HELIKON

RIVISTA DI TRADIZIONE E CULTURA CLASSICA
DELL'UNIVERSITÀ DI MESSINA

DIRETTORI

ANTONIO MAZZARINO — JOHANNES IRMSCHER

"L'ERMA" di BRETSCHNEIDER - ROMA
1969-1970

HELIKON

RIVISTA DI TRADIZIONE E CULTURA CLASSICA
DELL'UNIVERSITÀ DI MESSINA

DIRETTORI

ANTONIO MAZZARINO   JOHANNES IRMSCHER

"L'ERMA" di BRETSCHNEIDER - ROMA
1969-1970

HELIKON

RIVISTA DI TRADIZIONE E CULTURA CLASSICA
DELL'UNIVERSITÀ DI MESSINA

L'abbonamento annuo, *per l'Italia* è di L. 7000, *per l'Estero* $15 00; La quota di abbonamento va versata sul c. c. p. n. 1/14883 intestato a «L'ERMA» di BRETSCHNEIDER - ROMA. Via Cassiodoro 19. Agli abbonati residenti all'Estero la rivista sarà inviata per raccomandata: le spese di spedizione saranno a carico del destinatario.

Articoli, recensioni, libri e riviste dovranno essere spediti alla DIREZIONE: Prof. ANTONIO MAZZARINO, via Imperia 56, Roma. Gli autori sono vivamente pregati di inviare i manoscritti redatti nella forma definitiva. I manoscritti non accettati dalla Direzione saranno debitamente restituiti.

HELIKON

RIVISTA DI TRADIZIONE E CULTURA CLASSICA
DELL'UNIVERSITÀ DI MESSINA

Anni IX-X 1969-1970

cenae fercula nostrae
malim convivis quam placuisse cocis
Mart. 9,81,3-4

"L'ERMA" di BRETSCHNEIDER - ROMA

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ
(Atene)

ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ

I. Αἱ ἀρχαὶ τῶν μαθηματικῶν

Εἰς τὸν Θαλῆν τὸν Μιλήσιον ἀποδίδεται ἡ ἐπινόησις τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ μαθηματικά, ἥτις κατὰ τὸν Max Steck θεωρεῖται τὸ θεμέλιον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐρείδεται ἡ δημιουργία τοῦ πολιτισμοῦ (Die geistige Tradition der frühen Euklid — Ausgaben, Zschr. Forschungen und Fortschritte 31, S. 113-117, 1957). Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Θαλοῦ μέχρι τῆς ἐποχῆς κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ Εὐκλείδης συνέταξε τὴν περίφημον πραγματείαν του ὑπὸ τὸν τίτλον Στοιχεῖα παρῆλθον 300 περίπου ἔτη γονιμωτάτης μαθηματικῆς δημιουργίας τῶν Ἑλλήνων. Οἱ σπουδαιότεροι μαθηματικοί, οἱ ὁποῖοι συνέβαλον εἰς τὴν δημιουργίαν αὐτὴν μνημονεύονται ὑπὸ τοῦ Πρόκλου εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὸ α΄ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (ἔκδ. Friedlein, σ. 65-68. B. G. Teubner, 1873). Ἡ συμβολὴ τοῦ Ἀριστοτέλους εἰς τὴν δημιουργίαν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἔγκειται κυρίως εἰς τὸ ὅτι οὗτος διεμόρφωσε τὴν Λογικὴν ὡς ἐπιστήμην. Τὴν Λογικὴν αὐτὴν ἐχρησιμοποίησεν ὁ Εὐκλείδης κατὰ τὴν σύνταξιν τῶν Στοιχείων του. Καὶ ἄλλοι πρὸ τοῦ Εὐκλείδου εἶχον γράψει Στοιχεῖα τῶν μαθηματικῶν, τὰ ὁποῖα ὅμως δὲν ἐπέζησαν ἀφ᾿ ἧς ἐποχῆς ὁ Εὐκλείδης ἐξέδωκε τὴν ἰδικήν του πραγματείαν, εἰς τὴν ὁποίαν κατὰ τὴν μαρτυρίαν τοῦ Πρόκλου, τὰ ὑπὸ τῶν προηγουμένων του μαλακώτερον ἀποδεικνυόμενα θεωρήματα ἀπέδειξε δι᾿ ἀνεπιδέκτων ἀμφισβητήσεως ἀποδείξεων (τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών) (ἔνθ. ἀνωτ. 68,9).

Τὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖον ἀντιμετώπισεν ὁ Ἀριστοτέλης κατὰ τὰς ἐρεύνας του εἰς τὴν Λογικὴν εἶναι τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὰς ὑψίστας ἀποδεικτικὰς ἀρχάς, ὄχι μόνον τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ἀλλὰ καὶ πάσης ἄλλης ἐπιστήμης.

Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη δύο εἶναι αἱ ὕψισται ἀποδεικτικαὶ ἀρχαί, οἱ νόμοι ὡς λέγονται ὑπὸ πολλῶν, τῆς διανοήσεως. Ἡ ἀρχὴ τῆς ἀντιφάσεως (contradictio) καὶ ἡ ἀρχὴ τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως (tertium non datur). Ἡ ἀρχὴ τῆς ἀντιφάσεως διατυποῦται ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους ὡς ἑξῆς: « τὸ γὰρ αὐτὸ ἅμα ὑπάρχειν τε καὶ μὴ ὑπάρχειν ἀδύνατον τῷ αὐτῷ καὶ κατὰ τὸ αὐτό ». (Μετὰ τὰ Φυσικὰ 1005 B 19), (ὁ ἴδιος προσδιορισμὸς εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποδίδεται καὶ νὰ μὴ ἀποδίδεται εἰς τὸ αὐτὸ πρᾶγμα, κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν στιγμὴν καὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἐπόψεως). Εἶναι δὲ κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἡ ἀρχὴ αὕτη βεβαιοτάτη πασῶν περὶ ἣν διαψευσθῆναι ἀδύνατον (Μ. Φ. 1005 B 11). Ἡ ἀρχὴ τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως διατυποῦται ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους ὡς ἑξῆς: « ἀλλὰ μὴν οὐδὲ μεταξὺ ἀντιφάσεως ἐνδέχεται εἶναι οὐθέν, ἀλλὰ ἀνάγκη ἢ φάναι ἢ ἀποφάναι ἓν καθ' ἑνὸς ὁτιοῦν (Μ. Φ. 1011 B 23), (ἀλλὰ βεβαίως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ τι μεταξὺ τῶν δύο μελῶν τῆς ἀντιφάσεως, ἀλλ' εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκφέρωμεν περὶ πράγματός τινος μίαν ἀπόφανσιν μόνον, τουτέστιν ἢ μίαν κατάφασιν ἢ μίαν ἄρνησιν). Κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη ἀσκεῖται κριτικὴ ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως τῆς Λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους, προβαλλομένου μεταξὺ ἄλλων καὶ τοῦ ἑξῆς ἐπιχειρήματος:

« I. Πᾶς ἄρτιος ἀριθμός, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2 δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἄθροισμα δύο πρώτων ἀριθμῶν. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποδειχθῇ.

II. Ὑπάρχει εἷς ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2 καὶ δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἄθροισμα δύο πρώτων ἀριθμῶν. Καὶ ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποδειχθῇ. Κλονίζεται ἄρα ἡ ἰσχὺς τῆς ἀρχῆς τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως ».

Συμφώνως πρὸς τὴν διατύπωσιν τοῦ Ἀριστοτέλους ἡ δευτέρα ἐκ τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων ἔπρεπε νὰ εἶναι « πᾶς ἄρτιος ἀριθμός, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2 δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἄθροισμα δύο πρώτων ἀριθμῶν ». Ἐκτὸς ὅμως τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς ἡ διατύπωσις τῶν ἀνωτέρω προτάσεων I καὶ II εἶναι ἐλλιπὴς καὶ ἀσαφής, διότι εἶναι γνωστὸν ὅτι ἄλλοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι μεγαλύτεροι τοῦ 2 ἀναλύονται ὡς ἄθροισμα δύο πρώτων ἀριθμῶν, ὡς πχ. 4, 6, 10, 14, 22 . . . καί ἄλλοι δὲν ἀναλύονται, ὡς π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 16, 18. Τοὐλάχιστον ἐκ τοῦ παραδείγματος αὐτοῦ εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιχειρηματολογία κατὰ τῆς ἀρχῆς τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως δὲν εἶναι ἰσχυρά.

Θέμα τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης εἶναι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἡ κατηγορία τῆς ποσότητος, τὴν ὁποίαν οὗτος καθορίζει ὡς ἑξῆς: « Ποσὸν λέγεται τὸ διαιρετὸν εἰς ἐνυπάρχοντα, ὧν ἑκάτερον, ἢ ἕκαστον, ἕν τι καὶ τόδε τι πέφυκεν εἶναι· πλῆθος μὲν οὖν ποσόν τι ἐὰν ἀριθμητὸν ᾖ, μέγεθος δὲ ἂν μετρητὸν ᾖ (Μ. Φ. 1020 α 7) (Ποσὸν λέγεται πᾶν ὅ, τι δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἐμπεριέχονται εἰς αὐτό, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον, εἴτε δύο εἶναι αὐτὰ εἴτε καὶ περισσότερα, παρουσιάζεται ὡς καθ' αὐτὸ ὑπάρχον καὶ αὐτοτελές κάτι. Ἓν ποσὸν καλεῖται πλῆθος ἂν εἶναι ἐπιδεκτικὸν ἀριθμήσεως, μέγεθος δὲ ἂν εἶναι ἐπιδεκτικὸν μετρήσεως. Λέγεται δὲ πλῆθος μὲν ἐκεῖνο τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς στοιχεῖα μὴ ἔχοντα συνέχειαν τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο, μέγεθος δὲ τὸ διαιρούμενον εἰς στοιχεῖα, ἅτινα ἔχουν συνέχειαν τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο). Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη (ὡς συνάγεται ἐκ τῶν πραγματειῶν του) πᾶσα γνῶσις ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενόν τι, ὅπερ καλεῖται ἐπιστητόν. Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς ἀριθμητικῆς, ἐν ᾧ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς γεωμετρίας. Ἡ ἐπιστήμη εἶναι ἔννοια σχετικὴ μὴ δυναμένη νὰ ὑπάρξῃ ἄνευ τοῦ ἐπιστητοῦ. Τὰ συστατικὰ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τρία: 1) Οἱ ἀριθμοὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ ὁ χῶρος διὰ τὴν γεωμετρίαν, 2) αἱ πρὸς ἀπόδειξιν τιθέμεναι προτάσεις, καὶ 3) αἱ ἀποδεικτικαὶ ἀρχαὶ τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν διαδικασίαν. Ἡ ἀποστολὴ τῶν μαθηματικῶν εἶναι νὰ δείξουν μετὰ βεβαιότητος τὸν ἀποδεικτικὸν λόγον ἐπὶ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται ἡ ἀλήθεια μιᾶς δοθείσης προτάσεως. Τοῦτο θὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῆς προτάσεως εἰς ἀρχικὰς καὶ φανερὰς ἀφ' ἑαυτῶν προτάσεις, δηλ. εἰς τὰ ἀξιώματα.

