ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1979

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ Εὐκλείδης εἶχε γράψει βιβλίον, Περὶ Διαιρέσεων. Τοῦτο πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Πρόκλου (410-485), ὁ ὁποῖος εἰς τὰ σχόλιά του τοῦ Α' βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, γράφει : «Πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου (τοῦ Εὐκλείδου) μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μεστά· τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ 'Οπτικὰ καὶ τὰ Κατοπτρικά, τοιαῦται δὲ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις, ἔτι δὲ τὸ Περὶ Διαιρέσεων βιβλίον». (σελ. 68, 23). Καὶ κατωτέρω : «δεύτερον δὲ ἀπὸ τῆς ὁλότητος τελειοῦται . . . καὶ γὰρ ὁ κύκλος εἰς ἀνόμοια τῷ λόγῳ καὶ ἕκαστον τῶν εὐθυγράμμων διαιρετόν ἐστιν, ὃ καὶ αὐτὸς ὁ Στοιχειωτὴς (δηλ. ὁ Εὐκλείδης) ἐν ταῖς Διαιρέσεσι πραγματεύεται τὸ μὲν εἰς ὅμοια τὰ δοθέντα σχήματα διαιρῶν, τὸ δὲ εἰς ἀνόμοια». (σελ. 141, 18). Ἔκδ. Friedlein. Τὸ βιβλίον τοῦτο τοῦ Εὐκλείδου ἀπωλέσθη.

Τὰ κατωτέρω ἀποσπάσματα τοῦ ἀπολεσθέντος «Περὶ Διαιρέσεων» βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου, προέρχονται ἐκ μεταφράσεως εἰς τὴν Γαλλικήν, σωζομένου ἐν Παρισίοις 'Αραβικοῦ χειρογράφου, ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ F. Woepcke, δημοσιευθείσης εἰς Journal Asiatique 4e serie. Arab. 952,2. (Cod. Paris supplement).

'Εκ τῶν ἀποδείξεων τῶν σωζομένων προτάσεων 19, 20, 28, 29 ἀντιλαμβάνεται κανεὶς τὴν ἀξίαν τῆς ἀπολεσθείσης πραγματείας τοῦ Εὐκλείδου «Περὶ Διαιρέσεων».

Τὰ μνημονευόμενα ἀποσπάσματα δημοσιεύονται εἰς τὴν Γαλλικὴν εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου Euclidis, Phaenomena et scripta musica, ὑπὸ H. Menge καὶ I. L. Heiberg, Eucl. opera vol. VIII, Fragmenta, p. 225. (B.G. Teubner, 1916, Lipsiae).

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΝ

1

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο ἴσα μέρη δι' εὐθείας γραμμῆς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του.

2

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία ἴσα μέρη διὰ δύο εὐθειῶν γραμμῶν παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν του.

3

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο ἴσα μέρη δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

4

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τραπέζιον εἰς δύο ἴσα μέρη δι' εὐθείας γραμμῆς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του.

5

Καὶ διαιροῦμεν τὸ δοθὲν τραπέζιον εἰς τρία ἴσα μέρη, ὅπως διαιροῦμεν τὸ τρίγωνον διὰ κατασκευῆς ἀναλόγου πρὸς τὴν προηγουμένην κατασκευήν.

6

Νὰ διαιρεθῇ παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἴσα μέρη δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου.

7

Νὰ τμηθῇ τμῆμα τι ὡρισμένον δοθέντος παραλληλογράμμου δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου.

8

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τραπέζιον εἰς δύο ἴσα μέρη δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τοῦ τραπεζίου.

9

Νὰ τμηθῇ ὡρισμένον τμῆμα δοθέντος τραπεζίου δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τοῦ τραπεζίου.

10

Νὰ διαιρεθῇ παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἴσα μέρη δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ παραλληλογράμμου.

11

Νὰ τμηθῇ ὡρισμένον τμῆμα παραλληλογράμμου δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ παραλληλογράμμου.

12

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τραπέζιον εἰς δύο ἴσα μέρη δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ σημείου, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τοῦ τραπεζίου. Τὸ σημεῖον τοῦτο δὲν πρέπει νὰ κεῖται πέραν τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

13

Νὰ τμηθῇ ὡρισμένον τμῆμα δοθέντος τραπεζίου δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τοῦ τραπεζίου. Τὸ σημεῖον τοῦτο δὲν πρέπει νὰ κεῖται πέραν τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

14

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τετράπλευρον εἰς δύο ἴσα μέρη δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δεδομένης κορυφῆς τοῦ τετραπλεύρου.

