸ ἀνωτέρω μνημονευθὲν ἔργον του σελ. 68,23 γράφει τὰ ἐξῆς: «Πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μεστά. Τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ ὀπτικά καὶ τὰ κατοπτρικά, τοιαῦτα δὲ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις, ἐτι δὲ τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον. Διαφερόντως δ' ἂν τις αὐτὸν ἀγασθεῖν κατὰ τὴν γεωμετρικὴν στοιχειώσιν τῆς τάξεως ἔνεκα καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν πρὸς τὰ στοιχεῖα πεποιημένων θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων. Καὶ γὰρ οὐχ' ὅσα ἐνεχώρει λέγειν ἀλλ' ὅσα στοιχειοῦν ἠδύνατο παρῆλθον, ... πάντας δὲ (τοὺς συλλογισμοὺς) ἀνελέγκτους καὶ ἀκριβεῖς καὶ πρὸς ἐπιστήμην οἰκείους... ἐτι δὲ λέγομεν τὴν οἰκονομίαν καὶ τὴν τάξιν, καὶ τὴν δύναμιν μεθ' ἧς ἕκαστα παραδίδωσιν... τὰ γὰρ ἀρχειδέστατα καὶ ἀπλούστατα θεωρήματα ἐνταῦθα συνήθροισται τάξιν λαβόντα τὴν πρέπουσαν... καθάπερ Ἀρχιμήδης καὶ Ἀπολλώνιος καὶ οἱ ἄλλοι πάντες φαίνονται τοῖς ἐν αὐτῇ τῇ πραγματείᾳ δεδειγμένοις ὡς ἀρχαῖς ὁμολογουμέναις χρώμενοι». [Ὑπάρχουν λοιπὸν καὶ πολλὰ ἄλλα μαθηματικὰ συγγράμματα τοῦ ἀνδρὸς τούτου πλήρη θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας. Διότι τοιαῦτα εἶναι καὶ τὰ Ὀπτικά καὶ τὰ Κατοπτρικά καὶ τὰ Στοιχεῖα τῆς μουσικῆς, προσέτι δὲ τὸ Περί διαιρέσεων βιβλίον. Κατ' ἐξοχὴν δὲ εἶναι δυνατόν νὰ θαυμάσῃ κανεὶς αὐτὸν διὰ τὴν καταχώρησιν τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας, ἔνεκα τῆς τάξεως καὶ τῆς ἐπιλογῆς τῶν θεωρημάτων καὶ τῶν προβλημάτων τῶν