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἐννοίας ἀριθμὸς προσκρούει εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῆς ἐννοίας ἄπειρον, ὡς τοῦτο γίνεται ἀμέσως φανερόν, ὅταν θελήσωμεν νὰ ἀποφανθῶμεν διὰ τὰ σύμβολα π καί e, ἂν εἶναι ἀριθμοί. Ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ χώρου προσκρούει καὶ εἰς τὴν ἔννοιαν ἄπειρον καὶ τὴν ἔννοιαν σημεῖον. Κατὰ τὸν εὐκλείδειον ὁρισμὸν « σημεῖον ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν ». Διὰ τῆς ἐννοίας αὐτῆς, τῆς ὑπὸ πολλῶν θεωρουμένης ὡς μὴ ἱκανοποιητικῶς καθοριζομένης, σχηματίζονται αἱ ἔννοιαι γραμμή, ἐπιφάνεια, στερεόν. Ἡ κριτικὴ τοῦ εὐκλειδείου ὁρισμοῦ τοῦ σημείου καὶ τῆς ἐννοίας τοῦ χώρου ὑφίσταται ἀπὸ τῆς ἀρχαίας ἐποχῆς. Ὁ Σέξτος ὁ Ἐμπειρικὸς ἀναφερόμενος εἰς τὴν κατ' αὐτὸν μὴ ἱκανοποιητικῶς καθοριζομένην ἔννοιαν σημεῖον γράφει τὰ ἀκόλουθα:

« εἶτα ἐπί τούτοις πρόβλημά ἐστι τὸν κύκλον δίχα τεμεῖν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. τὸ γὰρ κέντρον, ὅπερ παντὸς κύκλου μεσαίτατόν ἐστιν, ἤτοι δίχα τέμνεται κατὰ τὴν τοῦ κύκλου διχοτόμησιν ἢ τῷ ἑτέρῳ προσμερίζεται τμήματι. ἀλλὰ δίχα μὲν τμηθῆναι τῶν ἀδυνάτων· πῶς γὰρ οἷόν τε τὸ ἀμερὲς ἐπινοεῖν μεριζόμενον; εἰ δὲ τῷ ἑτέρῳ προσμερίζεται τμήματι ἄνισα γίνεται τὰ τμήματα καὶ ὁ κύκλος οὐ μέσος διαιρεῖται (Sex. Emp. Opera. Πρός Φυσικούς Α', Adv. Mathem. IX 284, H. Mutschmann, G. B. Teubner, 1914). (Πρὸς τούτοις τίθεται κατόπιν τὸ πρόβλημα νὰ διαιρεθῇ ὁ κύκλος εἰς δύο ἴσα μέρη ὅπερ εἶναι ἀδύνατον· διότι τὸ κέντρον τὸ ὁποῖον εἰς πάντα κύκλον εἶναι εἰς τὸ μέσον ἢ διχοτομεῖται κατὰ τὴν διχοτόμησιν τοῦ κύκλου ἢ μεταβαίνει εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο τμημάτων. Ἀλλὰ νὰ διχοτομηθῇ μὲν εἶναι ἐκ τῶν ἀδυνάτων· διότι πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπινοήσωμεν ὅτι τὸ ἀμερές μερίζεται; ἐὰν δὲ μεταβαίνῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο τμημάτων, τὰ τμήματα γίνονται ἄνισα καὶ ὁ κύκλος δὲν διχοτομεῖται).