15

Νὰ τμηθῇ ὡρισμένον μέρος δοθέντος τετραπλεύρου δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δεδομένης κορυφῆς τοῦ τετραπλεύρου.

16

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τετράπλευρον εἰς δύο ἴσα μέρη δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου.

17

Νὰ τμηθῇ ὡρισμένον τμῆμα τετραπλεύρου δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου.

18

Νὰ παραβληθῇ εἰς εὐθεῖαν γραμμὴν ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον.

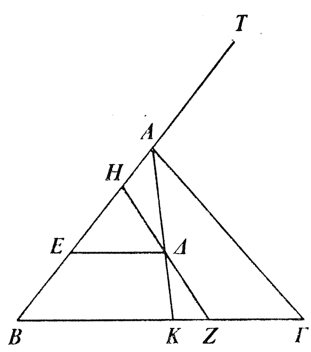
Ἀφοῦ ἀποδείξωμεν ὅ,τι ζητεῖται, ἐὰν τις ἐρωτήσῃ : πόθεν γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ παραβάλωμεν εἰς τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΑΒ ὀρθογώνιον, τοιοῦτον, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ.ΕΒ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.ΑΓ καὶ νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον, θὰ εἴπωμεν : ὅτι τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι ἡ ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΕ, καὶ ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΕ, καὶ συνεπῶς τὸ ὀρθογώνιον ΒΑ.ΑΓ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΕ.ΕΒ. Ὅθεν ἐὰν παραβάλωμεν εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς ὀρθογώνιον ΑΒ.ΑΓ, τὸ ὀρθογώνιον ΑΖ.ΖΒ εἶναι (σημ. κενὸν εἰς τὸ Ἀραβικὸν χειρόγραφον).

19

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἴσα δι' εὐθείας ἡ ὁποία διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου κειμένου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου τὸ Δ. Λέγω ὅτι διὰ τοῦ Δ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν γραμμήν, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἴσα.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Δ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ ἂς παραβάλωμεν ἐπὶ τῆς ΔΕ ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒ.ΒΓ, ἔστω τὸ ΤΒ.ΕΔ. Ἂς παραβάλωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΤΒ, παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΤ.ΒΕ ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον. Ἔστω ὅτι τὸ παραβαλλόμενον ὀρθογώνιον εἶναι τὸ ΒΗ.ΗΤ. Ἂς φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΗ καὶ ἂς προεκτείνωμεν αὐτὴν μέχρι τοῦ Ζ. Λέγω ὅτι ἔχω λάβει τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν, καὶ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ΗΒΖ καὶ ΗΖΓΑ.



Ἀπόδειξις. Τὸ ὀρθογώνιον ΤΒ.ΒΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΤΗ.ΗΒ, ἐξ οὗ ἔπεται $\frac{BT}{TH} = \frac{HB}{BE}$ καὶ δι' ἀναστροφῆς τοῦ λόγου $\left(\text{σημ. } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta},\ \text{ἀναστροφὴ εἶναι, } \frac{\alpha}{\alpha\text{-}\beta} = \frac{\gamma}{\gamma\text{-}\delta}\right)$ εἶναι $\frac{TB}{BH} = \frac{HB}{HE}$·

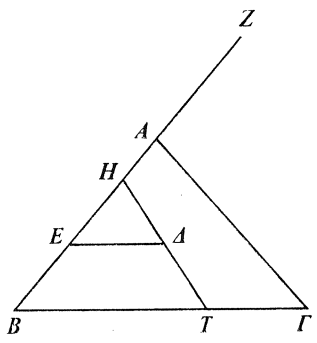
'Αλλὰ $\frac{BH}{BE} = \frac{BZ}{E\Delta}$, ὅθεν $\frac{TB}{BH} = \frac{BZ}{E\Delta}$. Συνεπῶς τὸ ὀρθογώνιον $TB.E\Delta$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $BH.\ BZ$. 'Αλλὰ τὸ ὀρθογώνιον $TB.E\Delta$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου $AB.B\Gamma$· καὶ εἶναι ὀρθογώνιον $BH.BZ$: ὀρθογώνιον $AB.B\Gamma =$ τρίγωνον HBZ : τρίγωνον $AB\Gamma$, ἐπειδὴ ἡ γωνία B εἶναι κοινή. Τὸ τρίγωνον τοῦτο τὸ HBZ εἶναι κατὰ ταῦτα τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Συνεπῶς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ διῃρέθη εἰς δύο ἴσα μέρη τὰ BHZ καὶ $AHZ\Gamma$.