καταλλήλων διὰ τὰ στοιχεῖα τῶν Μαθηματικῶν. Διότι δὲν περιέλαβεν ὅσα ἠδύνατο κανεῖς νὰ εἶπῃ περὶ αὐτῶν, ἀλλὰ μόνον ὅσα ἦσαν πράγματι στοιχεῖα..., περιέλαβε δὲ καὶ ὅλους τοὺς συλλογισμοὺς ἀνελέγκτους καὶ ἀκριβεῖς καὶ καταλλήλους πρὸς ἐπιστήμην..., προσέτι δὲ λέγομεν τὴν οἰκονομίαν καὶ τὴν τάξιν καὶ τὴν δύναμιν μὲ τὴν ὁποίαν παραδίδει ἕκαστον θεώρημα..., διότι ἐδῶ (εἰς τὰ Στοιχεῖα) ἔχουν συναθροισθῆ τὰ ἀρχοειδέστατα καὶ ἀπλούστατα θεωρήματα, λαβόντα τὴν πρέπουσαν τάξιν..., ὅπως βέβαια ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι (μεταγενέστεροι αὐτοῦ) μαθηματικοὶ χρησιμοποιοῦντες τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ὡς ἀληθείας ὁμολογουμένως]. Ἡ πρώτη ἐκδοσις τῶν Στοιχείων ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ὑπολογίζεται ὅτι ἔγινε περὶ τὸ 300 π.Χ. Περὶ τὸ 370 μ.Χ. ἔγινεν ἐκδοσις αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Ἑλληνος Πρυτάνεως τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ἀλεξανδρείας Θεώωνος τοῦ μαθηματικοῦ, πατρὸς τῆς φιλοσόφου καὶ μαθηματικοῦ Ὑπατίας, τῆς λιθοβοληθείσης ὑπὸ τοῦ θρησκολήπτου ὄχλου (416 μ.Χ.), τοῦ πυρπολήσαντος τὴν δευτέραν Βιβλιοθήκην τῆς Ἀλεξανδρείας, τὸ Σαραπεῖον, περιέχουσαν 90.000 τόμους (σημ.: Ἡ πρώτη Βιβλιοθήκη περιέχουσα 500.000 τόμους ἐκάη περὶ τὸ 47 π.Χ. ὅτε ὁ Ἰούλιος Καῖσαρ κατέλαβε τὴν Ἀλεξανδρείαν). Διὰ τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ 310 π.Χ. μέχρι 380 μ.Χ. δὲν εἶναι γνωστὸν πόσαι ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων ἔγιναν. Ὁ Θεὸν εἰς τὴν ἐκδοσίν του ἐπέφερε μερικάς μεταβολὰς διὰ νὰ καταστήσῃ αὐτὰ εὐκολώτερα διὰ τοὺς μαθητὰς του. Κατὰ τὸ 1809, ὅτε ὁ Ναπολέων Βοναπάρτης κατέλαβε τὴν Ρώμην, ὁ συνοδῶν αὐτὸν Γάλλος μαθηματικὸς Peyrard ἀνεκάλυψε εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ χειρόγραφον ἐκδοσὶν τῶν Στοιχείων προγενεστέρων καὶ ἀκριβοτέρων τῆς τοῦ Θεώωνος. Ταύτην ἐξέδωκεν ἐν Παρισίῳ κατὰ τὰ ἔτη 1814-1818. Ἡ πρώτη διὰ τοῦ τύπου γενομένη ἐκδοσις τῶν Στοιχείων ἔλαβε χώραν ἐν τῇ Βασιλείᾳ τῆς Ἑλβετίας κατὰ τὸ 1530, ὑπὸ τοῦ Simon Grynaeus. Σήμερον καλυτέρα ἐκδοσις θεωρεῖται ἡ γενομένη ἐν Λειψίᾳ ὑπὸ τοῦ Δανοῦ καθηγητοῦ I.L. Heiberg καὶ τοῦ Γερμανοῦ H. Menge. Αὕτη περιλαμβάνει 8 τόμους. Οἱ 4 πρώτοι τόμοι περιλαμβάνουν τὰ Στοιχεῖα. Ὁ πέμπτος ἔχει τὰ ἐπ' αὐτῶν σχόλια τῶν μεταγενεστέρων. Ὁ ἕκτος περιέχει τὰ Δεδομένα καὶ σχόλια ἐπ' αὐτῶν. Ὁ ἕβδομος περιλαμβάνει τὰ Ὀπτικά, σχόλια ἐπ' αὐτῶν, τὰ ἴδια Ὀπτικά κατ' ἐκδοσὶν τοῦ Θεώωνος, τὰ Κατοπτρικά καὶ σχόλια ἐπ' αὐτῶν. Εἰς τὸν ὄκτον τὸμον περιλαμβάνει τὰ Φαινόμενα, ἡ Κατατομὴ κανόνος, ἡ Εἰσαγωγὴ ἀρμονικῆ καὶ ἐλάχιστα ἀποσπάσματα ἐκ διαφόρων πραγματειῶν τοῦ Εὐκλείδου. Ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐκδοτῶν ἐξεδόθη καὶ 9ος τόμος περιέχων σχόλια τοῦ Ἀραβοῦ an-Nairizi (Ἀναριτίου) εἰς τὰ βιβλία 1-10 τῶν Στοιχείων (μετεφρ. εἰς τὴν λατινικὴν). (Οἱ πρώτοι 4 τόμοι 1883-1885, ὁ 5ος 1888, ὁ 6ος 1896, ὁ 7ος 1895, ὁ 8ος 1916, ὁ 9ος 1899). Ἐν Ἑλλάδι ὑπολογίζεται ὅτι αἱ τελευταῖαι χειρόγραφοι ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων ἔγιναν κατὰ τὸν 12-13. αἰῶνα. Ἡ πρώτη διὰ τοῦ τύπου ἐκδοσις τῶν Στοιχείων ἐν Ἑλλάδι ἔγινεν ὑπὸ τοῦ γράφοντος κατὰ τὰ ἔτη 1952-1957 ἐν Ἀθήναις, εἰς 4 τόμους. Αὕτη περιλαμβάνει τὸ ἀρχαῖον κείμενον, ἔναντι ἐκάστης σελίδος τούτου μετάφρασιν εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν καὶ ἐπεξεγήσεις. Αἱ ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων εἰς ὅλας τὰς γλώσσας τοῦ κόσμου εἶναι πάμπολλαι. Τὸ πλῆθος αὐτῶν ὑπολείπεται μόνον τῶν ἐκδόσεων τῆς Ἁγίας Γραφῆς.