Ὁ θεωρούμενος μὴ ἱκανοποιητικὸς εὐκλείδειος ὁρισμός τοῦ σημείου παρέσχεν ἀφορμὴν εἰς τὸν David Hilbert νὰ διατυπώσῃ « πλῆρες καὶ κατὰ τὸ δυνατὸν ἁπλοῦν σύστημα ἀξιωμάτων καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τούτων νὰ παραγάγῃ τὰ σπουδαιότερα γεωμετρικὰ θεωρήματα κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ καθίσταται ἐμφανὴς ἡ σημασία τῶν διαφόρων ὁμάδων ἀξιωμάτων καὶ ἡ σπουδαιότης τῶν ἐκ τῶν καθ' ἕκαστα ἀξιωμάτων δυναμένων νὰ συνάγωνται συμπερασμάτων ». Τῆς διατυπώσεως τῶν ἀξιωμάτων προτάσσει ὁ Hilbert τὸν ἑξῆς θεμελιώδη ὁρισμόν (Erklärung): « Θεωροῦμεν τρία διάφορα συστήματα πραγμάτων: τὰ πράγματα τοῦ πρώτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν σημεῖα καὶ τὰ παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων A, B, C ... τὰ πράγματα τοῦ δευτέρου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν εὐθείας καὶ τὰ παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων a, b, c ...· τὰ πράγματα τοῦ τρίτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν ἐπίπεδα καὶ τὰ παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων, α, β, γ... Τὰ σημεῖα τὰ καλοῦμεν στοιχεῖα τῆς γραμμικῆς γεωμετρίας, τὰ σημεῖα καὶ τὰς εὐθείας τὰ καλοῦμεν στοιχεῖα τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας, τὰς εὐθείας καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ καλοῦμεν στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας τοῦ χώρου ἢ ἁπλῶς στοιχεῖα τοῦ χώρου » (Grundlagen der Geometrie S. 1-2, B. G. Teubner 1956, Stuttgart). Καθίσταται φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι εἰς τὰς ὑπὸ τοῦ Hilbert διδομένας διασαφηνίσεις γίνεται κατὰ κρυπτοφανῆ τρόπον χρῆσις καί ἀοριστολογικὴ κατάχρησις τῶν εὐκλειδείων ὅρων.

Ὁ Bernhard Riemann ἀναπτύσσων τὴν ἔννοιαν ἑνὸς N πολλαπλότητος ἐκτεταμένου μεγέθους (Begriff einer N fach ausgedehnten Grösse) δέχεται ὡς γνωστὰς τὰς ἐννοίας σημεῖον – διάστασις – μῆκος, αἵτινες ὅλαι στηρίζονται εἰς τοὺς εὐκλειδείους ὁρισμούς (Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Gesammelte Werke, H. Weber, 1953, Dover N. York).

Ἡ πολεμικὴ τοῦ Ζήνωνος τοῦ Ἐλεάτου πρὸς ὑποστήριξιν τῆς ἀνυπαρξίας τῆς κινήσεως ἔχει ὡς στόχον τὴν ἔννοιαν σημεῖον καὶ τὴν ἔννοιαν ἄπειρον. Ἐκ τῶν ὀλίγων πληροφοριῶν αἵτινες ἔχουν περισωθῆ τῶν σχετικῶν πρὸς τὰς συζητήσεις ἐπὶ τῶν θεωριῶν τοῦ Ζήνωνος, συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι κατὰ τὸν Ζήνωνα ἡ ἀξία τοῦ οἰκοδομήματος τῆς γεωμετρίας εἶναι σχετικὴ καὶ ὅτι ἡ ἀνθρωπίνη διάνοια δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπερβῇ ἓν ὡρισμένον πλαίσιον νοητικότητος. Τὴν σχετικότητα τῆς ἀξίας τῆς γεωμετρίας ὁ Πλάτων ὑπογραμμίζει ἰδιατέρως, γράφων εἰς τὴν Πολιτείαν τὰ ἑξῆς: « ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι; οὐδεμία ἦ δ' ὅς » (533 C). (Διότι ἐὰν χρησιμοποιῆται ὡς ἀρχὴ κάτι ἄγνωστον, διὰ τοῦ ἀγνώστου δὲ αὐτοῦ συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῶν τελικῶν καὶ τῶν ἐνδιαμέσων προτάσεων, ποία ἐπίνοια εἶναι δυνατὸν νὰ παραδεχθῇ ποτὲ τὴν τοιαύτην συναρμολόγησιν ὡς ἐπιστήμην; οὐδεμία ἀπήντησεν ἐκεῖνος.)

II. Αἱ μέθοδοι ἀποδείξεως

Αἱ μέθοδοι ἀποδείξεως εἰς τὰ μαθηματικὰ τὰς ὁποίας ἀπαντῶμεν εἰς τὸν Εὐκλείδην εἶναι αἱ ἑξῆς τέσσαρες: 1) ἡ συνθετική, 2) ἡ τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἄτοπον, 3) ἡ ἀναλυτική, 4) ἡ τῆς τελείας ἐπαγωγῆς. Κατὰ γενικὴν ὁμολογίαν ἡ συνθετικὴ μέθοδος εἶναι ἡ κατ' ἐξοχὴν χρησιμοποιουμένη ὑπὸ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ὁ Ἀριστοτέλης ὀνομάζει αὐτὴν δεικτικὴν ἢ κατηγορικήν.