'Εὰν παραβάλωμεν εἰς τὴν TB παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $TB.BE$, τοῦ ὁποίου τὸ συμπλήρωμα εἶναι τετράγωνον, λαμβάνομεν τὸ ὀρθογώνιον $AB.AT$ καί, ἀποδεικνύομεν κατ' ἀνάλογον τρόπον, φέροντες τὴν εὐθεῖαν $A\Delta$ καὶ προεκτείοντες αὐτὴν μέχρι τοῦ K, ὅτι τὸ τρίγωνον ABK εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. ῞Οπερ ἔδει δεῖξαι.

20

Νὰ τμηθῇ ὡρισμένον τμῆμα δοθέντος τριγώνου δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου.

῎Εστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου, τὸ Δ. Λέγω, ὅτι διὰ τοῦ σημείου Δ ἄγεται εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία τέμνει ὡρισμένον τμῆμα τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.



῎Εστω τὸ ὡρισμένον τμῆμα τοῦ τριγώνου, ὅτι εἶναι τὸ ἓν τρίτον τούτου. Φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου Δ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν $B\Gamma$, ἔστω τὴν ΔE, καὶ παραβάλλομεν ἐπὶ τῆς BE ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ ἓν τρίτον τοῦ ὀρθογωνίου $AB.B\Gamma$. ῎Εστω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι τὸ $BZ.E\Delta$. Παραβάλλομεν ἀκολούθως ἐπὶ τῆς ZB ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ZB.BE$, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τούτου τετράγωνον. ῎Εστω τὸ παραβληθὲν ὀρθογώνιον τὸ $BH.HZ$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $H\Delta$ καί τὴν προεκτείνομεν μέχρι τοῦ

Τ. Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς ἀνωτέρω, ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΤΒ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· καὶ δι' ἀναλόγου κατασκευῆς πρὸς ταύτην, διαιροῦμεν τὸ τρίγωνον εἰς ὁσαδήποτε μέρη. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21

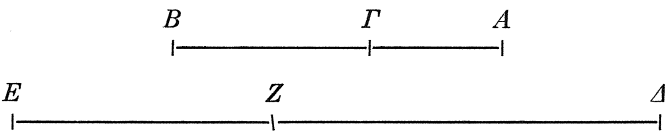
Ἔχομεν τέσσαρας εὐθείας γραμμὰς τὰς Α,Β,Γ,Δ, καὶ ἔστω τὸ γινόμενον Α.Δ μεγαλύτερον τοῦ γινομένου Β.Γ. Λέγω, ὅτι ὁ λόγος Α : Β εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου Γ : Δ.

22

Καὶ ὅταν τὸ γινόμενον Α. Δ εἶναι μικρότερον τοῦ γινομένου Β. Γ, λέγω, ὅτι ὁ λόγος Α : Β εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου Γ : Δ

23

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ ἐπὶ τούτων τὰ σημεῖα Α,Β,Δ,Ε· ἔστω ὁ λόγος ΑΒ : ΒΓ μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΔΕ : ΕΖ. Λέγω, ὅτι διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων, ὁ λόγος ΑΓ : ΓΒ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΔΖ : ΖΕ. $\left(\text{σημ.}\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.\ \text{Διαίρεσις λόγων εἶναι}\ \frac{\alpha\text{-}\beta}{\beta} = \frac{\gamma\text{-}\delta}{\delta}\right).$

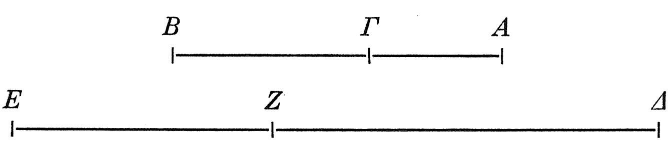


24

Κατὰ τελείως ἀνάλογον τρόπον, λέγω, ὅτι, ὅταν ὁ λόγος ΑΓ : ΓΒ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΔΖ : ΖΕ, θὰ ἔχωμεν διὰ συνθέσεως ὅτι ὁ λόγος ΑΒ : ΒΓ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΔΕ: ΖΕ. $\left(\text{σημ.}\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.\ \text{Σύνθεσις λόγων εἶναι}\ \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}\right).$

25

Ὑποθέτομεν ἀκόμη ὅτι ὁ λόγος ΑΒ : ΒΓ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΔΕ : ΕΖ. Καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων (ἴδε 23) εἶναι ΑΓ : ΓΒ μικρότερος τοῦ λόγου ΔΖ : ΖΕ.