Μὲ τὴν καταγραφὴν τῶν ἐκδόσεων τῶν Στοιχείων ἀσχολεῖται ἀπὸ ἐτῶν ὁ καθηγητὴς τοῦ Πολυτεχνείου τοῦ Μονάχου Max Steck, ὅστις ἐδημοσίευσε τὰς κυριώτερας ἐκδόσεις εἰς τὸ περιοδικὸν Forschungen und Fortschritte, 31ον ἔτος ἐκδόσεως, τεύχος 4, σελ. 113-117, ὑπὸ τὸν τίτλον Die geistige Tradition der frühen Euklid-Ausgaben (Ἡ πνευματικὴ παράδοσις τῶν πρώτων εὐκλείδειων ἐκδόσεων).

2. Τὸ περιεχόμενον τῶν Στοιχείων. Εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον προτάσσονται 23 ὀρίσμοι, 5

αἰτήματα καὶ 9 κοινὰ ἔννοιαι. Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀριστοτέλους τὰ αἰτήματα καὶ αἱ κοινὰ ἔννοιαι ὀνομάζονται ἀξιώματα. Ὁ ὅρος «κοινὰ ἔννοιαι» ἀπαντᾷ εἰς τοὺς Στωϊκοὺς. Ὁ Εὐκλείδης, καίτοι μεταγενέστερος τοῦ Ἀριστοτέλους, διετήρησε τὸν ὄρον τῶν Στωϊκῶν, ὁ ὁποῖος ὅμως, ὡς καὶ ὁ ὅρος «αἰτήματα», πιθανὸν νὰ ἦσαν ἐν χρήσει εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος. Πιθανὸν ὅμως οἱ ὅροι οὗτοι νὰ εἶναι δημιουργήματα τοῦ Αὐτολύκου, ὀλίγον πρεσβυτέρου τοῦ Εὐκλείδου, ἢ καὶ αὐτοῦ τοῦ Εὐκλείδου. Ἀκολουθοῦν 48 θεωρήματα καὶ προβλήματα, ὅπου ἐξετάζονται τὰ περὶ παραλλήλων εὐθειῶν καὶ τὰ περὶ τριγώνου. Τὸ πυθαγόρειον θεώρημα περιλαμβάνεται ὡς 47ον.

Τὸ δεύτερον βιβλίον περιέχει 14 θεωρήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ 10 πρῶτα ἀφοροῦν εἰς ἀλγεβραν, σπουδαζομένην γεωμετρικῶς. Ἐνδεκάτη πρότασις εἶναι ἡ πραγματευομένη τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον (τὸ λεγόμενον ὑπὸ τῶν νεωτέρων πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς).

Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον προτάσσονται 11 ὀρίσμοι καὶ ἀκολουθοῦν 37 θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα σπουδάζονται αἱ θεμελιώδεις ιδιότητες εἰς κύκλον.

Εἰς τὸ τέταρτον βιβλίον προτάσσονται 11 ὀρίσμοι καὶ ἔπονται 16 θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα σπουδάζεται ἡ κατασκευὴ τῶν ἀπλουστέρων κανονικῶν πολυγώνων.

Εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον προτάσσονται 18 ὀρίσμοι καὶ ἀκολουθοῦν 25 θεωρήματα, ὅπου μελετῶνται αἱ ιδιότητες τῶν ἀναλογίων. Ὀλόκληρον τὸ βιβλίον τοῦτο θεωρεῖται κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν δημιουργία τοῦ περιφήμου μαθηματικοῦ Εὐδόξου.

Εἰς τὸ ἕκτον βιβλίον προτάσσονται 5 ὀρίσμοι καὶ ἔπονται 33 θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα σπουδάζονται αἱ ιδιότητες τῶν ὁμοίων σχημάτων.