1. *Ἡ συνθετικὴ μέθοδος*

Κατὰ τὴν συνθετικὴν μέθοδον ὁρμώμεθα ἐξ ἀληθῶν καὶ πρώτων προτάσεων μὴ ἐπιδεκτικῶν περαιτέρω ἀναγωγῆς δηλ. ἐκ τῶν ἀξιωμάτων, καὶ διὰ σειρᾶς συλλογισμῶν προχωροῦμεν εἰς τὴν κατάδειξιν τῆς ἀληθείας τῆς πρὸς ἀπόδειξιν τεθείσης προτάσεως. Διὰ νὰ ἀποδειχθῇ π. χ. τὸ εἰς τὸν Θαλῆν ἀποδιδόμενον θεώρημα ὅτι αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι χρησιμοποιεῖται 1) Τὸ ἀξίωμα « τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα », 2) τὸ ἀξίωμα « ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα », 3) τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἀντιστοίχως καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην εἶναι ἴσα (Εὐκλ. Στοιχεῖα I, κοιναὶ ἔννοιαι 1 καί 3, θ. 4. Πρόκλος εἰς Εὐκλ. I σελ. 250, 20. G. Friedlein, B. G. Teubner).

2. *Ἡ μέθοδος τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς*

Κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν μέθοδον τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὅταν ὑπάρχουν δύο προτάσεις ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι ἀντίθετος τῆς ἄλλης καὶ ἀποδειχθῇ (διὰ τῆς συνθετικῆς μεθόδου) ὅτι ἡ μία πρότασις εἶναι ψευδής, συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἄλλη πρότασις εἶναι ἀληθής. Τυπικὸν παράδειγμα τῆς ἀποδείξεως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον (ἢ ἀδύνατον) ἀπαγωγῆς θεωρεῖται ἡ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους μνημονευομένη πρότασις καθ' ἣν ἡ διαγώνιος τετραγώνου εἶναι πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ἀσύμμετρος (ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης) ('Αναλυτικὰ πρότερα 41α 26 καί Εὐκλείδου Στοιχεῖα Χ. Παράρτημα πρότ. 27). Δεχόμενοι ὅτι ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἶναι συγχρόνως καὶ περιττὸς καὶ ἄρτιος, ὅπερ εἶναι ἄτοπον (ἢ ἀδύνατον) διότι ἀντιστρατεύεται πρὸς τὸν νόμον τῆς ἀντιφάσεως. Κατὰ συνέπειαν ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου πρὸς τὴν πλευράν αὐτοῦ εἶναι ἀσύμμετρος.

3. *'Η ἀναλυτική μέθοδος*

Κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον, ἐὰν τεθῇ πρὸς ἀπόδειξιν πρότασίς τις Α δεχόμεθα πρὸς στιγμὴν ὅτι αὕτη εἶναι ἀληθής. 'Εκ τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεως Α ἀποδεικνύομεν τὴν ἀλήθειαν τῶν προτάσεων Β, Γ ... Γνωρίζομεν ὅμως ἐξ ἄλλης ἀποδείξεως ὅτι ἡ τελευταία ἐκ τῶν προτάσεων τούτων εἶναι ἀληθής. Ὅθεν συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀρχικῶς πρὸς ἀπόδειξιν τεθεῖσα πρότασις εἶναι ἀληθής. Κατὰ τὴν συνθετικήν μέθοδον ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὰς ἀρχάς γνωρίζομεν ἢ ἀνακαλύπτομεν τὸν δρόμον, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἀκολουθήσωμεν διὰ νὰ καταλήξωμεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν. Κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὰ ζητοῦμενα πρὸς τὰς ἀρχάς, καὶ ἀφοῦ ἀνακαλύψωμεν τὸν δρόμον τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἀκολουθήσωμεν ἐπιχειροῦμεν τὴν ἀπόδειξιν διὰ τῆς συνθετικῆς μεθόδου.