26

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο ἴσα μέρη δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ τριγώνου.

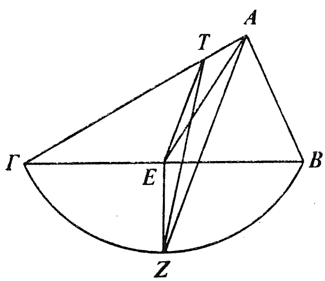
27

Νὰ τμηθῇ ὡρισμένον μέρος τριγώνου δι' εὐθείας γραμμῆς ἀγομένης ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ τριγώνου.

28

Νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη δοθὲν σχῆμα ὁριζόμενον ἐκ τόξου κύκλου καὶ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι δοθεῖσαν γωνίαν.

Ἔστω τὸ δοθὲν σχῆμα τὸ ΑΒΓ, ὁριζόμενον ἐκ τοῦ τόξου ΒΓ καὶ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι τὴν γωνίαν ΒΑΓ. Λέγω, ὅτι δι' εὐθείας γραμμῆς τὸ σχῆμα ΑΒΓ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη.



Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ σημειου Ε. Ἐκ τοῦ σημείου Ε φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. ἔστω τὴν ΕΖ, καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΕ. Ἐπειδὴ ἡ ΒΕ = ΕΓ ἡ ἐπιφάνεια ΒΖΕ = ΕΖΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ = τρίγωνον ΑΕΓ. Ὅθεν τὸ σχῆμα ΑΒΖΕ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σχῆμα ΖΓΑΕ. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι ἡ προέκτασις τῆς εὐθείας ΕΖ, τότε τὸ σχῆμα ΑΒΓ θὰ ἔχῃ διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη τὰ ΑΒΖΕ καὶ ΓΑΕΖ. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΕ δὲν εἶναι ἡ προέκτασις τῆς ΖΕ, φέρομεν τὴν ΑΖ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΖ, τὴν ΕΤ. Τέλος φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΤΖ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΤΖ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, καὶ ὅτι τὸ σχῆμα ΑΒΓ ἔχει διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ΑΒΖΤ καὶ ΖΓΤ.

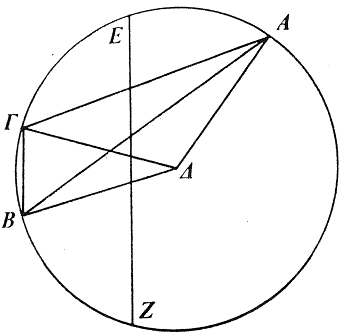
Διότι, ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωναΤΖΑ καὶ ΕΖΑ εἶναι κατεσκευασμένα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΖ καὶ περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΑΖ,ΤΕ, τὸ τρίγωνον ΖΤΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΕΖ. Ὅθεν προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο ταῦτα τὸ κοινὸν μέρος ΑΖΒ, θὰ ἔχωμεν ΤΖΒΑ = ΑΒΖΕ. Ἀλλὰ τὸ τελευταῖον τοῦτο σχῆμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ σχήματος ΑΒΓ. Κατὰ *συνέπειαν ἡ εὐθεῖα ZT εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα καὶ τὸ σχῆμα ΒΖΓΑ ἔχει διαιρεθῆ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ABZT, ΤΖΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

29

Εἰς δοθέντα κύκλον ν' ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνουσαι ὡρισμένον μέρος τοῦ κύκλου.

Ἔστω, ὅτι τὸ ὡρισμένον μέρος τοῦ κύκλου εἶναι τὸ ἓν τρίτον αὐτοῦ καὶ ὁ κύκλος εἶναι ὁ ΑΒΓ. Λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον γίνεται.

Κατασκευάζομεν τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἐγγραφομένου τριγώνου. Ἔστω αὕτη ἡ ΑΓ. Φέρομεν τὰς δύο εὐθείας ΑΔ, ΔΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ἔστω τὴν ΔΒ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΒ, καὶ διαιροῦμεν τὸ τόξον ΑΓ εἰς δύο ἴσα μέρη, διὰ τοῦ σημείου Ε, καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, ἔστω τὴν ΕΖ.