Τὰ βιβλία 7, 8, 9 περιέχουν τὰ στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὸ ἕβδομον βιβλίον προτάσσονται 23 ὀρίσμοι καὶ ἀκολουθοῦν 39 θεωρήματα. Τὸ ὄγδον βιβλίον περιέχει 27 θεωρήματα καὶ τὸ ἔνατον 36. Τὰ βιβλία 8 καὶ 9 δὲν περιέχουν ὀρίσμούς.

Εἰς τὸ δέκατον βιβλίον, ὅπερ εἶναι τὸ ἐκτενέστερον ὄλον, γίνεται ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν. Προτάσσονται 4 ὀρίσμοι καὶ ἀκολουθοῦν 115 θεωρήματα.

Τὰ τρία τελευταῖα βιβλία τῶν Στοιχείων περιέχουν τὴν στερεομετρίαν. Εἰς τὸ ἐνδέκατον προτάσσονται 28 ὀρίσμοι καὶ ἔπονται 39 θεωρήματα. Τὸ δωδέκατον περιλαμβάνει 18 θεωρήματα καὶ τὸ δέκατον τρίτον περιέχει ἐπίσης 18 θεωρήματα. Εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο βιβλίον σπουδάζεται ἡ ἔγγραφὴ τῶν κανονικῶν πολυέδρων εἰς σφαῖραν.

Τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Δεδομένα βιβλίον περιλαμβάνει 94 θεωρήματα, εἰς μερικά τῶν ὁποίων σπουδάζονται ἀλγεβρικαὶ καὶ τριγωνομετρικαὶ πρότασις ὑπὸ γεωμετρικῆν μορφήν. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὸ 93 θεώρημα, ὅπου σπουδάζεται γεωμετρικῶς ἡ πρότασις:

$$[2\eta\mu\gamma + 2\eta\mu(\alpha + \gamma)]: 2\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) = 2\eta\mu\alpha : 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}$$

καὶ

$$[2\eta\mu\gamma + 2\eta\mu(\alpha + \gamma)] \cdot \frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2} \cdot \eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)} = 2\eta\mu\alpha \cdot 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}$$

Τὰ πρῶτα θεωρήματα τριγωνομετρίας ἀπαντοῦν εἰς τὴν πραγματεῖαν Δεδομένα τοῦ Εὐκλείδου. Ὁ τριγωνομετρικὸς συμβολισμὸς εἶναι βέβαια πολὺ μεταγενέστερος, καὶ τῆς ἐποχῆς ἀκόμη τῆς Ἀναγεννήσεως. Τὸ περὶ Διαιρέσεων βιβλίον ἐδημοσιεύθη εἰς τὴν Εὐρώπην εἰς τὴν λατινικὴν, τροποποιημένον πολὺ καὶ μετὰ διάφορα ὀνόματα συγγραφέων οἰκαιοποιηθέντων αὐτοῦ!! Κατὰ τὸ 1851 ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Woerke ἀνεκάλυψε εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῶν Παρισίων παλαιὸν χειρόγραφον τοῦ ἔργου τούτου εἰς τὴν ἀραβικὴν καὶ ἐδημοσίευσεν αὐτὸ εἰς τὴν λατινικὴν. Ἐκ τῶν 36 θεωρημάτων τῆς πραγματείας αὐτῆς τοῦ Εὐκλείδου, ὁ

*Αρα μαθηματικὸς μετέφρασε τὰς ἀποδείξεις μόνον τεσσάρων (τῶν ὑπ' ἀριθ. 19,20,28,29), διότι κατὰ τὸν Ἄγγλον Heath τὰς ἄλλας ἐθεώρησε πολὺ εὐκόλους. Ἐν τῷ μεταξὺ ὁ Ἴταλὸς μαθηματικὸς καὶ ἔμπορος Λεονάρδος τῆς Πίζης (ἢ Fibonacci), κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Σταυροφοριῶν, περίπου 1180-1250, ἐδημοσίευσε τὸ βιβλίον αὐτὸ τοῦ Εὐκλείδου ὡς ἰδικόν του(!), μὲ μερικὰς τροποποιήσεις τοῦ εἰς τὴν ἀραβικὴν χειρογράφου, τὸ ὁποῖον ἐπρομηθεύθη εἰς τὴν Συρίαν. (T. Heath, A history of Greek Mathematics I, σελ. 429, Oxford 1921).