'Η χρῆσις τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου προϋποθέτει ὅτι ἡ πρὸς ἀπόδειξιν πρότασις εἶναι ἀντιστρεπτή. 'Ενίοτε ὅμως, ὡς γράφει καὶ ὁ 'Αριστοτέλης, μετὰ τὴν ἀνάλυσιν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν ἀπόδειξιν διὰ τῆς συνθέσεως: « συμβαίνει δέ ποτε καθάπερ ἐν τοῖς διαγράμμασι· καὶ γὰρ ἐκεῖ ἀναλύσαντες ἐνίοτε συνθεῖναι πάλιν ἀδυνατοῦμεν » (Περὶ σοφιστικῶν ἐλέγχων 175 1 26) (συμβαίνει δὲ κάποτε ὅπως καὶ εἰς τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα· διότι καὶ ἐκεῖ ἀφοῦ κάμωμεν τὴν ἀνάλυσιν, εὑρισκόμεθα ἐνίοτε εἰς ἀδυναμίαν νὰ κάμωμεν τὴν σύνθεσιν κατὰ τὴν ἀντίστροφον σειρὰν τῶν συλλογισμῶν). Εἰς τὸν κατάλογον τῶν μαθηματικῶν τοῦ Πρόκλου μνημονεύεται ῥητῶς ὅτι ὁ Εὔδοξος ὁ Κνίδιος ἐχρησιμοποίησεν εἰς τὰς ἀποδείξεις του καὶ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον (ἔνθ. ἄνω. 67,7). Κατὰ τὸν Πρόκλον ἐπίσης (ἔνθ' ἀν. 69,4) ὁ Εὐκλείδης χρησιμοποιεῖ εἰς πολλὰ θεωρήματα τῶν Στοιχείων τὴν ἀποδεικτικὴν μέθοδον τῆς ἀναλύσεως. Εἰς οὐδὲν ὅμως ἐκ τῶν 465 θεωρημάτων τῶν 13 βιβλίων τῶν Στοιχείων συναντῶμεν ἀπόδειξιν διὰ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου ἐκτὸς 5 θεωρημάτων τοῦ XIII βιβλίου, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται εἰς τὸ παράρτημα Ι τῆς κατὰ J. L. Heiberg ἐκδόσεως. Σημειοῦμεν ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ ὅτι ἐκ τοῦ περιστατικοῦ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ σωζόμενα Στοιχεῖα τοῦ

Εὐκλείδου ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν ὡς ταῦτα διεμορφώθησαν διὰ διδακτικοὺς σκοποὺς ἀφοῦ παρελείφθησαν ἐξ αὐτῶν κατὰ καιροὺς τὰ δι' ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως ἀποδεικνυόμενα θεωρήματα.

Κατωτέρω ἐκθέτομεν τὴν δι' ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως ἀπόδειξιν τοῦ α' θεωρήματος τοῦ XIII βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (παράρτημα I 8 (θεωρ. 1).

Θεώρημα

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ τετράγωνον, τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος μετὰ τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας, εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας.

Διότι ἂς τμηθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον

Δ Α Γ Β

κατὰ τὸ Γ καὶ ἔστω ΑΓ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα, καὶ ἂς ληφθῇ $\text{ΑΔ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$, (1)· λέγω ὅτι $\text{ΓΔ}^2 = 5\text{ΑΔ}^2$, (2).

Ἀνάλυσις

Ἔστω ὅτι εἶναι $\text{ΓΔ}^2 = 5\text{ΑΔ}^2$. Εἶναι δὲ $\text{ΓΔ} = \text{ΓΑ} + \text{ΑΔ}$ καὶ ἐπομένως δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς σχέσεως ταύτης εἶναι $\text{ΓΔ}^2 = \text{ΓΑ}^2 + \text{ΑΔ}^2 + 2\text{ΓΑ} \times \text{ΑΔ}$, (3). Ἐκ τῶν (2, 3) ἕπεται $5\text{ΑΔ}^2 = \text{ΓΑ}^2 + \text{ΑΔ}^2 + 2\text{ΓΑ} \times \text{ΑΔ}$ καὶ ἐκ ταύτης δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ ΑΔ^2 λαμβάνομεν $4\text{ΑΔ}^2 = \text{ΓΑ}^2 + 2\text{ΓΑ} \times \text{ΑΔ}$, (4). Ἀλλὰ $2\text{ΓΑ} \times \text{ΑΔ} = \text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ}$, (5), διότι ἐκ τῆς (1) εἶναι $2\text{ΑΔ} = \text{ΑΒ}$· εἶναι δὲ καὶ $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ}$, διότι ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, (6). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) ἐκ τῶν (5, 6) λαμβάνομεν:

$4\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ} + \text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}\,(\text{ΒΓ} + \text{ΑΓ})$. Καὶ ἐπειδὴ $\text{ΒΓ} + \text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}$ θὰ ἔχωμεν $4\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΒ}^2$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀληθὲς καὶ ἐκ τῆς σχέσεως (1) δι' ὑψώσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον.

Σύνθεσις

Ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\frac{\text{ΑΒ}}{2} = \text{ΑΔ}$, (1) καὶ ἐπομένως $\text{ΑΒ}^2 = 4\text{ΑΔ}^2$, (2)

Ἀλλὰ $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ} + \text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ}$ (Εὐκλ. II, 2), (3). Εἶναι ἄρα ἐκ τῶν (2, 3), $4\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ} + \text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ}$, (4). Ἀλλὰ $\text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ} = 2\text{ΑΔ} \times \text{ΑΓ}$, ἐκ τῆς (1), καὶ $\text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ} = \text{ΑΓ}^2$, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ· εἶναι ἄρα ἐκ τούτων δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4), $2\text{ΑΔ} \times \text{ΑΓ} + \text{ΑΓ}^2 = 4\text{ΑΔ}^2$. Διὰ προσθέσεως τοῦ ΑΔ^2 εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΑΓ}^2 + 2\text{ΑΔ} \times \text{ΑΓ} = 5\text{ΑΔ}^2$. Ἀλλὰ $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΑΓ}^2 + 2\text{ΑΔ} \times \text{ΑΓ} = (\text{ΑΔ} + \text{ΑΓ})^2 = \text{ΓΔ}^2$. Εἶναι ἄρα $\text{ΓΔ}^2 = 5\text{ΑΔ}^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4. *Ἡ μέθοδος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς* (vollständige Induktion, Le raisonnement par récurrence).