Τέλος φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Λέγω, ὅτι ἔχομεν λάβει δύο παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι ἓν τρίτον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, τὸ σχῆμα δηλαδὴ ΖΒΓΕ. (σημ. Δ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ, τὸ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΓ. Προσθέτομεν εἰς τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα τὸ κοινὸν μέρος, τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΕΓ· ὁπότε ὅλον τὸ σχῆμα ΔΑΕΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σχῆμα ΒΑΕΓ. Ἀλλὰ τὸ σχῆμα ΔΑΕΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Συνεπῶς τὸ σχῆμα ΒΑΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τρίτον τοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΒ, τὸ τόξον ΕΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΒΖ. Ἀλλ' ἔχομεν ΕΓ ἴσον πρὸς ΕΑ, ὅθεν ΕΑ = = ΖΒ. Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τὸ τόξον ΕΓΒ· ὅλον τὸ τόξον ΑΒ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ τόξον ΕΖ. Συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, καὶ τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΕΓΒ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΕΓΒΖ. Ἀφαιροῦντες τὸ κοινὸν τμῆμα ΒΓ, θ' ἀπομείνῃ τὸ σχῆμα ΕΖΒΓ ἴσον πρὸς τὸ σχῆμα ΒΑΕΓ. Ἀλλὰ τὸ σχῆμα ΒΑΕΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον *τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ὅθεν τὸ σχῆμα ΕΖΒΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Ὅταν θέλωμεν νὰ τμήσωμεν ἑνὸς κύκλου τὸ τέταρτον αὐτοῦ ἢ τὸ πέμπτον ἢ οἱονδήποτε ἄλλο ὡρισμένον μέρος, διὰ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, κατασκευάζομεν εἰς τὸν κύκλον τοῦτον τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ἢ πενταγώνου, καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς (τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος), δύο εὐθείας γραμμάς, ὡς τοῦτο θέλομεν. Ἡ κατασκευὴ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν προηγουμένην.

30

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε ὁ λόγος τοῦ ἑνὸς μέρους πρὸς τὸ ἄλλο νὰ εἶναι ἴσος πρὸς δοθέντα λόγον. (σημ. ὅμοιον πρόβλημα εἰς τὰ Μετρικὰ τοῦ Ἥρωνος 3.2).

31

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν του εἰς μέρη ἔχοντα μεταξύ των λόγους δοθέντας.

32

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τραπέζιον δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε ὁ λόγος τοῦ ἑνὸς μέρους πρὸς τὸ ἄλλο νὰ εἶναι ἴσος πρὸς δοθέντα λόγον.

33

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τραπέζιον δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν του εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσι μεταξύ των δοθέντας λόγους.

34

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τετράπλευρον δι' εὐθείας ἀγομένης ἐκ δοθείσης κορυφῆς τοῦ τετραπλεύρου εἰς δύο μέρη, τοιαῦτα, ὥστε ὁ λόγος τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸ ἄλλο νὰ εἶναι ἴσος πρὸς δοθέντα λόγον.

35

Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τετράπλευρον δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ δοθείσης κορυφῆς τοῦ τετραπλεύρου εἰς μέρη, ὥστε ταῦτα νὰ ἔχωσι μεταξύ των δοθέντας λόγους.

36

Ἀφοῦ λύσωμεν τὸ προηγούμενον πρόβλημα, εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ διαιρέσωμεν δοθὲν τετράπλευρον κατὰ δοθέντα λόγον, ἢ δοθέντας λόγους, διὰ μιᾶς εὐθείας, ἢ δι' εὐθειῶν, ἀγομένων ἐκ δοθέντος σημείου καὶ κειμένου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει τὰς ἀνωτέρω μνημονευομένας συνθήκας.

Τέλος τῆς πραγματείας. Περιοριζόμεθα νὰ δώσωμεν τὰς ἐκφωνήσεις χωρὶς τὰς ἀποδείξεις, ἐπειδὴ αἱ ἀποδείξεις εἶναι εὔκολοι. (σημ. Δὲν φαίνεται ποῖος τὰ λέγει αὐτά. Ὁ Ἄραψ, ἢ ὁ Woecke).