Τὰ σχήματα τῶν Στοιχείων σχεδιάζονται μόνον διὰ κανόνος καὶ διαβήτου (εὐθεῖαι καὶ κύκλοι). Ὁ λόγος εἶναι, πιστεύεται, θρησκευτικὸς. Διὰ τῆς εὐθείας ἐκφράζεται τὸ γινόμενον καὶ φθειρόμενον, τὸ πέρασ καὶ τὸ ἀπειρον, ἢ ὕλη. Ὁ κύκλος δὲν ἔχει ἀρχὴν καὶ τέλος. Συμβολίζει τὸ θεῖον. Τὰ σχήματα τῶν Στοιχείων ἐκφράζουν κατὰ ταῦτα τὸ πνεῦμα - ψυχὴν καὶ τὴν ὕλην. Οὐδεμία ἄλλη καμπύλη ὑπάρχει εἰς τὰ Στοιχεῖα καὶ τὰ Δεδομένα, πλὴν τοῦ κύκλου.

Οὐδεὶς ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς ὑπάρχει εἰς αὐτὰ καὶ τοῦτο, διότι μόνον αἱ ἀφηρημένοι γεωμετρικαὶ καὶ ἀριθμητικαὶ ἔννοιαι θεωροῦνται ὡς συμβάλλουσαι εἰς τὴν καλλιέργειαν καὶ τὴν μόρφωσιν τῆς ψυχῆς καὶ ὄχι τὰ πρακτικὰ πράγματα. Ἐδῶ φαίνεται καθαρὰ ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἀκολουθεῖ κατὰ τὴν συγγραφὴν τῶν Στοιχείων τὸν Πλάτωνα, ὅστις εἰς τὴν Πολιτείαν λέγει: «σφόδρα ἄνω ποι ἄγει τὴν ψυχὴν καὶ περὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν ἀναγκάζει διαλέγεσθαι, οὐδαμῆ ἀποδεχόμενον, ἔάν τις αὐτῆ ὁρατὰ ἢ ἀπτά σώματα ἔχοντα ἀριθμοὺς προτεινόμενος διαλέγηται» (525 d) [Παρὰ πολὺ ὑψηλὰ δδῆγει τὴν ψυχὴν (τὸ περὶ τοὺς λογισμοὺς μάθημα) καὶ ἀναγκάζει αὐτὴν νὰ διαλέγεται περὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν, ἐπ' οὐδενὶ λόγῳ παραδεχόμενον (τὸ μάθημα αὐτὸ), ἔάν τις διαλέγεται προτείνων ὁρατὰ ἢ ἀπτά σώματα ἐκφραζόμενα δι' ἀριθμῶν]. Ἡ παιδαγωγικὴ λοιπὸν ἀξία τῶν μαθηματικῶν ἐγκείται κατὰ τὸν Πλάτωνα, καὶ τὸν ὁπαδὸν αὐτοῦ Εὐκλείδην, πρωτίστως εἰς τὴν θεωρίαν, εἰς τὸν νοητὸν λόγον, ὅστις «αἰσθητῶ παντάπασιν οὐδενὶ προσχρόμενος...» (511 b) (ὁ νοητὸς λόγος, δηλ. αἱ ἀποδείξεις τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τῆς γεωμετρίας ἐπ' οὐδενὶ λόγῳ χρησιμοποιοῦσαι αἰσθητὰ πράγματα...). Εἰς ἄλλο χωρίον τῆς Πολιτείας ὁ Πλάτων λέγει ὅτι σκοπὸς τῆς γεωμετρίας εἶναι νὰ καταστήσῃ εὐκολώτερον κατανοητὴν τὴν ἰδέαν τοῦ Ἁγαθοῦ, δηλ. τοῦ Θεοῦ (πρὸς τὸ κατιδεῖν ῥᾶον τὴν τοῦ ἀγαθοῦ ἰδέαν) (526 de).