Ὁ Helmut Hasse ὁρίζει ὡς ἑξῆς τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς: «Ἐὰν μία πρότασις, εἰς ἣν παρουσιάζεται εἷς ἀπροσδιόριστος φυσικός ἀριθμός εἶναι ἀληθὴς διὰ $N = 1$ καὶ ἐκ τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεως αὐτῆς ἕπεται δι' ὅλους τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς N', ὅπου $1 \leqq N' \leqq N$ (ἢ ἐπίσης μόνον διὰ N), ἡ ἀλήθεια διὰ $N + 1$, ἡ πρότασις εἶναι ἀληθὴς διὰ πάντα φυσικὸν ἀριθμὸν N» (Hasse, Vorlesungen über Zahlentheorie σελ. 2, Springer 1950).

Ὁ Kurt Schütte διατυπώνει ὡς ἑξῆς τὸν συνήθη ὁρισμὸν τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς: «Ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις, ὅτι πρῶτον A (O) εἶναι εἷς τύπος δυνάμενος νὰ παραχθῇ καὶ δεύτερον $A(S) \longrightarrow A(S')$ διὰ πάντα ὅρον S εἶναι ἐπιτρεπτὸς συλλογισμός, ὁ τύπος A (T) δύναται νὰ παραχθῇ διὰ πάντα ὅρον T» (Kurt Schütte, Beweistheorie, σελ. 147, Springer 1960).

Ὑπὸ ἁπλῆν ἔκφρασιν εἶναι δυνατὸν ὁ ὁρισμὸς τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς: Ἐὰν ἰσχυρισμός τις εἶναι ἀληθὴς τοὐλάχιστον διὰ δύο φυσικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι ἀληθὴς καὶ δι' ἕνα τυχόντα φυσικὸν ἀριθμόν, ὁ ἰσχυρισμὸς ἔχει γενικὴν ἰσχύν. Ὁ Εὐκλείδης χρησιμοποιεῖ τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς εἰς ἀρκετὰ θεωρήματα τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων τῶν Στοιχείων ἐκ τῶν ὁποίων μνημονεύομεν ἐδῶ τὸ IX, 20, ὅπου ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς δοθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν. Ὁ Εὐκλείδης θεωρεῖ τυχὸν πλῆθος Α, Β, Γ πρώτων ἀριθμῶν καὶ ἀρκεῖται νὰ ἀποδείξῃ ὅτι ὑπάρχει καὶ εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Δ. Διά τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει καὶ ὁ Ε, ὁ Ζ ... Τὸν εὐκλείδειον τρόπον χρησιμοποιήσεως τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς συναντῶμεν καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως: Τὸ γινόμενον πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων εἶναι συνεχὲς διά τινα δοθεῖσαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἕκαστος παράγων αὐτοῦ εἶναι συνάρτησις συνεχὴς διὰ τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς » (Lindelöf - Ullrich, Einführung in die höhere Analysis P. 41, B. G. Teubner, 1950, Leipzig).