3. Ἡ μαθηματικὴ ἐπιστῆμη, τῆς ὁποίας τὰ Στοιχεῖα περιέλαβε μὲ ἀνέλεγκτον ἀκρίβειαν καὶ τέχνην εἰς τὸ ἀθάνατον ἔργον τοῦ ὁ Εὐκλείδης εἶναι ἀποκλειστικὸν δημιούργημα τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος. Βασίζεται εἰς τὴν ἐπινόησιν τῆς ἀποδείξεως. Αὕτη ἀποδίδεται εἰς τὸν Θαλῆν τὸν Μιλήσιον καὶ ἐξαιρεταῖ ἰδιαζόντως ὑπὸ τοῦ μεγαλύτερου Γερμανοῦ φιλοσόφου Καντίου, εἰς τὸν πρόλογον τῆς δευτέρας ἐκδόσεως τῆς πραγματείας του Κριτικῆ τοῦ Καθαροῦ Λόγου (Imm. Kant, Kritik der reinen Vernunft, R. Schmidt, Leipzig 1944). Αἱ μέθοδοι ἀποδείξεως, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῖ ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ Στοιχεῖα εἶναι τέσσαρες: 1) ἡ συνθετικὴ, 2) ἡ ἀναλυτικὴ, 3) ἡ τῆς εἰς ἄτοπον (ἢ ἀδύνατον) ἀπαγωγῆς καὶ 4) ἡ μέθοδος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς. Πρὸ 70 περίπου ἐτῶν καὶ ἐξῆς ἐγένετο ἰδιαίτερα ἐξύμνησις τῆς ἀξίας τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ὑπὸ τῶν Εὐρωπαίων. Ὅταν ὁμως περὶ τὸ 1950 ἀνεκάλυφθη ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη ἐχρησιμοποιεῖτο ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων καὶ ἀπαντᾷ καὶ εἰς πολλὰ θεωρήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἐχάθη αἰφνιδίως ἡ ἰδιαίτερα αὕτη ἐξύμνησις. Τὸ αὐτὸ συνέβη καὶ μὲ τὴν «ἀξιοιατικὴν μέθοδον τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν», τὴν ὁποίαν πολλοὶ νεώτεροι, ἐξ ἀγνοίας, ἐθεώρησαν ὡς δημιούργημα τῶν νεωτέρων χρόνων, ἐνῶ αὕτη χρονολογεῖται μόνον ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Θαλοῦ, ἦτοι ἀπὸ τοῦ 600 π.Χ.

Ἡ γεωμετρία τῶν Ἑλλήνων εἶναι ἡ ἐπιστῆμη ἢ

ἐρευνῶσα τὰς ιδιότητες τοῦ χώρου, τὸν ὁποῖον θεωρεῖ τρισδιάστατον (μῆκος, πλάτος, ὕψος). Τὸ ὅλον οἰκοδόμημα αὐτῆς στηρίζεται εἰς τὴν ἀναπόδεικτον ἔννοιαν «σημείου». Σημεῖον εἶναι πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος, λέγει ὁ Εὐκλείδης. Ἀπὸ πολλὰ σημεῖα ὁμως νοοῦμεν ἀποτελουμένας τὰς γραμμάς, ἀπὸ πολλὰς γραμμάς ἀποτελουμένας τὰς ἐπιφανείας, ἀπὸ πολλὰς ἐπιφανείας ἀποτελούμενα τὰ στερεά. Ἡ βασικὴ λοιπὸν ἔννοια σημεῖον εἶναι ἀκαθόριστος. Ὡστε ἡ γεωμετρία ἔχει σχετικὴν ἀξίαν (ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν φιλοσοφίαν, ἢ ὁποία ἔχει ἀπόλυτον), ὡς παρατηροῦμεν εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος, ὅπου γράφεται: «ὦ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὁ μὴ οἶδε, τελευτῆ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπλέκεται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι; Οὐδεμία ἢ δ' ὅς» (533c). [Διότι ἐὰν χρησιμοποιηθῆται ὡς ἀρχὴ (ὡς βάσις) κατὰ ἄγνωστον (δηλ. ἡ ἔννοια σημεῖον), διὰ τοῦ ἀγνώστου δὲ αὐτοῦ συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῶν τελικῶν καὶ ἐνδιαμέσων προτάσεων, ποία λογικὴ σκέψις δύναται νὰ παραδεχθῆ ποτὲ τὴν τοιαύτην συναρμολόγησιν ὡς ἐπιστήμην; Οὐδεμία, ἀπήντησεν ἐκεῖνος].