Πρό τινων ἐτῶν ἐθεωρεῖτο ὅτι ἡ μέθοδος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἦτο ἐπινόησις τῶν νεωτέρων χρόνων. Μερικοὶ ἀπέδιδον αὐτὴν εἰς τὸν ἐξ Ἑλλήνων γονέων ἐν Σικελίᾳ γεννηθέντα Φραγκίσκον Μαυρόλυκον (1494-1575) ἄλλοι εἰς τὸν Jacob Bernoulli (1625-1705) καὶ ἄλλοι εἰς τὸν Pascal (1623-1662). Κατὰ τὸ 1953 ὁ Εὐ. Σ. Σταμάτης ἀνεκοίνωσεν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν ὅτι ὁ Εὐκλείδης χρησιμοποιεῖ εἰς τὰ Στοιχεῖα του τὴν μέθοδον ἀποδείξεως τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν 11-6-1953). Κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος ὁ Hans Freudenthal ἐδημοσίευσεν ἄρθρον εἰς ὃ ὑποστηρίζει ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι πολὺ πρὸ τοῦ Εὐκλείδου ἐχρησιμοποίησαν τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (Archives internationales d'histoire des sciences, Revue trimest. de l'union inter. d'hist. des sciences. Nr. 22, 1953, P. 17-37). Ἤδη ὅμως πρὸ τοῦ 1930 οἱ Helmut Hasse, καὶ Heinrich Scholz εἶχον ἐπιστήσει τὴν προσοχὴν τῶν μαθηματικῶν ἐπὶ τοῦ κάτωθι χωρίου τοῦ Ἀριστοτέλους ὅπου γίνεται μνεία τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς: « τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δεικνύηται » (Ἀναλυτικὰ ὕστερα 73 Β 32) (Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik, μετάφρασις εἰς τὴν ἑλληνικήν, Ἡ κρίσις τῶν ἀρχῶν τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης (1934), ὑπὸ Φίλωνος Βασιλείου καὶ Χρίστου Καπνουκάγια). Λίαν ὀξυδερκῶς παρατηρεῖ καὶ ὁ B. L. Van der Waerden ὅτι καὶ ὁ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης ἐγνώριζε τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ὡς συνάγεται ἐκ σχολίου τοῦ Σιμπλικίου εἰς τὰ Φυσικὰ τοῦ Ἀριστοτέλους ἔχοντος οὕτω: « Προδείξας γὰρ ὅτι εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ᾽ ἂν εἴη, ἐπάγει ' εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν » (Σιμπλίκιος, Εἰς Φυσ. Ἀριστ. 140,34). (Διότι προαποδείξας ὅτι ἐὰν τὸ ὂν δὲν εἶχε μέγεθος δὲν θὰ ὑπῆρχε ', ἐπάγει ' ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ τὸ ὂν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχῃ ἕκαστον πρᾶγμα μέγεθος καὶ πάχος καὶ νὰ ἀπέχῃ αὐτοῦ τὸ πρὸ αὐτοῦ καὶ τὸ μετ᾽ αὐτό. Καί ὅτι ἐλέχθη δι᾽ ἓν πρᾶγμα τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὸ προηγούμενόν του. Διότι καὶ ἐκεῖνο θὰ ἔχῃ μέγεθος καὶ θὰ προϋπάρχῃ αὐτοῦ ἄλλο τι. Διότι ἐὰν τὸ εἴπωμεν μίαν φορὰν δυνάμεθα καθ᾽ ὅμοιον τρόπον νὰ τὸ λέγωμεν πάντοτε.) (Math. Ann. 117, 1939, 148).

Πολλοὶ κατατάσσουσιν εἰς τὰς μεθόδους ἀποδείξεως τὴν ἐξαντλητικὴν λεγομένην μέθοδον τοῦ Εὐδόξου, τὴν ὁποίαν ἀνέπτυξεν καὶ ἐφήρμοσεν ἔτι περαιτέρω ὁ Ἀρχιμήδης. Ἐνταῦθα δὲν πρόκειται περὶ μεθόδου τοῦ τύπου τῶν προηγουμένως ἀναφερθεισῶν τεσσάρων εὐκλειδείων μεθόδων.

Διότι ὁ Εὔδοξος ἀντὶ νὰ λάβῃ τὰ ὅρια καὶ νὰ συναγάγῃ τὸ συμπέρασμα διὰ τὴν πρότασίν του, συνάγει αὐτὸ διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Εἰς τὴν Ἀνωτέραν Ἀνάλυσιν δὲν γίνεται τίποτε ἄλλο παρὰ ἐφαρμογὴ τῆς ἐξαντλητικῆς μεθόδου, τῆς λήψεως δηλ. τῶν ὁρίων. Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ ταύτῃ δέον νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ ἐξαντλητικὴ λεγομένη μέθοδος τοῦ Εὐδόξου, περὶ τῆς ὁποίας ὁμιλεῖ ὁ Ἀρχιμήδης, χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ XII,2 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅπου ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν. Τὸ θεώρημα ὅμως τοῦτο κατὰ τὴν μαρτυρίαν τοῦ Σιμπλικίου καὶ τοῦ Φιλοπόνου (εἰς σχόλια τῶν Φυσικῶν τοῦ Ἀριστοτέλους 185 α 14) ἐχρησιμοποίησε πολὺ πρὸ τοῦ Εὐδόξου ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (περί τό 430 π. Χ.) διὰ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. EUCLIDIS *Opera omnia*, J. L. HEIBERG et H. MENGE (I-VIII).
2. Εὐκλείδου *Στοιχεῖα κλπ. Εὐάγγελος Σ. Σταμάτης* I-IV, Ἀθῆναι 1952-57.
3. Κωνσταντῖνος Δ. Γεωργούλης *Ἀριστοτέλης ὁ Σταγιρίτης*. Θεσσαλονίκη, 1962.
4. WERNER JAEGER, *Aristoteles*, Berlin 1923.
5. PAUL GOHLKE, *Aristoteles und sein Werk*. 1952. Verl. F. Schöningh Paderborn.
6. JOSEF ZÜRCHER, *Aristoteles Werk und Geist*, 1952, Verl. F. Schöningh Paderborn.
7. J. L. HEIBERG, *Mathematisches zu Aristoteles*.
8. I. S. SOMINSKI, *Die Methode der vollständigen Induktion*. Deutscher Verlag D. Wiss. Berlin 1962, Μετάφρασις ἐκ τοῦ ρωσικοῦ.