4. Πρὸ 100 περίπου ἐτῶν διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ 5. αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου (τῶν παραλλήλων) δι' ἄλλων ἀξιωματῶν ἐδημιουργήθησαν, ὡς λέγεται, αἱ μὴ *Εὐκλείδειοι* γεωμετρίαι. Τὸ 5. αἶτημα τοῦ Εὐκλείδου λέγει (καθ' ἀπλὴν διατύπωσιν) ὅτι ἕκ τινος σημείου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς δοθείσαν ἐπ' αὐτοῦ εὐθείαν ἄγεται μία καὶ μόνη παράλληλος. Ἐὰν τὸ 5. αἶτημα ἀντικατασταθῆ μὲ τὸ ἀξίωμα ὅτι «ἕκ τινος σημείου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς δοθείσαν ἐπ' αὐτοῦ εὐθείαν ἄγονται ἄπειροι παράλληλοι (δηλ. μὴ τέμνουσαι) εὐθεῖαι», δημιουργεῖται ἡ λεγομένη *ὑπερβολικὴ γεωμετρία*. Ἐὰν τὸ 5. αἶτημα ἀντικατασταθῆ μὲ τὸ ἀξίωμα ὅτι «ἕκ τινος σημείου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς δοθείσαν ἐπ' αὐτοῦ εὐθείαν οὐδεμία ἄγεται παράλληλος» δημιουργεῖται ἡ λεγομένη *ἐλλειπτικὴ γεωμετρία* τοῦ Ρῆμαν. Εἰς αὐτὴν στηρίζεται καὶ ἡ θεωρία τῆς σχετικότητος, τῆς ὁποίας ἡ ἀξία κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους, ἰδίως τῆς γενικῆς θεωρίας τῆς σχετικότητος, ἀμφισβητεῖται πολὺ. Ὑπὸ πολλῶν νεωτέρων παρατηρεῖται ὅτι ἡ ὀνομασία «μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι» εἶναι ἀτυχῆς. Ὁ ὀρθὸς ὅρος θὰ ἦτο ἀσκήσεις τινὲς ἐπὶ τῆς γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδου, διότι πλὴν τοῦ 5. αἰτήματος, ὀλόκληρον τὸ οἰκοδόμημα αὐτῶν εἶναι εὐκλείδειον. Εἶναι δὲ εὐλόγος ἡ ἀπορία διατὶ εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἀτομικῶν βομβῶν, τῶν ἀτομικῶν ἀντιδραστήρων, τῶν πυραύλων, τῶν ἀεροπλάνων, τῶν αὐτοκινήτων κλπ. χρησιμοποιεῖται μόνον ἡ εὐκλείδειος γεωμετρία καὶ περιφρονοῦνται τόσον καταφῶρος αἱ λεγόμεναι μὴ εὐκλείδειοι. Τέλος, ἡ προσπάθεια ἐνὸς σπουδαίου μαθηματικοῦ, ὡς ὁ Γερμανὸς D. Hilbert (Δαυῖδ Χίλμπερτ 1862-1943), ὅπως διορθῶσιν τὸν Εὐκλείδην, θεωρεῖται ὡς ἀτυχῆς καὶ ἔχει προκαλέσει τὴν θυμηδίαν καὶ εἰρωνείαν τοῦ ἐπίσης σπουδαίου Γερμανοῦ μαθηματικοῦ G. Frege (Jahresbericht DMV 12, 1903 - Ἐπετηρὶς Ἐνώσεως Γερμανῶν Μαθηματικῶν).

Βιβλιογραφία: Euclidis, Opera omnia, I. L. Heiberg et H. Menge, τόμοι 8, ἀρχαῖον κείμενον μὲ λατινικὴν μετάφρασιν.—Εὐκλείδου Γεωμετρία κλπ. E. S. Σταμάτης, Στοιχεῖον βιβλία 13, τόμοι 4, Ἀθῆναι (1952-1957) (ἀρχαῖον κείμενον, μετάφρασις, ἐπεξηγήσεις).—De Pythagore à Euclide, Paul-Henri Michel, Paris (1950), Les Belles Letters; K. Δ. Γεωργούλη, Ἡ Ἑλληνικὴ Ἐπιστῆμη, εἰς λεξικὸν Ἡλίου, τόμ. Ἐλλάς.—M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I (1907, ἀνατύπωσις 1965), B. G. Teubner, Stuttgart; T. L. Heath, A history of Greek mathematics I, II, Oxford (1921); Clarendon Press; Charles Mugler, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs, Paris (1958), C. Klincksieck.

E. S. Σταμάτης

Εὐλάβεια

I. Οὐσία

Ἡ εὐλάβεια ὑπὸ τὴν εὐρύτεραν σημασίαν τῆς ἐννοίας ἐκφράζει μίαν βασικὴν στάσιν τοῦ ἀνθρώπου